

# Индивидуальное задание по математической логике

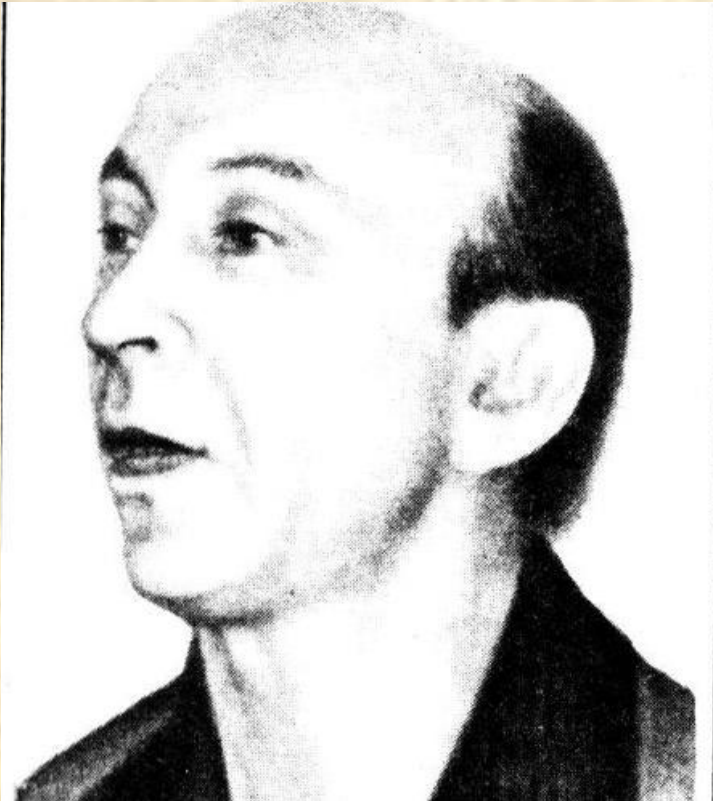
Выполнили: студенты 3 курса  
математического фак-та  
гр. 8116  
Голощапова Виктория  
Ганенко Денис

# **Четкие шаги нечеткой логики**

# План:

- Немного истории;
- Нечеткая логика;
- Нечеткие подмножества;
- Операции над нечеткими подмножествами;
- Свойства множества нечетких подмножеств;
- Нечеткая логика высказываний;
- Нечеткие релейно-контактные схемы;
- Математический аппарат;
- Не четкий логический вывод.

# Основатель теории



Американский ученый

**Лотфи Заде**

(Lotfi Zadeh)

# Последователь и ученик Л. Заде

## **Барт Коско**

(Bart Kosko)



В своей знаменитой теореме FAT («Fuzzy Approximation Theorem») доказал, что любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на «нечеткой логике».

# Революция

- Японское правительство финансировало 5-летнюю программу по «нечеткой логике».
- Первый же год использования новой системы принес банку \$770 000 в месяц только объявленной прибыли.
- «Motorola», «General Electric», «Otis Elevator», «Pacific Gas & Electric», «Ford» и другие в начале 90-х начали инвестировать программы дальнейших разработок в этом направлении.

**Нечеткая логика отличается от двузначной классической логики тем, что допускает континуальное число истинностных значений для высказываний. В простейшем случае эти значения принадлежат отрезку  $[0,1]$  действительных чисел.**

# Нечеткие подмножества

Нечеткое подмножество  $\tilde{A}$  множества  $E$  – это множество пар вида:

$$\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in E\},$$

Где  $\mu_{\tilde{A}} : E \rightarrow M$  - функция.

Множество  $M$  называется множеством принадлежности, а функция

$\mu_{\tilde{A}}$  функцией принадлежности.

Пара  $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ , интерпретируется как элемент  $x \in E$

который принадлежит подмножеству

$\tilde{A}$  со степенью  $\mu_{\tilde{A}}(x)$



# Операции над нечеткими множествами:

# Объединение:

Объединение нечетких множеств  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ -  
это нечеткое множество

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

для которого

$$\mu_{\tilde{C}} = \max \{ \mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}} \}$$

# Пересечение:

Аналогично имеем пересечение  $\tilde{C}$   
нечетких множеств  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  ,

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$$

если по определению

$$\mu_{\tilde{C}} = \min \{ \mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}} \}$$

# Дополнение:

Нечеткое множество  $\tilde{A}$  есть дополнение для  $\tilde{B}$ , т.е.

