Не лякайтесь слова "аркус“ Адже "аркус" – це кут

Боярська ЗОШ І-ІІІ ступенів №1
Києво-Святошинського р-ну
Київської обл.
Вч. Овчинникова (Яськова) О.Й.
м.Боярка

Арксинус і його властивості.

Мета:Усвідомлення поняття арксинуса та його властивостей.

Знати: означення арксинуса *a*, які значення мають *a* і *b* у виразі

arcsin *a* = *b*

Вміти: застосовувати вивчені поняття арксинуса в простих вправах.

І. Актуалізація опорних знань.

Фронтальне опитування.

1. Дати означення зростаючої й спадної функції на проміжку. Як довести, зростає чи спадає дана функція?

2. Як знайти нулі функції?

(Нулі функції знаходимо з умови $f(x) = 0$).

3. Як знайти проміжки знакосталості функції?

а) Проміжки, де функція набуває додатних значень, дістаємо з умови $f(x)>0$.

б) Проміжки, де функція $y= f(x)$ набуває від'ємних значень, дістаємо з умови $f(x)<0$.

4. Дати означення парної і непарної функції. Як розміщені їх графіки?

5. Дати означення періодичної функції з періодом $T \neq 0$. Який найменший додатній період функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса?

Чи може періодична функція зростати на всій числовій прямій? Які функції є періодичними?

6. Дати означення оберненої функції і її властивості.

а) Яка необхідна і достатня умова існування оберненої функції?

Необхідна умова існування оборотної функції така: вона має набувати кожного свого значення лише для одного значення аргументу.

Достатня умова існування оберненої функції для даної функції є її монотонність, тобто зростання або спадання на всій області визначення.

б) Алгоритм знаходження формули для оберненої функції.
в) Цікаво, чи має функція $y = x^2$ обернену функцію на R? Яка умова повинна виконуватись? (Щоб була однозначна).

7. Сформулювати теорему про корінь рівняння, функція якого зростає чи спадає на проміжку I.

Відповідь: Теорема про корінь рівняння, функція якого зростає або спадає на проміжку I формулюється так:

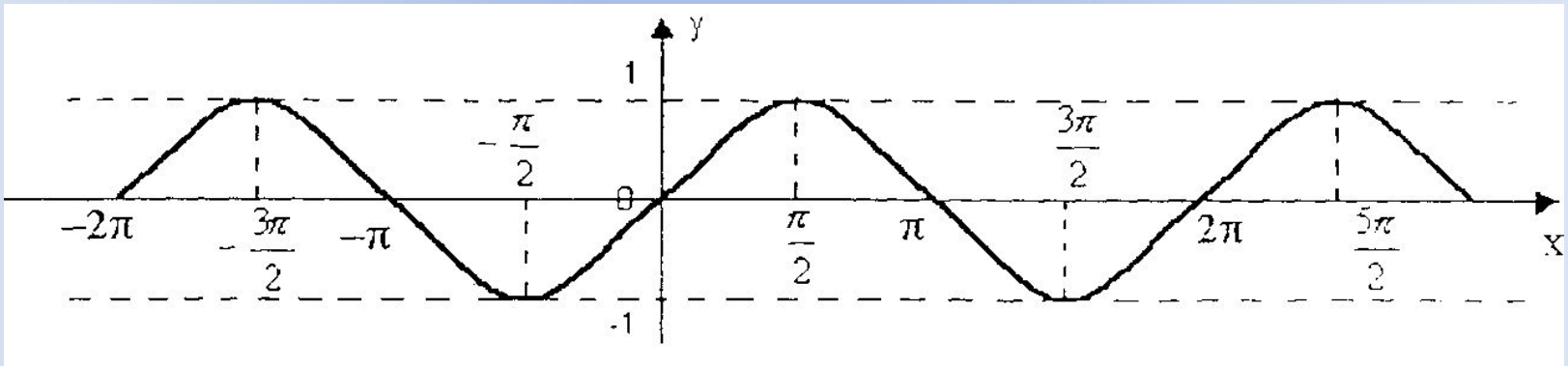
Якщо функція $f(x)$ зростає (або спадає) на проміжку I, а число a – будь-яке із значень, яких набуває функція $f(x)$ на цьому проміжку, тоді рівняння $f(x) = a$ має єдиний корінь на проміжку I.

