Индивидуальное задание по математической логике

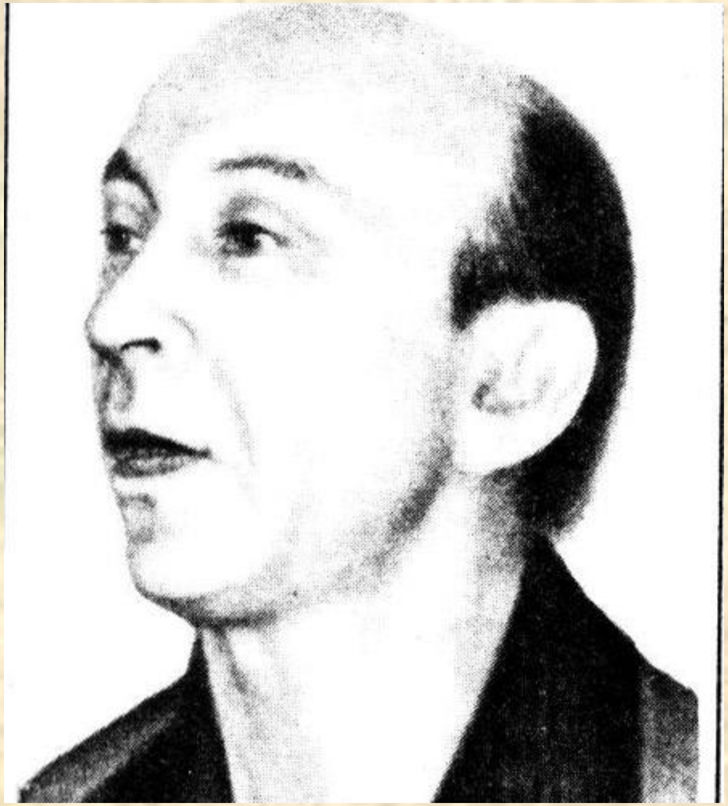
Выполнили: студенты 3 курса
математического фак-та
гр. 8116
Голощапова Виктория
Ганенко Денис

Четкие шаги нечеткой логики

План:

- Немного истории;
- Нечеткая логика;
- Нечеткие подмножества;
- Операции над нечеткими подмножествами;
- Свойства множества нечетких подмножеств;
- Нечеткая логика высказываний;
- Нечеткие релейно-контактные схемы;
- Математический аппарат;
- Не четкий логический вывод.

Основатель теории



Американский ученый

Лотфи Заде

(Lotfi Zadeh)

Последователь и ученик Л. Заде

Барт Коско

(Bart Kosko)

В своей знаменитой теореме FAT («Fuzzy Approximation Theorem») доказал, что любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на «нечеткой логике».

Революция

- Японское правительство финансировало 5-летнюю программу по «нечеткой логике».
- Первый же год использования новой системы принес банку $770 000 в месяц только объявленной прибыли.
- «Motorola», «General Electric», «Otis Elevator», «Pacific Gas & Electric», «Ford» и другие в начале 90-х начали инвестировать программы дальнейших разработок в этом направлении.

Нечеткая логика отличается от двузначной классической логики тем, что допускает континуальное число истинностных значений для высказываний. В простейшем случае эти значения принадлежат отрезку [0,1] действительных чисел.

Нечеткие подмножества

Нечеткое подмножество $\tilde{A}$ множества E – это множество пар вида:

$$\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in E\},$$

Где $\mu_{\tilde{A}} : E \to M$ - функция.

Множество M называется множеством принадлежности, а функция $\mu_{\tilde{A}}$ - функцией принадлежности.

