Презентація на тему: Трапеція. Центральні вписані кути. Вписані й описані кути.

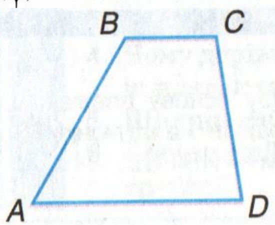
Сьогодні в програмі:

1. Правила
2. Приклади
3. Кросворд
4. Ребуси
5. Гра «Змійка»
6. Про автора

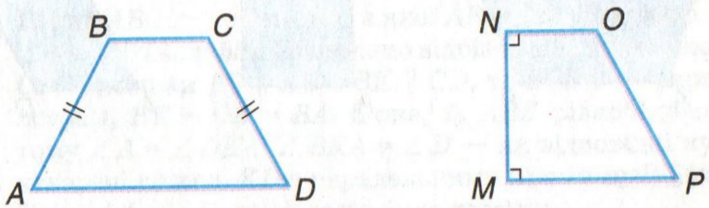

ПРИКЛАД
И
Ребус
и
Правил
а
КРОСВО
РД
ПРО
автора

Трапеція

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають *трапецією* (мал. 50). Паралельні сторони трапеції — її *основи*, дві інші — *бічні сторони*. Трапецію з рівними бічними сторонами називають *рівнобічною* або *рівнобедреною*. Якщо трапеція має прямий кут, її називають *прямокутною*. На малюнку 51 трапеція $ABCD$ — рівнобічна, а трапеція $MNOP$ — прямокутна.



Мал. 50

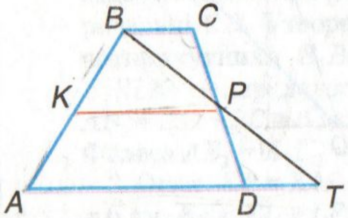


Мал. 51

У кожній трапеції сума двох кутів, що прилягають до бічної сторони, дорівнює 180°. Чому?

Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

ТЕОРЕМА 9 **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.**



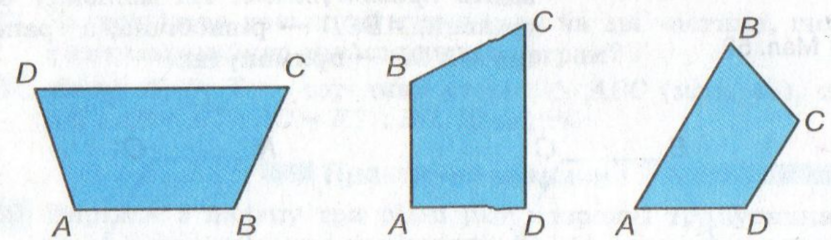
Мал. 52

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай KP — середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 52), а прямі BP і AD перетинаються в точці T. Трикутники BCP і TDP рівні, бо $CP = PD$, $\angle BPC = \angle TPD$, $\angle BCP = \angle TDP$. Отже, $BC = DT$ і $BP = PT$. Середня лінія KP трапеції $ABCD$ є також середньою лінією трикутника ABT. Тому $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2}AT$. Отже, $KP \parallel AD$ і $KP = \frac{1}{2}(AD + BC)$. □

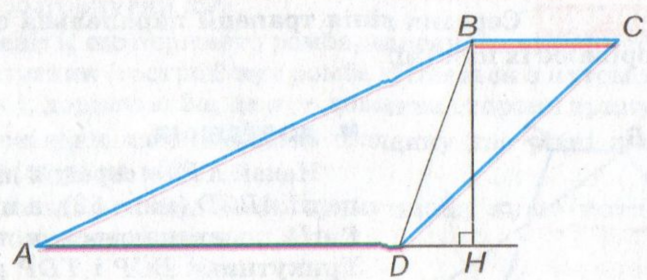
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Креслячи трапецію, найчастіше її більшу основу вважають нижньою основою. Це не обов'язково. Зображені на малюнку 53 чотирикутники — також трапеції. Їхні основи — *AB* і *CD*.