если 
$$\tilde{B} = \tilde{\tilde{A}}$$

$$\mu_{\tilde{B}} = 1 - \mu_{\tilde{A}}$$

# Включение:

Если даны нечеткие множества  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  ,  
то пишем  $\tilde{A} \subset \tilde{B}$  тогда и только тогда,  
когда

$$\forall x \in E(\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

# Свойства множества нечетких

## ПОДМНОЖЕСТВ:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$$

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$$

$$\tilde{A} \cup E = E$$

$$\tilde{A} \cap E = \tilde{A}$$

$$\tilde{A} \cup \emptyset = \tilde{A}$$

$$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A}$$

$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}$$

$$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}$$

Однако

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq \emptyset \text{ (кроме } A = \emptyset \text{ или } A = E)$$

$$\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq E \text{ (кроме } A = \emptyset \text{ или } A = E)$$

которые для обычных множеств имеют вид

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} = \emptyset$$

$$\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = E$$

и справедливы.

# Нечеткая логика высказываний

Нечеткие пропозициональные  
переменные  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \dots$  - это

$$\tilde{a} = \mu_{\tilde{A}}(x), \tilde{b} = \mu_{\tilde{B}}(x), \tilde{c} = \mu_{\tilde{C}}(x), \dots$$

Полагаем, что

$$0 = \mu_{\emptyset}(x) \equiv 0 \text{ и } 1 = \mu_E(x) \equiv 1$$



# Нечеткие логические операции

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \max(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$\neg \tilde{a} = 1 - \tilde{a}$$

# Введем понятие нечеткой формулы:

- 1) нечеткая пропозициональная переменная есть (атомарная) нечеткая формула;
- 2) если  $A$  и  $B$  нечеткие формулы, то  $A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B$  нечеткие формулы;
- 3) если  $A$  - нечеткая формула, то  $\neg A$  – нечеткая формула.

# Свойства нечетких логических операций:

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} \equiv \tilde{b} \wedge \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} \equiv \tilde{b} \vee \tilde{a}$$

$$(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \wedge \tilde{c} \equiv \tilde{a} \wedge (\tilde{b} \wedge \tilde{c})$$

$$(\tilde{a} \vee \tilde{b}) \vee \tilde{c} \equiv \tilde{a} \vee (\tilde{b} \vee \tilde{c})$$

$$\tilde{a} \wedge (\tilde{b} \vee \tilde{c}) \equiv (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{c})$$

$$\tilde{a} \vee (\tilde{b} \wedge \tilde{c}) \equiv (\tilde{a} \vee \tilde{b}) \wedge (\tilde{a} \vee \tilde{c})$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{a} \equiv \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{a} \equiv \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \wedge 1 \equiv \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \vee 1 \equiv 1$$

$$\tilde{a} \vee 0 \equiv \tilde{a}$$

$$\neg\neg\tilde{a} \equiv \tilde{a}$$

$$\neg(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \equiv \neg\tilde{b} \wedge \neg\tilde{a}$$

$$\neg(\tilde{a} \vee \tilde{b}) \equiv \neg\tilde{b} \vee \neg\tilde{a}$$

Однако

$$\tilde{a} \wedge \neg \tilde{a} \neq 0 \text{ (кроме } \tilde{a} = 0 \text{ или } \tilde{a} = 1)$$

$$\tilde{a} \vee \neg \tilde{a} \neq 1 \text{ (кроме } \tilde{a} = 0 \text{ или } \tilde{a} = 1)$$

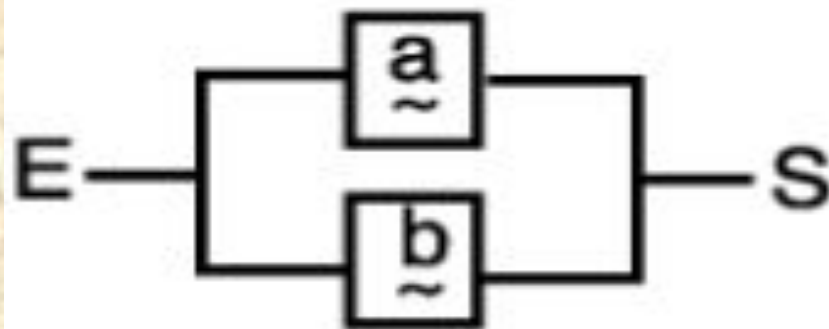
Таким образом, нечеткая логика не является классической.