Пара $\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right)$, интерпретируется как элемент $x \in E$

который принадлежит подмножеству $\tilde{A}$ со степенью $\mu_{\tilde{A}}(x)$

Операции над нечеткими множествами:

Объединение:

Объединение нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$- это нечеткое множество

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

для которого

$$\mu_{\tilde{C}} = \max\{\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}\}$$

Пересечение:

Аналогично имеем пересечение $\widetilde{C}$ нечетких множеств $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$,

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$$

если по определению

$$\mu_{\widetilde{C}} = \min\{\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}}\}$$

Дополнение:

Нечеткое множество $\tilde{A}$ есть дополнение для $\tilde{B}$,т.е.

$$\tilde{B} = \overline{\tilde{A}}$$

если

$$\mu_{\tilde{B}} = 1 - \mu_{\tilde{A}}$$

Включение:

Если даны нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, то пишем $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in E\left(\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)\right).$$

Свойства множества нечетких подмножеств:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$$
$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$$
$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$$
$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$
$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$$
$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cup E = E$$
$$\tilde{A} \cap E = \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cup \varnothing = \tilde{A}$$
$$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A}$$
$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}$$
$$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}$$

Однако

$$\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{A}} \neq \varnothing (кроме A = \varnothing или A = E)$$

$$\widetilde{A} \cup \overline{\widetilde{A}} \neq E (кроме A = \varnothing или A = E)$$

которые для обычных множеств имеют вид

$$\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{A}} = \varnothing$$

$$\widetilde{A} \cup \overline{\widetilde{A}} = E$$

и справедливы.

Нечеткая логика высказываний

Нечеткие пропозициональные переменные $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, ...$ - это

$$\widetilde{a} = \mu_{\widetilde{A}}(x), \widetilde{b} = \mu_{\widetilde{B}}(x), \widetilde{c} = \mu_{\widetilde{C}}(x), ...$$

Полагаем, что

$$0 = \mu_{\varnothing}(x) \equiv 0 u 1 = \mu_{E}(x) \equiv 1$$

Нечеткие логические операции

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \max(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$\neg \tilde{a} = 1 - \tilde{a}$$

Введем понятие нечеткой формулы:

1)нечеткая пропозициональная переменная есть (атомарная) нечеткая формула;

2)если А и В нечеткие формулы, то

$A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B$ нечеткие формулы;

3)если А - нечеткая формула, то ¬А – нечеткая формула.

Свойства нечетких логических операций:

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} \equiv \tilde{b} \wedge \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} \equiv \tilde{b} \vee \tilde{a}$$

$$(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \wedge \tilde{c} \equiv \tilde{a} \wedge (\tilde{b} \wedge \tilde{c})$$

$$(\tilde{a} \vee \tilde{b}) \vee \tilde{c} \equiv \tilde{a} \vee (\tilde{b} \vee \tilde{c})$$

$$\tilde{a} \wedge (\tilde{b} \vee \tilde{c}) \equiv (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{c})$$

$$\tilde{a} \vee (\tilde{b} \wedge \tilde{c}) \equiv (\tilde{a} \vee \tilde{b}) \wedge (\tilde{a} \vee \tilde{c})$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{a} \equiv \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{a} \equiv \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \wedge 1 \equiv \tilde{a}$$

$$\tilde{a} \vee 1 \equiv 1$$

$$\tilde{a} \vee 0 \equiv \tilde{a}$$

$$\neg\neg\tilde{a} \equiv \tilde{a}$$

$$\neg(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \equiv \neg\tilde{b} \wedge \neg\tilde{a}$$

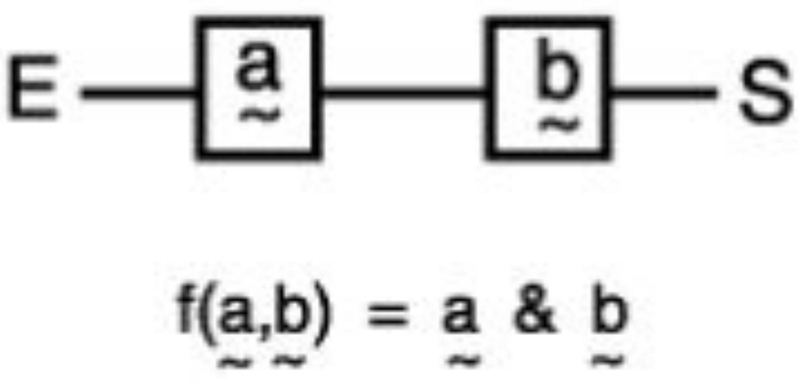
$$\neg(\tilde{a} \vee \tilde{b}) \equiv \neg\tilde{b} \vee \neg\tilde{a}$$

