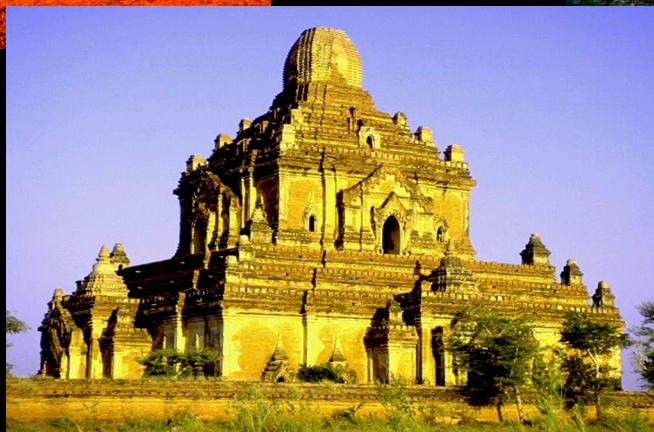


# *Многогранники*

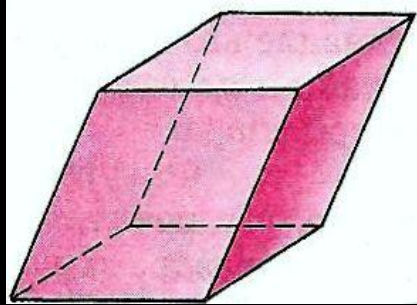
*ОНИ ЕСТЬ В НАШЕМ МИРЕ...*



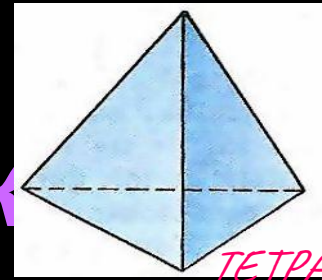
# *Понятие многогранника. Призма*



# Понятие многогранник

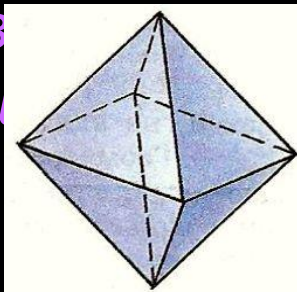


ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



ТЕТРАЭДР

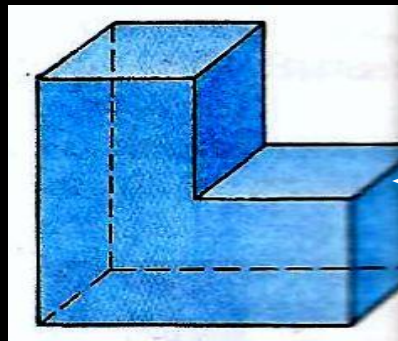
- Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело, будем называть **многогранной поверхностью**.
- **Грани** – многоугольники, из которых составлен многогранник.
- **Рёбра** – стороны граней, а концы рёбер – вершины многогранника.
- **Диагональ** – отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани.



ОКТАЭДР

# Выпуклый или нет

- Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр - выпуклые многогранники.
- В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360.

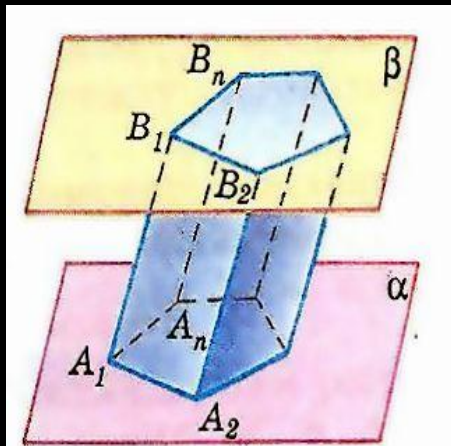


НЕВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК

# Геометрическое тело

- ▣ Геометрическим телом ( или просто телом ) называют ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причём сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его поверхностью и говорят, что поверхность ограничивает тело.