# Нечеткие релейно-контактные СХЕМЫ



$$f(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \ \& \ \underline{b}$$

a)



$$f(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a} \ \vee \ \underline{b}$$

b)

**Наиболее  
распространенные типовые  
формы кривых для задания  
функций принадлежности:  
треугольная,  
трапецеидальная и  
гауссова.**

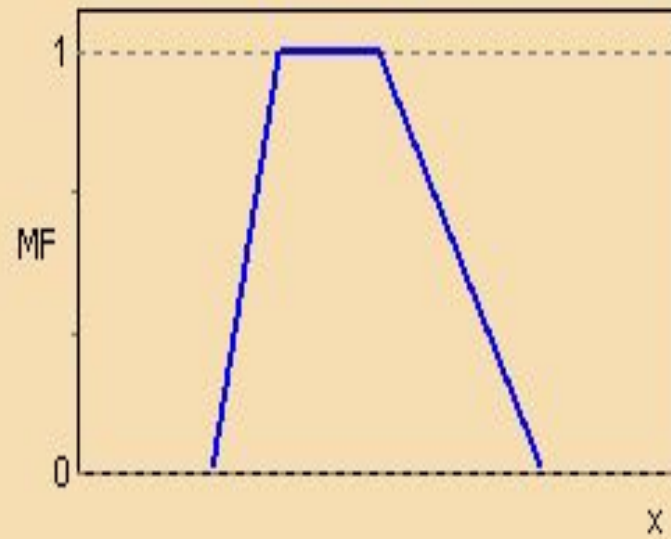
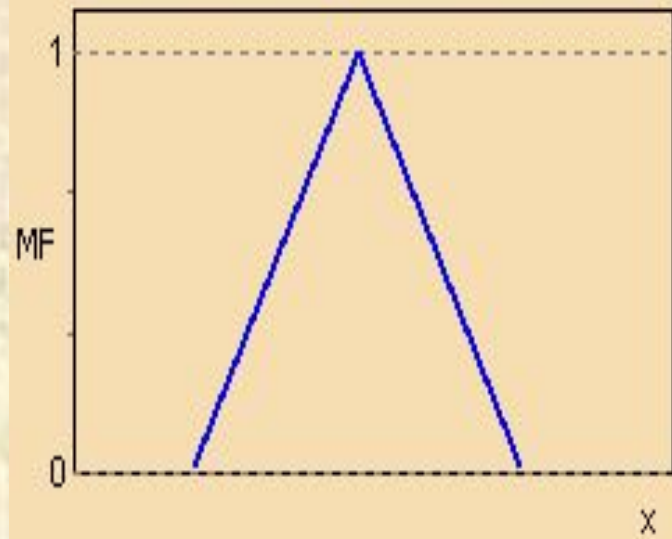
Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел  $(a, b, c)$ , и ее значение в точке  $x$  вычисляется согласно выражению:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-c}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для задания трапецеидальной функции принадлежности необходима четверка чисел (a,b,c,d):

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

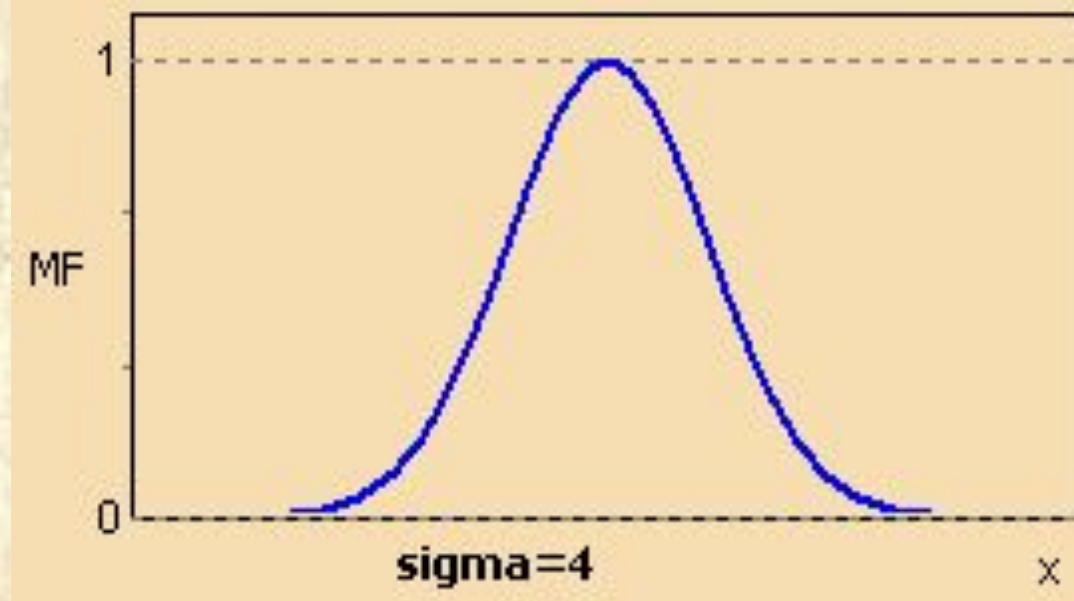




**Типовые кусочно-линейные функции принадлежности.**

Функция принадлежности  
гауссова типа описывается  
формулой

$$MF(x) = \exp \left[ - \left( \frac{x - c}{\sigma} \right)^2 \right]$$



Гауссова функция принадлежности.