Однако

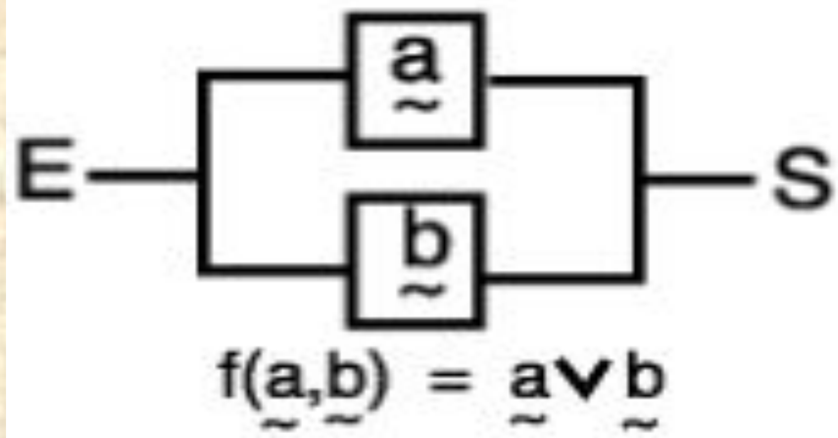
$$\widetilde{a} \wedge \neg\widetilde{a} \neq 0 (\textit{кроме} \, \widetilde{a} = 0 \, \textit{или} \, \widetilde{a} = 1)$$
$$\widetilde{a} \vee \neg\widetilde{a} \neq 1 (\textit{кроме} \, \widetilde{a} = 0 \, \textit{или} \, \widetilde{a} = 1)$$

Таким образом, нечеткая логика не является классической.

Нечеткие релейно-контактные схемы



a)



b)

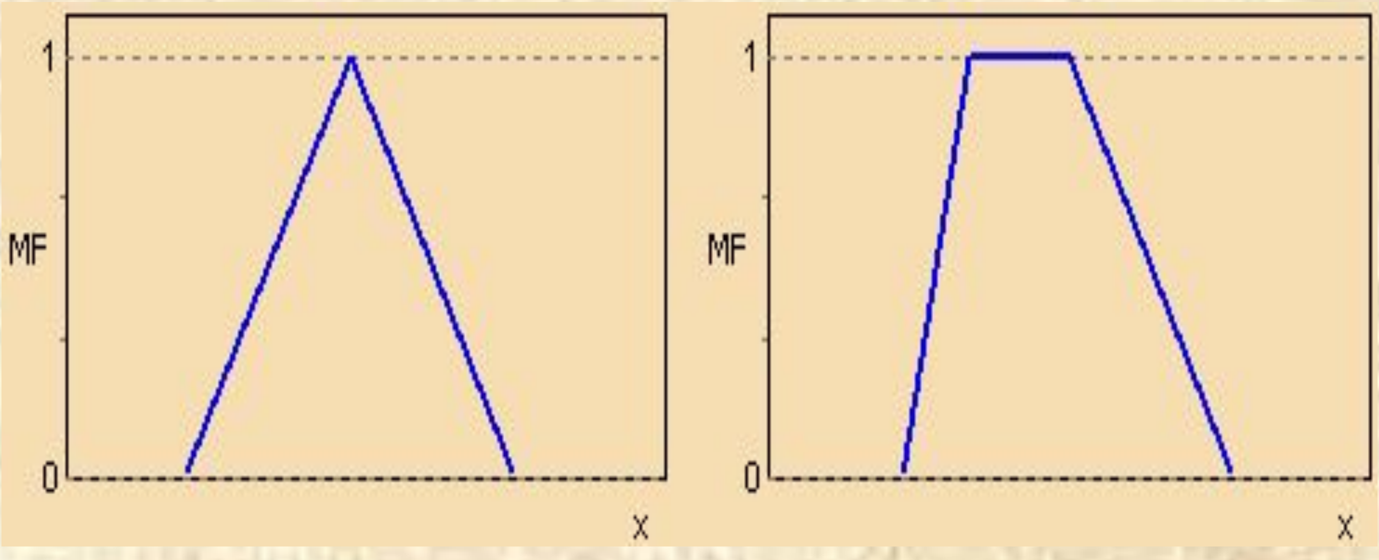
Наиболее распространенные типовые формы кривых для задания функций принадлежности: треугольная, трапецеидальная и гауссова.