Мал. 53

Чи одне й те саме означають терміни *відстань між основами трапеції* і *відстань між прямими, на яких лежать основи трапеції*? Не завжди. Наприклад, на малюнку 54 зображено трапецію, відстань між основами якої дорівнює довжині діагоналі *BD* (відстані між найближчими точками відрізків *AD* і *BC*). А відстанню між прямими *AD* і *BC* є висота *BH* трапеції *ABCD* і *BH* < *BD*.

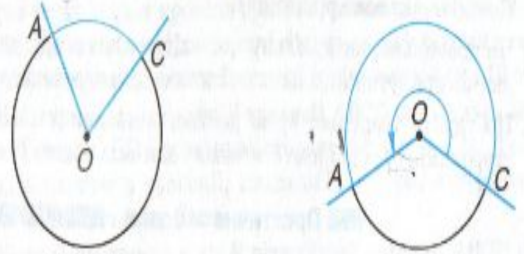


Мал. 54

§6 Центральні і вписані кути

Далі розглядатимемо властивості чотирикутників, вписаних в коло і описаних навколо кола. Для цього введемо поняття центрального кута і вписаного кута.

Кут, вершина якого збігається з центром кола, називається ***центральним кутом***. Сторони центрального кута ділять коло на дві *дуги*. Одна з них лежить у внутрішній області центрального кута. Говорять, що вона *відповідає* даному куту. Наприклад, виділена на малюнку 57, *а* дуга AC відповідає центральному куту AOC, і навпаки: центральний кут AOC відповідає дузі AC. Центральний кут може бути і більшим від розгорнутого (мал. 57, *б*).



а б

Мал. 57

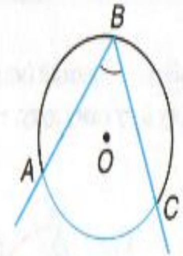
Кожна дуга кола має певну *кутову міру* — міру відповідного їй центрального кута. Кажуть також, що **центральний кут вимірюється дугою, яка йому відповідає**. Наприклад, якщо $\angle AOC = 60°$, то і кутова міра дуги AC дорівнює $60°$. Пишуть: $\breve{AC} = 60°$. Кутова міра всього кола дорівнює $360°$.

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається ***вписаним кутом***. Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC, то говорять, що даний вписаний *кут спирається на дугу* AC (мал. 58).

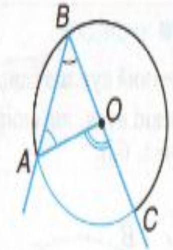
ТЕОРЕМА 10 **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо спочатку випадок, коли одна сторона вписаного кута ABC, наприклад BC, проходить через центр кола O



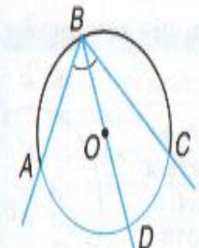
Мал. 58



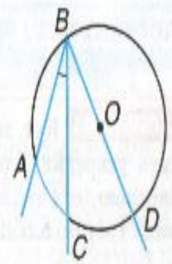
Мал. 59

(мал. 59). Сполучивши точки A і O відрізком, одержимо трикутник AOB, в якому $OA = OB$, отже, $\angle A = \angle B$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$, звідки

$$\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\breve{AC}.$$



Мал. 60



Мал. 61

Якщо жодна із сторін вписаного кута ABC не проходить через центр кола (мал. 60, 61), то, провівши діаметр BD, матимемо:

$$\angle ABD = \frac{1}{2}\breve{AD} \text{ і } \angle DBC = \frac{1}{2}\breve{DC}.$$

Якщо центр кола лежить у внутрішній області $\angle ABC$ (див. мал. 60), то

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}(\breve{AD} + \breve{DC}) = \frac{1}{2}\breve{AC}.$$

Якщо центр кола лежить поза кутом ABC (див. мал. 61), то

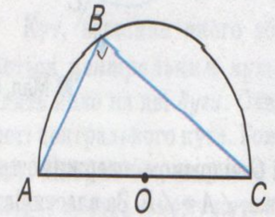
$$\angle ABC = \angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2}(\breve{AD} - \breve{DC}) = \frac{1}{2}\breve{AC}.$$

Розглянуто всі можливі випадки.