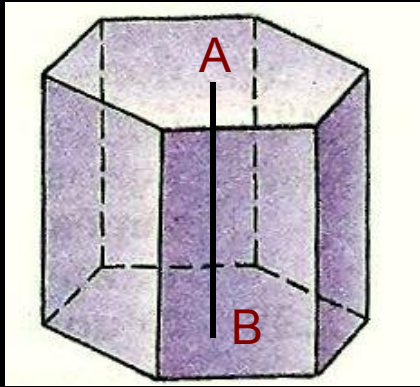
# ПРИЗМА



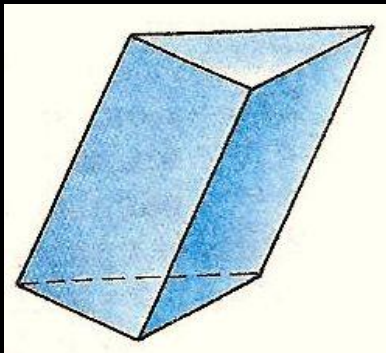
Призма. Многоугольники  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$  — основания призмы. Параллелограммы  $A_1A_2B_2B_1, \dots, A_nA_1B_1B_n$  — боковые грани.

- Многогранник, составленный из двух равных многоугольников  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов, называется **призмой**.
- Основания** — многоугольники  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$ , а параллелограммы  $A_1A_2B_2B_1$  и другие — **боковые грани призмы**.
- Боковые рёбра** — отрезки  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ .

- ▣ **Высота призмы** – перпендикуляр, проведённый из какой–нибудь точки одного основания к плоскости другого.



- ▣ Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае – **наклонной**. Высота прямой призмы равна её боковому ребру.



- ▣ Прямая призма называется **правильной**, если её основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

# Площадь полной поверхности призмы

- ... называется сумма площадей всех её граней.
- **Площадь боковой поверхности призмы** – сумма площадей её боковых граней.
- $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн.}}$
- **ТЕОРЕМА :**

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство [Презентация7.рр](http://Презентация7.рр)



# Виды многогранников

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. На рисунке 3 изображен невыпуклый многогранник, а на рисунке 5 - выпуклый многогранник. Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

**В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше  $360^\circ$ .** Рисунок 4

поясняет это утверждение: многогранник "разрезан" вдоль ребер и все его грани с общей вершиной А развернуты так, что оказались расположенными в одной плоскости  $\alpha$ . Видно, что сумма всех плоских углов при вершине А, т.е. сумма углов 1, 2 и 3 меньше  $360^\circ$ .

Рассмотрим более подробно примеры выпуклых многогранников, а именно: тетраэдр и куб, которые являются представителями двух семейств многогранников, часто встречающихся вокруг нас.



рис. 3

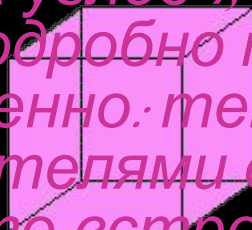


рис. 5



рис. 4

# Правильный тетраэдр

- **Правильный тетраэдр (рис.11) составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна  $180^\circ$ .**

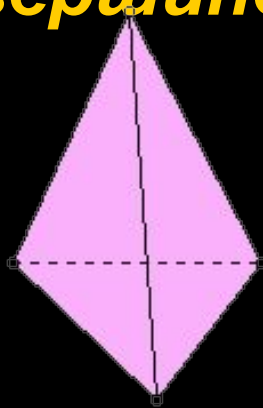


рис. 11

# Правильный октаэдр

Правильный октаэдр (рис.12) составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна  $240^\circ$ .