Ми знаємо, що кожне рівняння є окремим випадком відповідної функції. Наприклад, розв'яжемо рівняння:

$$x^3 + x = 2.$$

Ліва частина рівняння функція $f(x) = x^3 + x$, причому зростаюча на R, бо є сумою двох зростаючих функцій. Тому рівняння $x^3 + x = 2$ має єдиний корінь. Легко бачити, що це $x = 1$.

Графік і властивості функції $y = \sin x$.



1. $D(f) = R$;
2. $E(f) = [-l;l]$;
3. $\sin(-x) = -\sin x$;
4. $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$;
5. $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in z$
6. Зростає на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in z$
7. Спадає на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in z$
8. $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in z$
9. $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$, $n \in z$
10. $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$

    $\sin x = -1$ при $x = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in z$

Опитування по картках.

I уч.1. Властивості і графік функції $y = \sin x$.

2. Схематично побудувати графік функції $y = 2\sin 2x$.

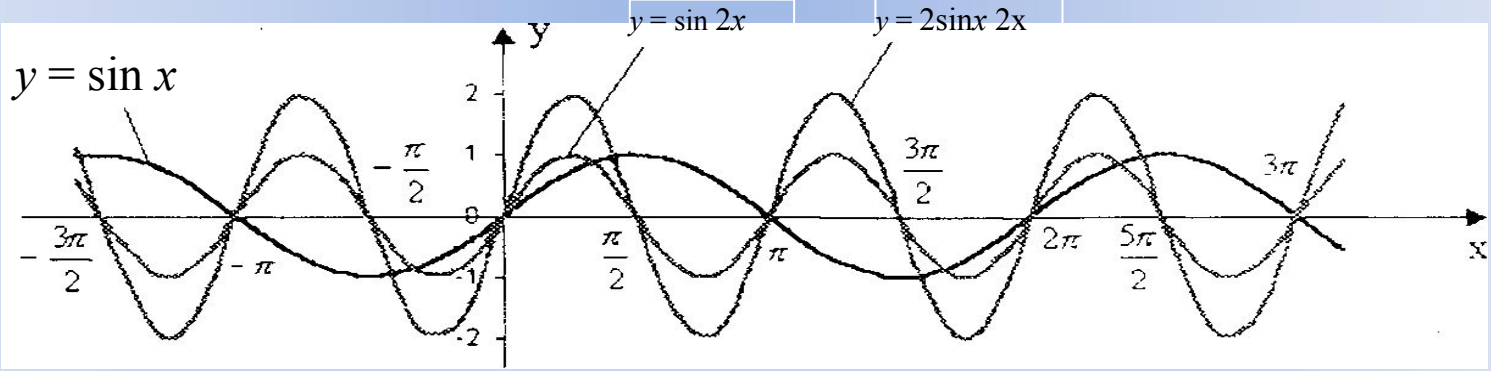
3. Знайти область визначення і область значень функції .

$$y = \sqrt{2\sin 2x}$$

$y = 2\sin 2x$, $T = \pi$.