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел (a,b,c), и ее значение в точке x вычисляется согласно выражению:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{x-c}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для задания трапецеидальной функции принадлежности необходима четверка чисел (a,b,c,d):

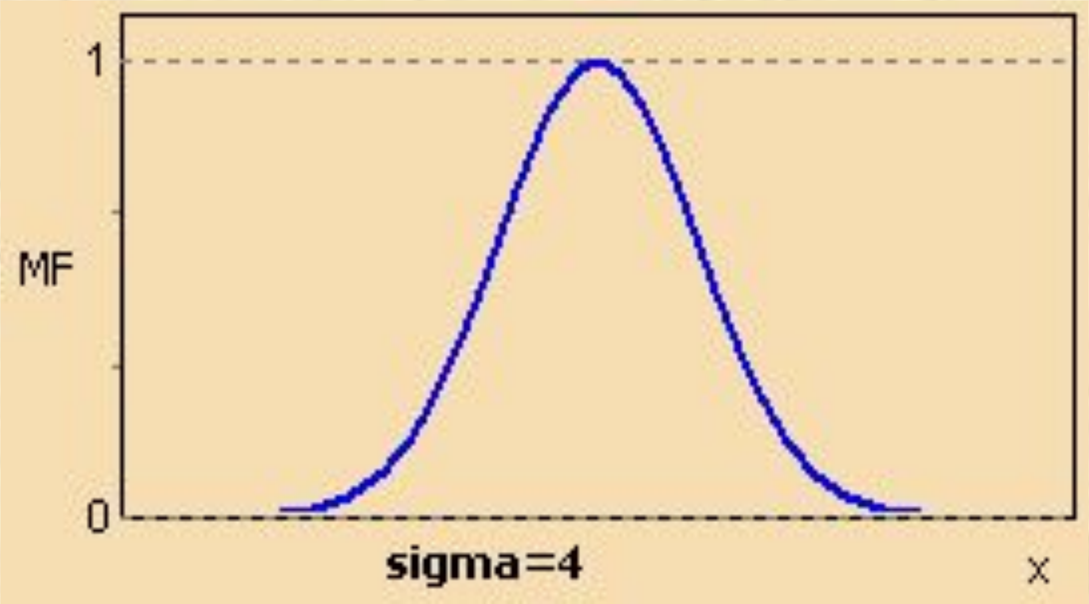
$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1,\ b\le x\le c & \\ 1-\dfrac{x-c}{d-c}, & c\le x\le d\\ 0,\ \text{в остальных случаях.} & \end{cases}$$



Типовые кусочно-линейные функции принадлежности.