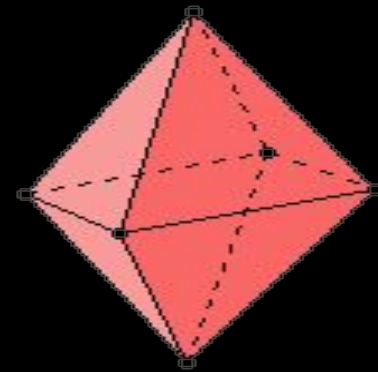


рис. 12

# МНОГОГРАННИКИ

- ▣ *Многогранник называется метрически правильным, если все его грани являются правильными многоугольниками. К ним относятся куб, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр.*



# Характеристики платоновых тел

Многогранник	Число сторон грани	Число граней, сходящихся в каждой вершине	Число граней	Число рёбер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Куб	4	3	6	12	8
Октаэдр	3	4	8	12	6
Икосаэдр	3	5	20	30	12
Додекаэдр	5	3	12	30	20

# Платон



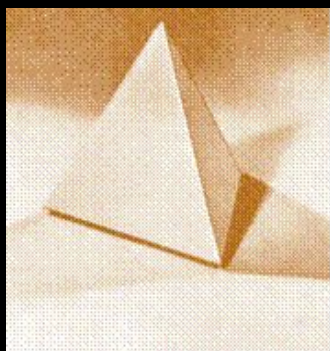
около 429 – 347 гг до н.э.

*Платоновыми телами называются правильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все грани и углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.*

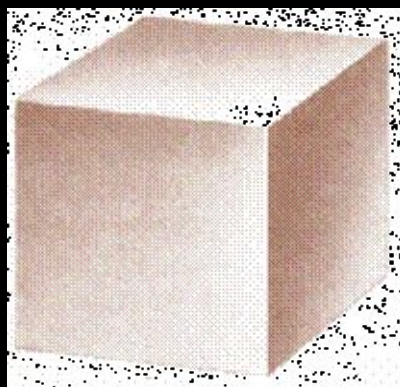
*Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Однако между двумерным и трехмерным случаями есть важное отличие: существует бесконечно много различных правильных многоугольников, но лишь пять различных правильных многогранников.*

*Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида.*

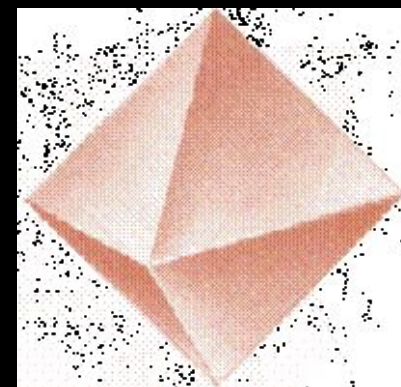
# Платоновы тела



Тетраэдр



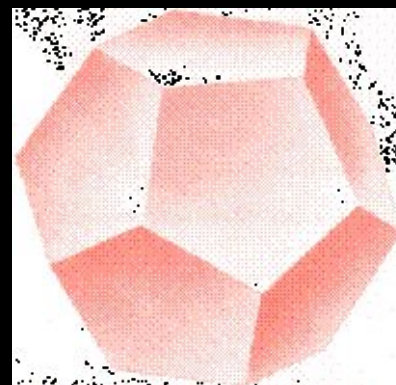
Гексаэдр



Октаэдр



Икосаэдр



Додекаэдр

# «Начала Евклида. «...в науке нет царского пути»



Главный труд Евклида – «Начала» (в оригинале «Стохейа». «Начала» состоят из 13 книг, позднее к ним были прибавлены ещё 2.

Первые шесть книг посвящены планиметрии. Книги VII – X содержат теорию чисел, XI, XII и XIII книги «Начал» посвящены стереометрии.