$$D(y) = \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in z$$

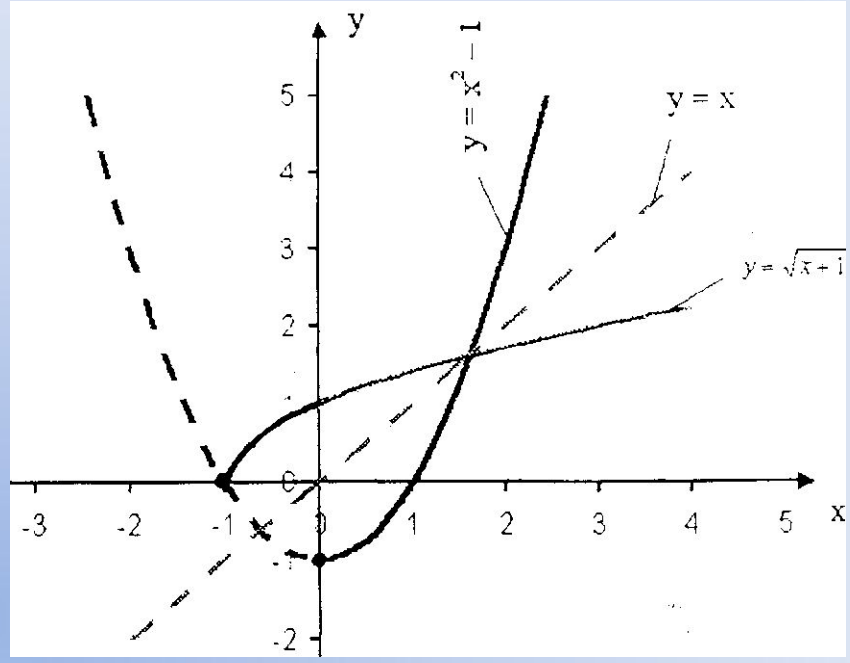
$$E(y) = \left[0; \sqrt{2}\right]$$



II уч. 1. Знайти функцію, обернену до даної $y = x^2 - 1$ на проміжку $x \in [0; +\infty)$ і побудувати її графік. Обернена функція .

а) Як розміщені графіки?

б) Як змінюються області визначення і значень?



Дана функція $f(x) = x^2 - 1$, обернена .

D(f) = [0; +∞);D(g) = [-1; +∞); D(f) = E(g), D(g) = E(f).

E(f) = [-l;+∞); E(g) = [0; +∞).

2. Яка необхідна і достатня умова існування оберненої функції?

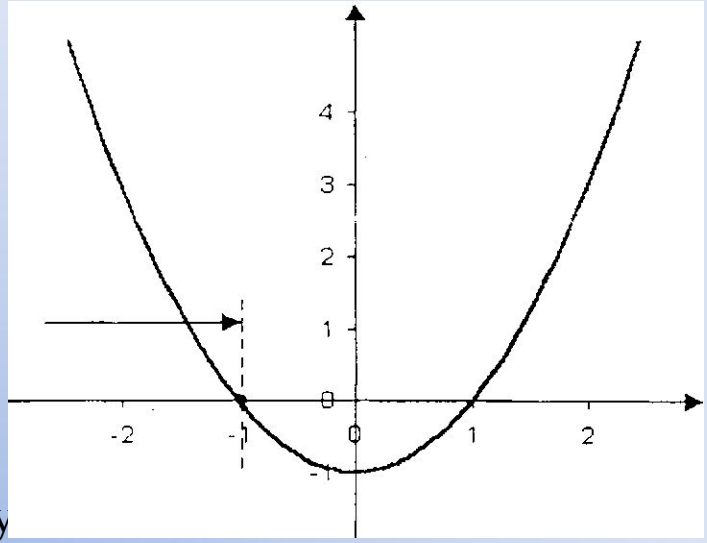
3. Знайти область визначення і область значень функції $y = \sqrt{3\cos 2x}$

Відп. $D(y) = \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in z$

$E(y) = \left[0; \sqrt{3}\right)$

III уч. 1. Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, \text{якщо } x\ge -1 \\ 1, \text{якщо } x<-1 \end{cases}$$



а) Зобразити схематично її графік.
б) Обчислити $f(-5)$, $F(-1)$, $f(0)$, $f(4)$.
в) Вказати проміжки зростання і спадання.
г) На яких проміжках вона має обернену і чому

2. Які з функцій $y = x^2$, $y = x^3$ оборотні? Чому?

3. Яка функція називається періодичною?

IV уч. 1. Сформулювати теорему про корінь рівняння, функція якого зростає або спадає на проміжку *I*. Навести приклад. (Див. вище!).

2. Яка функція називається зростаючою? Спадною?

3. Знайти найменший додатній період функції: $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

Відп. $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=1+\sin x$; $T = 2\pi$.

II. Мотивація навчання.

Ми з вами навчилися розв'язувати лінійні рівняння, квадратні рівняння, біквадратні рівняння. Щоб розв'язати, наприклад, квадратне рівняння, треба знати формулу його коренів.