Описание лингвистической переменной  
"Цена акции".

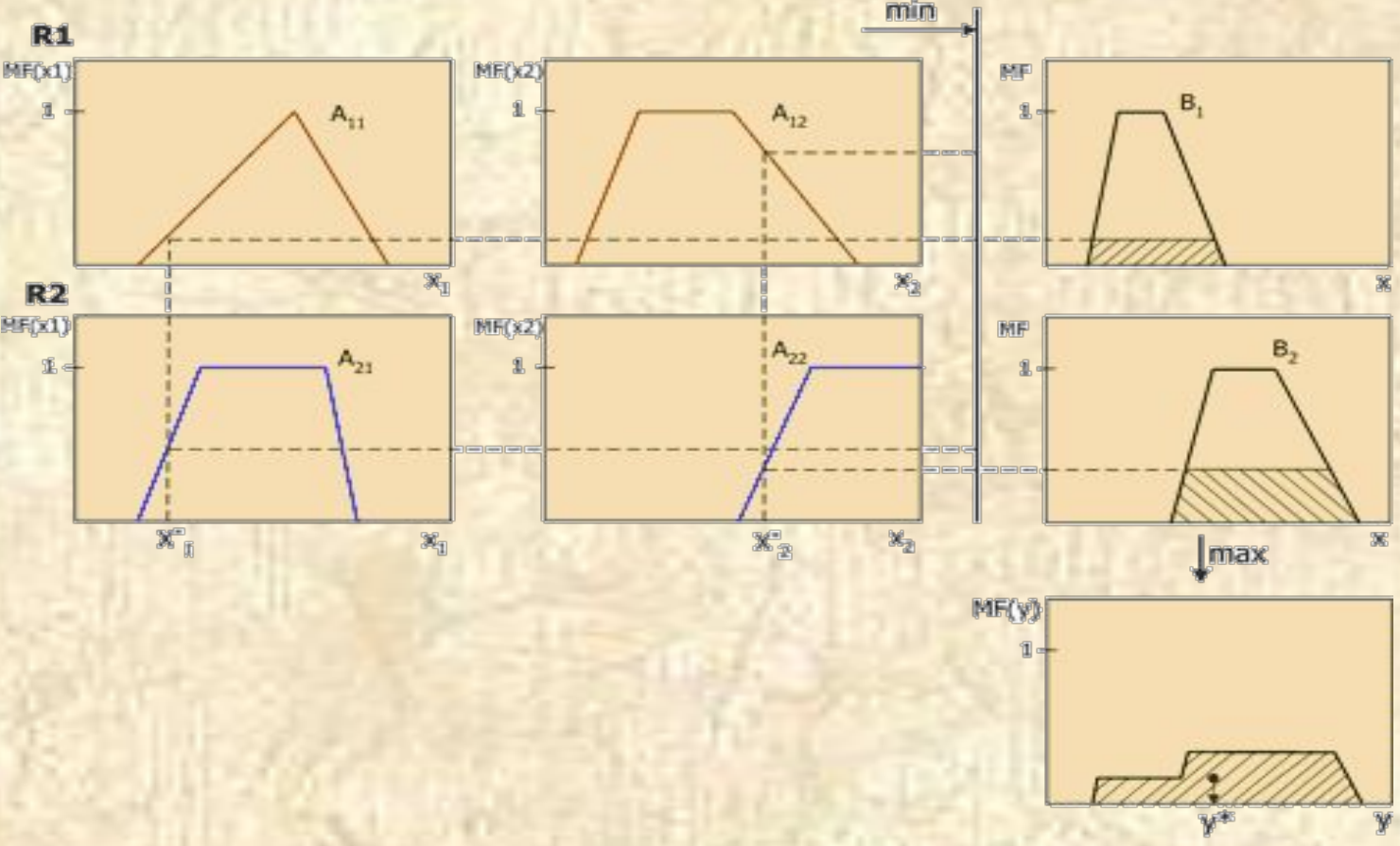


Описание лингвистической переменной  
"Возраст".

# Система нечеткого логического вывода.



# Процесс нечеткого вывода по Мамдани для двух входных переменных и двух нечетких правил R1 и R2.



# Литература:

- Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
- Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002.
- Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003.
- Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
- Масалович А. Нечеткая логика в бизнесе и финансах.  
[www.tora-centre.ru/library/fuzzy/fuzzy-.htm](http://www.tora-centre.ru/library/fuzzy/fuzzy-.htm)
- Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11, November 1994. – P. 1329-1333.
- Cordon O., Herrera F., A General study on genetic fuzzy systems // Genetic Algorithms in engineering and computer science, 1995. – P. 33-57.
- А.К.Гуц. Математическая логика и теория алгоритмов. – Омск, 2003