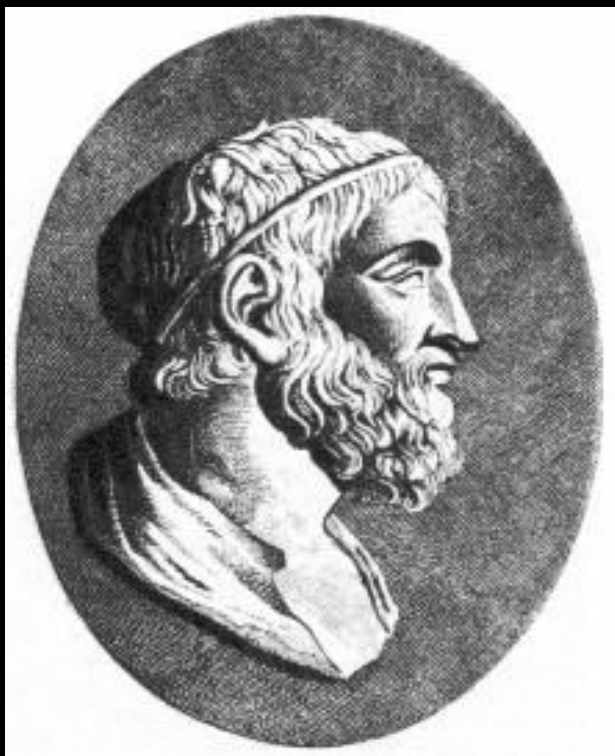
Из постулатов Евклида видно, что он представлял пространство как пустое, безграничное, изотропное и трёхмерное.

Интересно, что «Начала» Евклида открываются описанием построения правильного треугольника и заканчиваются изучением пяти правильных многогранных тел! В наше время они известны как платоновы тела.

около 365 – 300 гг. до н.э.



# Архимед Сиракузский



около 287 – 212 гг. до н.э.

Математик, физик и инженер Архимед Сиракузский оставил после себя немало изобретений, тринадцать сочинений (таких как «О сфере и цилиндре», «Измерение круга», «Равновесие плоскостей», «Стомахийон», «Правильный семиугольник и другие).

Архимед, как геометр определил поверхность шара и его объём, исследовал параболоиды и гиперболоиды, изучал «архимедову спираль», определил число «пи», как находящееся между 3,141 и 3,142.

Вклад Архимеда в теорию многогранников - описание 13 полуправильных выпуклых однородных многогранников (архимедовых тел).

# Архимедовы тела



*Множество архимедовых тел можно разбить на несколько групп.*

*Первую из них составят пять многогранников, которые получаются из платоновых тел в результате их усечения. Так могут быть получены пять архимедовых тел: усечённый тетраэдр, усечённый гексаэдр (куб), усечённый октаэдр, усечённый додекаэдр и усечённый икосаэдр.*

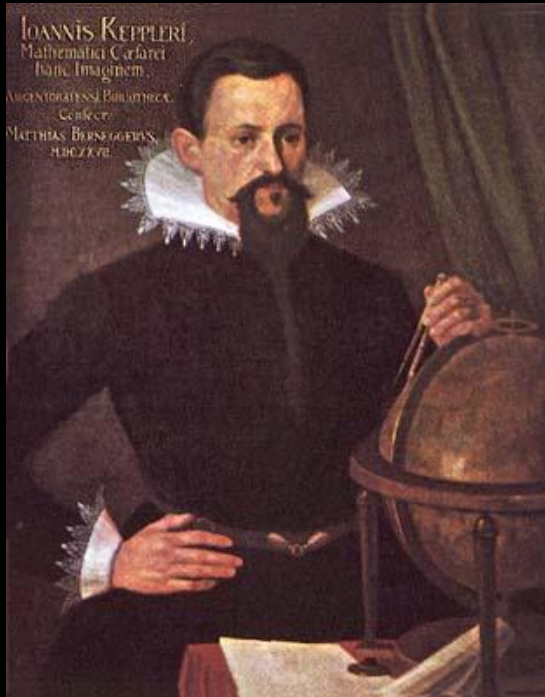
*Другую группу составляют всего два тела, именуемых также квазиправильными многогранниками. Эти два тела носят названия: кубооктаэдр и икосододекаэдр*

*Два последующих многогранника называются ромбокубооктаэдром и ромбоикосододекаэдром. Иногда их называют также «малым ромбокубооктаэдром» и «малым ромбоикосододекаэдром» в отличие от большого ромбокубооктаэдра и большого ромбоикосододекаэдра.*

*Наконец существуют две так называемые «курносые» модификации — одна для куба, другая — для додекаэдра. Для каждой из них характерно несколько повернутое положение граней, что даёт возможность построить два различных варианта одного и того же «курносого» многогранника (каждый из них представляет собой как бы зеркальное отражение другого).*

# Иоганн Кеплер

Немецкий астроном и математик. Один из создателей современной астрономии.