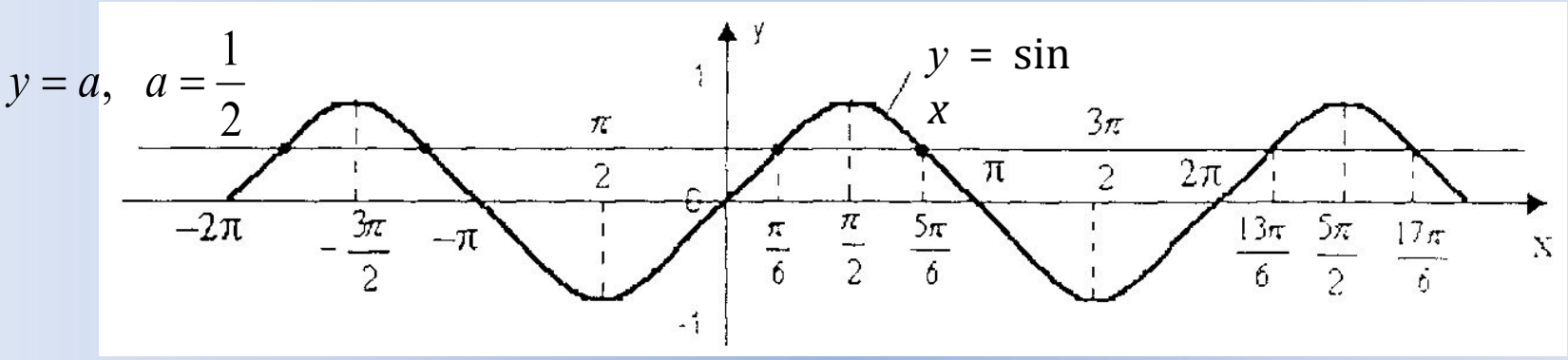
Ми знаємо, що кожне рівняння є окремим випадком відповідної функції. Наприклад, $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$ – загальний вид квадратного рівняння, а $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$ – квадратична функція.

Ми з вами познайомилися з тригонометричними функціями: $y = \sin x$,

$y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, а отже повинні навчитися розв'язувати прості тригонометричні рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Нехай дано рівняння $\sin x = a$, де $|a| \leq 1$

Візьмемо $a = \frac{1}{2}$, тобто рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ (див. малюнок нижче). По графіку ми бачимо, що існує безліч значень *x*, які відрізняються на число 2π і задовольняють рівняння. Це числа $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \ldots$



Як же записати формулу коренів цього рівняння?

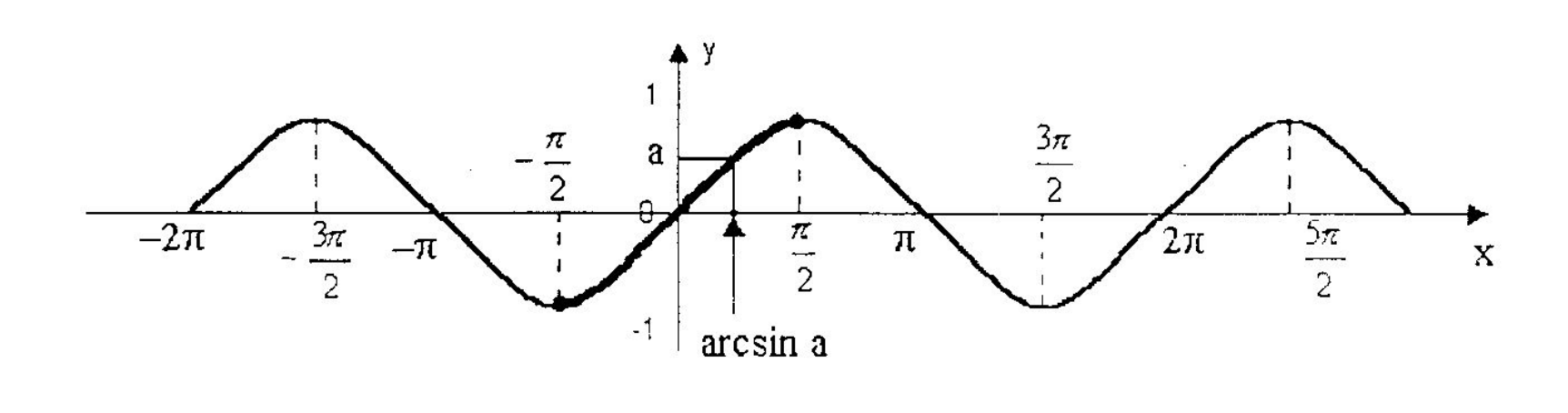
Щоб дати відповідь на такі запитання, треба засвоїти нові поняття, яким і присвячується цей і наступний уроки.