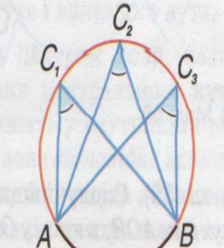
Отже, кожний вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. □

НАСЛІДКИ

1. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий** (мал. 62).
2. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні** (мал. 63).



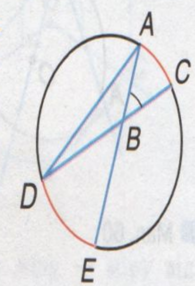
Мал. 62



Мал. 63

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 11 **Кут, вершина якого лежить усередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, на які спираються даний і вертикальний до нього кути.**



Мал. 64

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AE і CD перетинаються в точці B, що міститься всередині кола (мал. 64). Доведемо, що кут ABC вимірюється півсумою дуг AC і DE.

Проведемо відрізок AD. $\angle ABC = \angle A + \angle D$ як зовнішній кут $\triangle ABD$. Кути A і D вписані, тому

$$\angle ABC = \angle A + \angle D = \frac{1}{2}\breve{DE} + \frac{1}{2}\breve{AC} = \frac{1}{2}(\breve{DE} + \breve{AC}). \square$$

ТЕОРЕМА 12 **Кут, сторони якого перетинають коло, а вершина лежить поза колом, вимірюється піврізницею дуг цього кола, що лежать усередині кута.**

ДОВЕДЕННЯ.

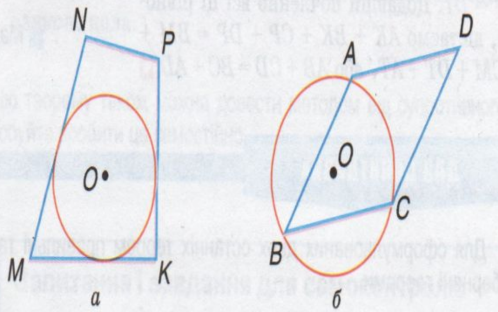
Нехай сторони довільного кута A перетинають коло в точках, позначених на малюнку 65. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle A = \angle CBP - \angle P$.

§7 Вписані й описані чотирикутники

Ви вже знаєте, які трикутники називаються вписаними в коло і які — описаними навколо нього (пригадайте!). Подібно визначаються вписані й описані чотирикутники.

Якщо всі вершини чотирикутника лежать на колі, його називають *вписаним* у коло, а коло — *описаним* навколо чотирикутника. Якщо коло дотикається до всіх сторін чотирикутника, такий чотирикутник називають *описаним* навколо кола, а коло — *вписаним* у чотирикутник.

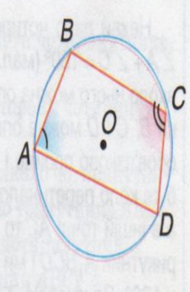
Не в кожний чотирикутник можна вписати коло і не навколо кожного чотирикутника — описати коло (мал. 74).



Мал. 74

Розглянемо найважливіші властивості чотирикутників, описаних навколо кола і вписаних у коло.