1571 – 1630 гг.

Вклад Кеплера в теорию многогранника - это, во-первых, восстановление математического содержания утерянного трактата Архимеда о полуправильных выпуклых однородных многогранниках.

Еще более существенным было предложение Кеплера рассматривать невыпуклые многогранники со звездчатыми гранями, подобными пентаграмме и последовавшее за этим открытие двух правильных невыпуклых однородных многогранников - малого звездчатого додекаэдра и большого звездчатого додекаэдра.

# Космологическая гипотеза Кеплера

*Весьма оригинальна космологическая гипотеза Кеплера, в которой он попытался связать некоторые свойства Солнечной системы со свойствами правильных многогранников.*



*Кеплер предположил, что расстояния между шестью известными тогда планетами выражаются через размеры пяти правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел). Между каждой парой "небесных сфер", по которым, согласно этой гипотезе, вращаются планеты, Кеплер вписал одно из Платоновых тел.*

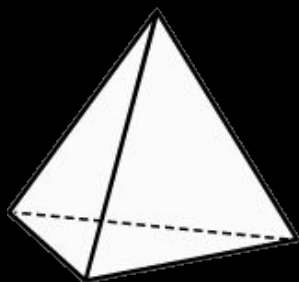
# Космологическая гипотеза Кеплера

*Весьма оригинальна космологическая гипотеза Кеплера, в которой он попытался связать некоторые свойства Солнечной системы со свойствами правильных многогранников.*

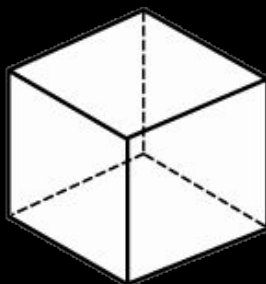


*Кеплер предположил, что расстояния между шестью известными тогда планетами выражаются через размеры пяти правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел). Между каждой парой "небесных сфер", по которым, согласно этой гипотезе, вращаются планеты, Кеплер вписал одно из Платоновых тел.*

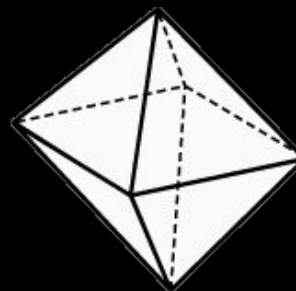
- **Многогранники** – замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Вершины и стороны многогранников являются **вершинами** и **ребрами** многогранников. Они образуют пространственную сетку. Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону плоскости любой из его граней, то многогранник называют **выпуклым**, все его грани – **выпуклые**



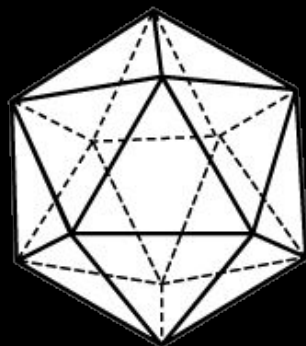
Тетраэдр {3,3}



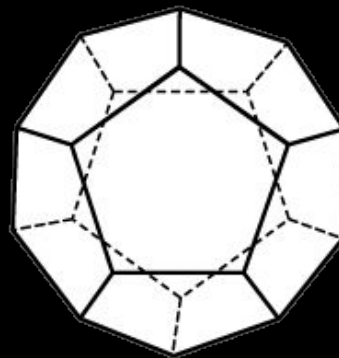
Куб {4,3}



Октаэдр {3,4}



Икосаэдр {3,5}



Додекаэдр {5,3}

# Над проектом работали:

- Жижелева Маша
- Волгина Таня
- Юдина Катя

Учитель: Широкова О.  
В.