III. Сприймання й усвідомлення поняття арксинуса.

І так, тема сьогоднішнього уроку:

<u>Арксинус і його властивості.</u>

Застосуємо раніше вивчену теорему про єдиність кореня рівняння $f(x) = a$, функція якого зростає (або спадає) на проміжку I, до рівняння $\sin x = a$.



Бачимо з графіка, що функція $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно зростає і набуває на ньому всіх своїх значень від -1 до 1. А тому згідно з теоремою про корінь рівняння для будь-якого числа a, такого що $-1 \le a \le 1$ в проміжку існує єдиний корінь b рівняння $\sin x = a$. Цей корінь – число b (кут або дуга) і назвали арксинусом числа a і позначили $\arcsin a$. Отже, $\arcsin a = b$, де

$$\begin{cases} -1 \le a \le 1 - \textit{число} \\ -\frac{\pi}{2} \le b \le \frac{\pi}{2} - \textit{це головний кут} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -1 \le a \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Отже, ($\arcsin a$) арксинусом числа а називається кут (число), заключений у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a. $\sin(\arcsin a) = a$

Тобто $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, бо $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Отже, ще раз підкреслимо: з означення арксинуса випливає, що $-1 \le a \le 1$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$$

IV. Розв'язування вправ на закріплення.

1.Розглянемо $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ – це такий кут з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

що його синус дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Відомо, що це $\frac{\pi}{3}$ звідси $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ бо $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2.

Обчислити:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, бо $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, бо $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

в) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, бо $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

г) arsin 1,5 – не має змісту, бо $1{,}5\notin[-1;1]$

д) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ е) $tg\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1$ є) $\cos(\arcsin 1)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

ж) $\arcsin\frac{5}{3}$ – не має змісту, бо $\frac{5}{3}\notin[-1;1]$

Запам'ятати:

1) $\arcsin 0 = 0$; 2) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

5) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; 6) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Властивості арксинуса *a*:

1) $-1 \le a \le 1$; 3) arcsin(- a) = -arcsin a,

2) $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$; 4) Значення $\arcsin \uparrow з \uparrow a$.

Самостійна робота.

Обчислити:

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$; 1) ; $\arcsin 0{,}5=\frac{\pi}{6}$

2) arcsin 2,5 – не має змісту; 2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$;

3) arcsin 0 = 0, 3) arcsin 1,5 – не має змісту;

4) $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$; 4) ; $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

5) cos(arcsin 1) = 0; 5) tg(arcsin 0) = 0;

6) $ctg\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$; 6) , $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) . $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Перейдемо тепер від рівняння sin$x$=a до функції. Кожне рівняння є окремий випадок відповідної функції. Отже, і рівняння sin$x$ = a, де y = sin x –функція, а a – окреме число, причому обмежене $|a| < 1$, бо . $|\sin x \le 1|$

Чи має вона до себе обернену?

З графіка видно, що функція y = sin x на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ монотонно зростає від -1 до 1 і приймає всі значення, що належать цьому проміжку, причому кожне із значень по одному разу, тобто множина значень $y \in [-1;1]$ і взаємно однозначно відображаються $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ одна на одну.

А якщо функція $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ зростає і неперервна, то вона має обернену функцію, зростаючу і неперервну. Цю функцію назвали арксинусом і позначили $y = \arcsin x$.

Згідно означення оберненої функції, її область визначення є відрізок [-1; 1], а множиною значень відрізок $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$D(\arcsin) = [-1;1] \qquad E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Графік функції y = arcsin x, де $x \in$ [-1; 1] симетричний графіку $y = \sin x$, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ відносно бісектриси y = x.

Властивості функцій:

y = arcsin *x* **y = sin *x***

1) $D(y) = [-1;1]$; 1) ; $D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $E(y) = [-1;1]$;

3) Непарна, бо $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; 3) Непарна: $\sin(-x) = -\sin x$;

4) Зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ 4) Зростає від -1 до 1;

5) $\arcsin 0 = 0$; 5) $\sin 0 = 0$.

Д/з: §3(п.1,2), №№ 121", 124°, 134(а, б), 113(а, б).

Для сильніших: побудувати графік оберненої функції $y = \arcsin x$, і описати її властивості.