ТЕОРЕМА 13 **Сума двох протилежних кутів чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює 180°.**



Мал. 75

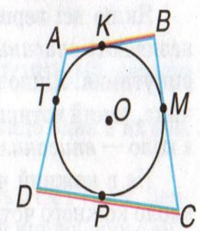
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — вписаний у коло чотирикутник (мал. 75). Його протилежні кути A і C вписані; перший вимірюється половиною дуги BCD, другий — половиною дуги BAD. Сума кутів A і C вимірюється півсумою цих дуг, тобто півколом. Півколу відповідає 180°. Отже, $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$.□

ТЕОРЕМА 14 **Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін.**

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 76

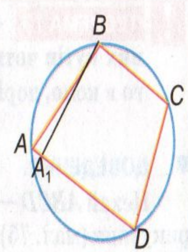
Нехай чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$ (мал. 76). Позначимо точки дотику сторін чотирикутника до вписаного кола буквами K, M, P, T. Оскільки відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні, то $AK = AT$, $BK = BM$, $CP = CM$, $DP = DT$. Додавши почленно всі ці рівності, дістаємо $AK + BK + CP + DP = BM + CM + DT + AT$, або $AB + CD = BC + AD$.□

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Для сформульованих двох останніх теорем правильні також обернені теореми.

ТЕОРЕМА 15 **Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то цей чотирикутник можна вписати в коло.**

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 77

Нехай дано чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$ (мал. 77). Покажемо, що навколо нього можна описати коло. Через точки B, C і D можна описати єдине коло. Воно обов'язково пройде і через точку A. Бо коли б те коло перетинало пряму AD не в точці A, а в іншій точці A_1, то був би вписаний чотирикутник A_1BCD і ми б мали $\angle BA_1D + \angle C = 180°$. За умовою $\angle BAD + \angle C = 180°$. З цих двох рівностей виходить, що $\angle BAD = \angle BA_1D$, тобто зовнішній кут трикутника $\triangle AA_1B$ дорівнює його внутрішньому куту. Цього не може бути. Отже, зроблене припущення неправильне. За умови $\angle A + \angle C = 180°$ коло, яке проходить через точки B, C, D, обов'язково проходить і через точку A.□

НАСЛІДКИ

1. **Навколо кожного прямокутника можна описати коло.**
2. **Навколо кожної рівнобічної трапеції можна описати коло.**

ТЕОРЕМА 16 **Якщо сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших його сторін, то такий чотирикутник можна описати навколо кола.**

Цю теорему також можна довести методом від супротивного. Спробуйте зробити це самостійно.

ПРИКЛАДИ

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СЕРЕДНІ ЛІНІЇ ТРИКУТНИКА І ТРАПЕЦІЇ

1°. Знайдіть центральний кут, що спирається на дугу, яка становить:

Варіант 1	Варіант 2
$\frac{5}{24}$ кола	$\frac{7}{24}$ кола

А $37°30'$	Б $52°30'$	* В $75°$	* Г $105°$

2°. Знайдіть вписаний кут, що спирається на дугу, яка становить:

$\frac{7}{9}$ кола	$\frac{5}{9}$ кола

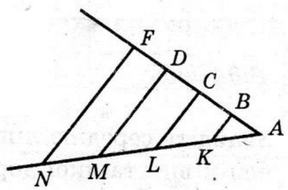
А $50°$	Б $70°$	* В $100°$	* Г $140°$

3°. Точки M, N, P — середини сторін рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть:

сторону AB, якщо периметр трикутника MNP дорівнює 12 см	сторону MN, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см

А 12 см	Б 14 см	* В 6 см	* Г 8 см

4°. На рисунку $BK \parallel CL \parallel DM \parallel FN$, $AB = BC = CD = DF = 3$ см. Знайдіть MK, якщо:



$NK = 6$ см	$MA = 9$ см

* А 4 см	* Б 6 см	В 9 см	Г 12 см

5°. Знайдіть основи трапеції, діагональ якої ділить середню лінію на відрізки завдовжки:

4 см і 8 см	6 см і 8 см

А 8 см і 12 см	* Б 8 см і 16 см	* В 12 см і 16 см	Г 16 см і 20 см

6°. Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює 5 см. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо її периметр дорівнює:

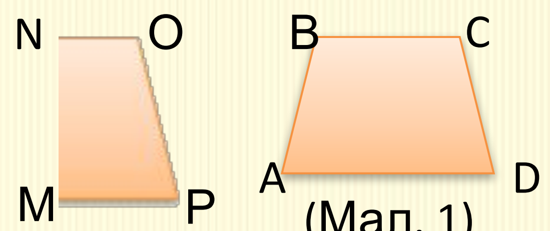
24 см	26 см

А 16 см	Б 14 см	* В 8 см	* Г 7 см

Питання до кросворду

1. Якщо трапеція має прямий кут, її називають … .

2. Середньою лінією трапеції називається … .



(Мал. 1)

3. На малюнку 1 трапеція ABCD - … ,
а трапеція MNOP – прямокутна.

4. Середня лінія трапеції …. основам і дорівнює їх півсумі .

5. Трапецію з рівними бічними сторонами називають … .

6. Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають … .

7. Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші - … .

8. У кожній трапеції сума двох кутів, що … до бічної сторони, дорівнює 180*

Кросворд

П Р Я М О К У Т Н О Ю

В І Д Р І З О

Р І В Н О Б І Ч А Н

П А Р А Л Е Л Ь Н

Р І В Н О Е В Д Р Е А Н Н О О

Т Р А П Е Ц П О

Б Е І Ч Н

П Р И Д Я І Г А Ю Т

Ребуси

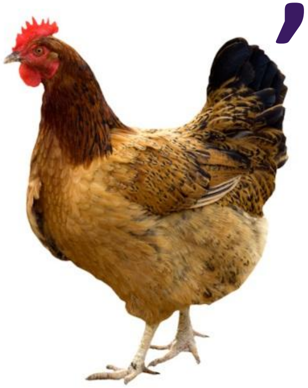
,,,,   ,,   ,

 +  + І Я

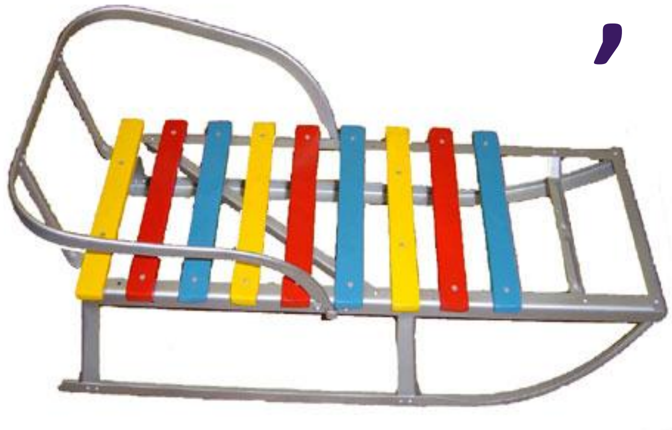
,,,

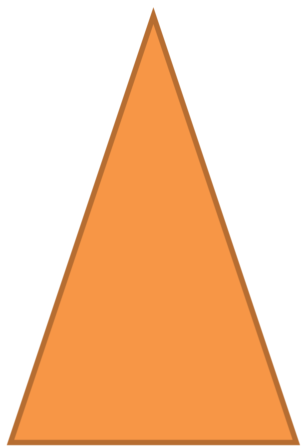
+

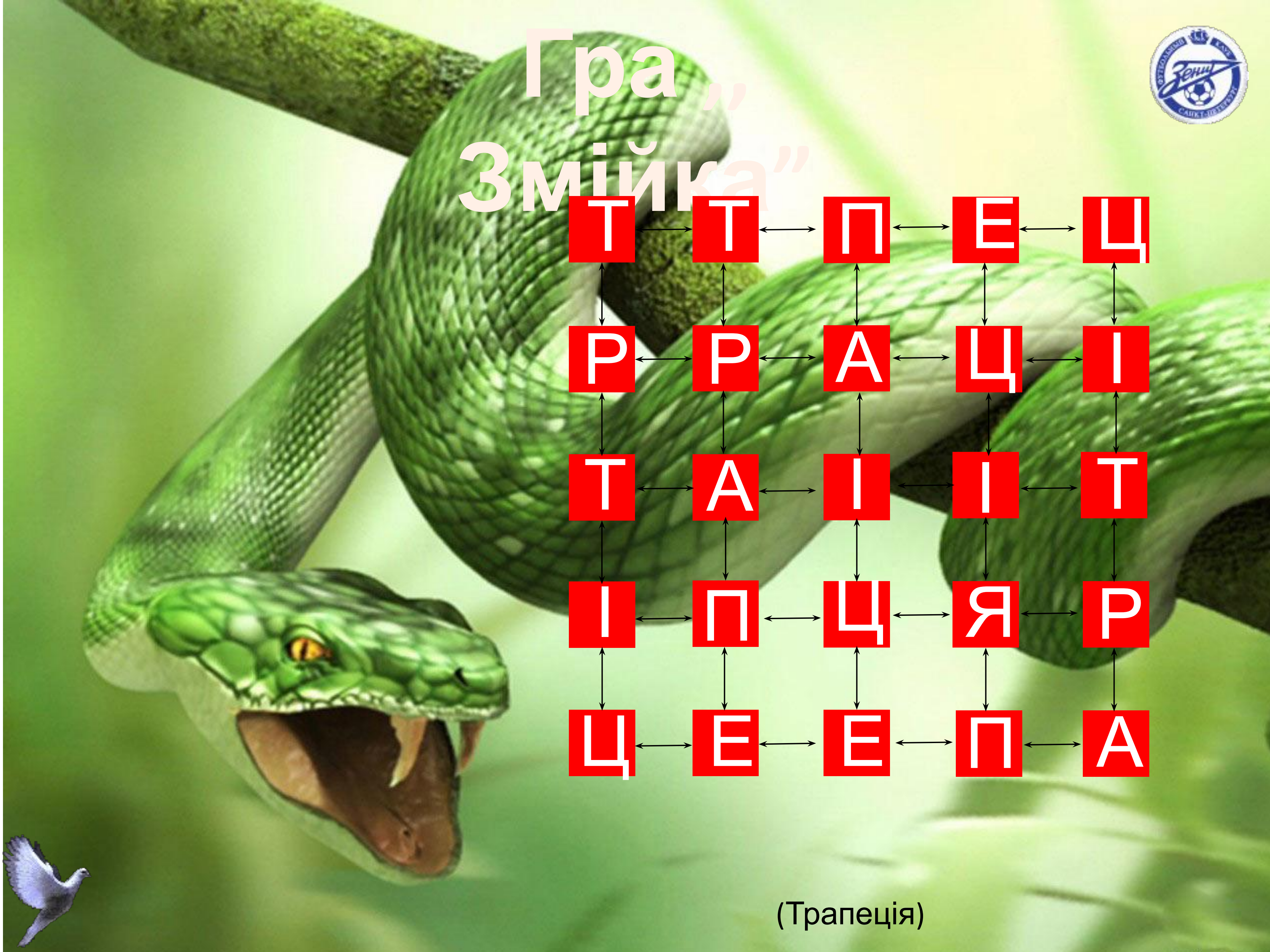

В +  ’’ + ’  ’’ + І

 ’’’ +  ’

,  ,,

\+  , + І

4 +  + И



Гра „Змійка”

Т	Т	П	Е	Ц
Р	Р	А	Ц	І
Т	А	І	І	Т
І	П	Ц	Я	Р
Ц	Е	Е	П	А

(Трапеція)

Над презентаіэю працював

Учень 8-А класу

Мар`їнської ЗОШ І-ІІІ ст. №2

Осолодько Олег