Функция принадлежности гауссова типа описывается формулой

$$MF(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$



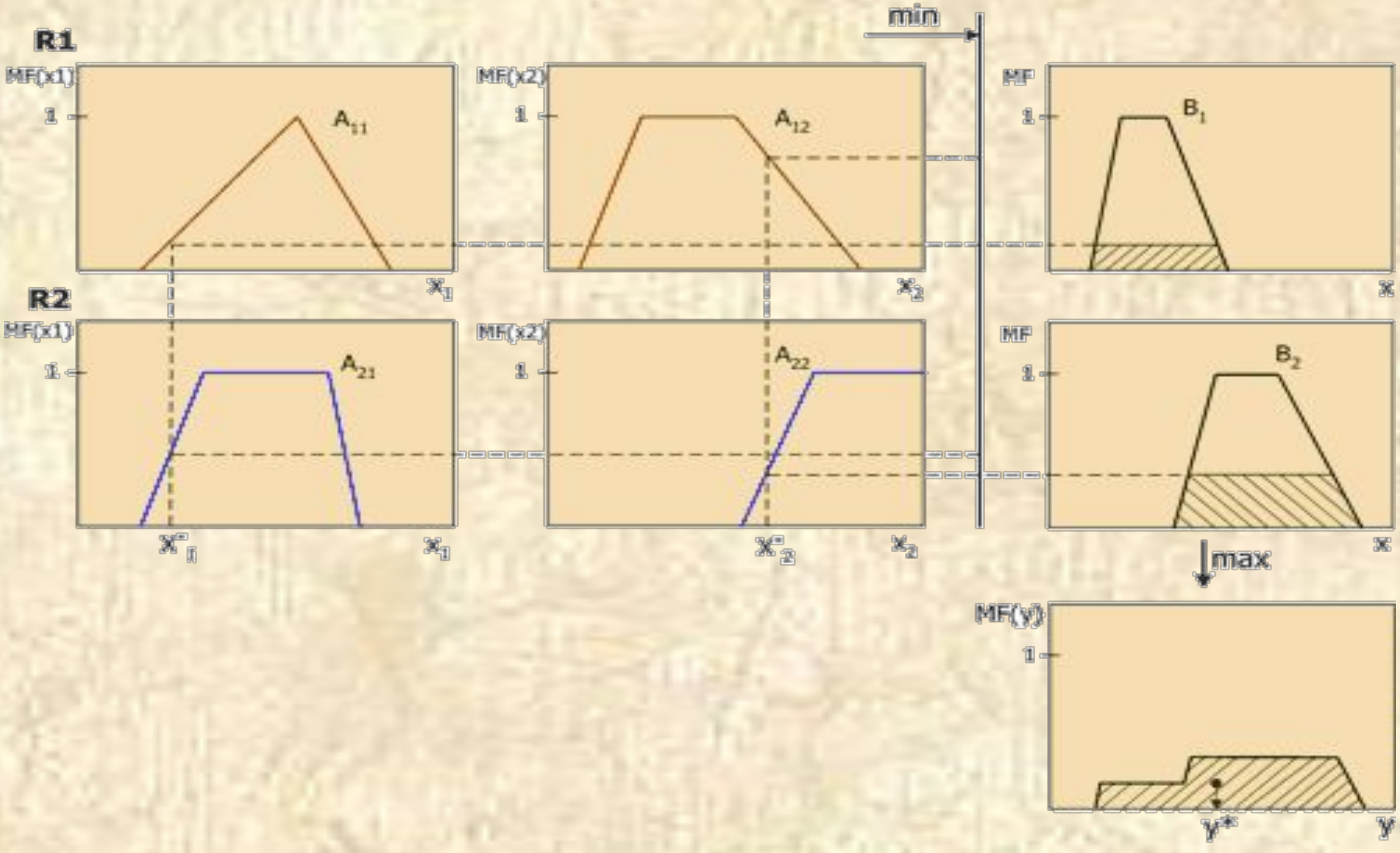
Гауссова функция принадлежности.

Описание лингвистической переменной "Цена акции".

Описание лингвистической переменной "Возраст".

Система нечеткого логического вывода.

Процесс нечеткого вывода по Мамдани для двух входных переменных и двух нечетких правил R1 и R2.



Литература:

- Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
- Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002.
- Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003.
- Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
- Масалович А. Нечеткая логика в бизнесе и финансах. www.tora-centre.ru/library/fuzzy/fuzzy-.htm
- Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11, November 1994. – P. 1329-1333.
- Cordon O., Herrera F., A General study on genetic fuzzy systems // Genetic Algorithms in engineering and computer science, 1995. – P. 33-57.
- А.К.Гуц. Математическая логика и теория алгоритмов. – Омск, 2003