

ГОУ ЦО № 1432

# Исследование представления логических функций двух переменных

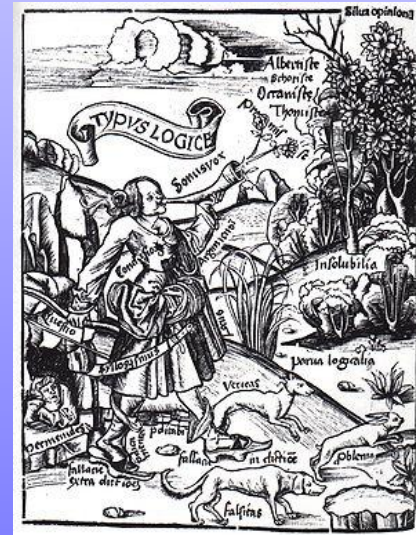
«Где начало того конца,  
которым оканчивается начало»

МОСКВА



2012

# Основоположники ЛОГИКИ



# Функции одной переменной

**Логическая функция** — это функция логических переменных, которая может принимать только два значения: 0 или 1. В свою очередь, сама логическая переменная (аргумент логической функции) тоже может принимать только два значения: 0 или 1.

**Логический элемент** — это устройство, реализующее ту или иную логическую функцию.  $Y=f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  — логическая функция, она может быть задана таблицей, которая называется таблицей истинности.

# Функции одной переменной

| <b>X</b>  | <b>0</b> | <b>1</b> | <i>аргумент</i>    |
|-----------|----------|----------|--------------------|
| <b>F0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <i>константа 0</i> |
| <b>F1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <i>X</i>           |
| <b>F2</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <i>Не X</i>        |
| <b>F3</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <i>константа 1</i> |

# Функции двух переменных

Таблица истинности функции двух переменных  $Y=F(X_1, X_2)$  содержит 4 строки, а число функций двух переменных равно 16.

Рассмотрим все эти функции двух переменных.

# Функции двух переменных

|    |   |   |   |   |                             |
|----|---|---|---|---|-----------------------------|
| X1 | 0 | 0 | 1 | 1 | <i>аргумент</i>             |
| X2 | 0 | 1 | 0 | 1 | <i>аргумент</i>             |
| F0 | 0 | 0 | 0 | 0 | <i>Константа 0</i>          |
| F1 | 0 | 0 | 0 | 1 | <i>Конъюнкция</i>           |
| F2 | 0 | 0 | 1 | 0 | <i>Запрет по X1</i>         |
| F3 | 0 | 0 | 1 | 1 | <i>Повторение X1</i>        |
| F4 | 0 | 1 | 0 | 0 | <i>Запрет по X2</i>         |
| F5 | 0 | 1 | 0 | 1 | <i>Повторение X2</i>        |
| F6 | 0 | 1 | 1 | 0 | <i>Сложение по модулю 2</i> |

# Функции двух переменных

|     |   |   |   |   |  |
|-----|---|---|---|---|--|
| F7  | 0 | 1 | 1 | 1 | <i>Дизъюнкция</i>                                  |
| F8  | 1 | 0 | 0 | 0 | <i>Стрелка Пирса</i>                               |
| F9  | 1 | 0 | 0 | 1 | <i>Эквивалентность</i>                             |
| F10 | 1 | 0 | 1 | 0 | <i>Не X2</i>                                       |
| F11 | 1 | 0 | 1 | 1 | <i>Импликация <math>x_2 \rightarrow x_1</math></i> |
| F12 | 1 | 1 | 0 | 0 | <i>Не X1</i>                                       |
| F13 | 1 | 1 | 0 | 1 | <i>Импликация <math>x_1 \rightarrow x_2</math></i> |
| F14 | 1 | 1 | 1 | 0 | <i>Штрих Шеффера</i>                               |
| F15 | 1 | 1 | 1 | 1 | <i>Константа 1</i>                                 |



# Карты Карно

- Склеивку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам
- Склеивать можно только прямоугольные области, стороны которых являются степенями двойки, т.е.  $2^n$ , где  $n$  — целое число
- Область, которую можно склеивать, должна содержать  $2^k$  единиц, где  $k$  — целое число
- Крайние клетки одной строки или одного столбца можно объединять, как если бы они были соседними
- С точки зрения склеивания, левая и правая стороны карты должны считаться соединенными
- Одна ячейка может принадлежать сразу к нескольким областям.

| $X_3 X_4$ | 00 | 01 | 11 | 10 |   |
|-----------|----|----|----|----|---|
| $X_1 X_2$ | 00 | 1  | 0  | 0  | 1 |
|           | 01 | 1  | 0  | 0  | 1 |
|           | 10 | 0  | 1  | 1  | 0 |
|           | 11 | 1  | 0  | 0  | 1 |

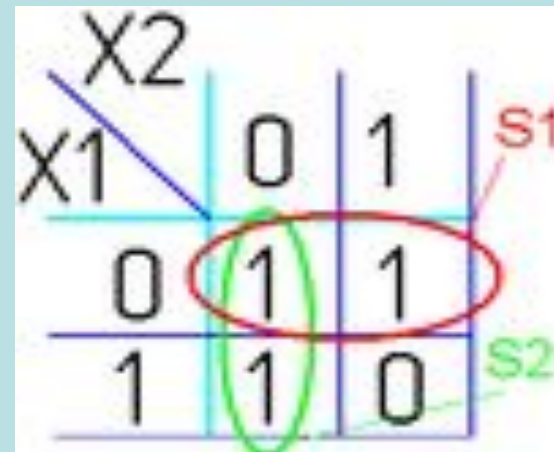
моугольные  $2^n$ , где  $n$  —  
йке должна  
и и каждой  
бой и могут  
то областей  
одить сразу



# Представление функций через И-ИЛИ-НЕ

## 1. Штрих Шеффера

| X1 | X2 | $Y = \overline{X1X2}$ |
|----|----|-----------------------|
| 0  | 0  | 1                     |
| 0  | 1  | 1                     |
| 1  | 0  | 1                     |
| 1  | 1  | 0                     |



$$\neg X1 \vee \neg X2$$

# Представление функций через И-ИЛИ-НЕ

## 2. Стрелка Пирса

| X1 | X2 | $Y = \overline{X1 + X2}$ |
|----|----|--------------------------|
| 0  | 0  | 1                        |
| 0  | 1  | 0                        |
| 1  | 0  | 0                        |
| 1  | 1  | 0                        |

| X1 \ X2 | 0 | 1 |
|---------|---|---|
| 0       | 1 | 0 |
| 1       | 0 | 0 |

$$\neg X1 \neg X2$$

# Представление функций через И-ИЛИ-НЕ

## 3. Эквивалентность

| X1 | X2 | $X1 \Leftrightarrow X2$ |
|----|----|-------------------------|
| 0  | 0  | 1                       |
| 0  | 1  | 0                       |
| 1  | 0  | 0                       |
| 1  | 1  | 1                       |

| X1 \ X2 | 0 | 1 |
|---------|---|---|
| 0       | 1 | 0 |
| 1       | 0 | 1 |

$$\neg X1 \neg X2 \vee X1 X2$$

# Представление функций через И-ИЛИ-НЕ

## 4. Импликация

| X1 | X2 | $X1 \Rightarrow X2$ |
|----|----|---------------------|
| 0  | 0  | 1                   |
| 0  | 1  | 1                   |
| 1  | 0  | 0                   |
| 1  | 1  | 1                   |

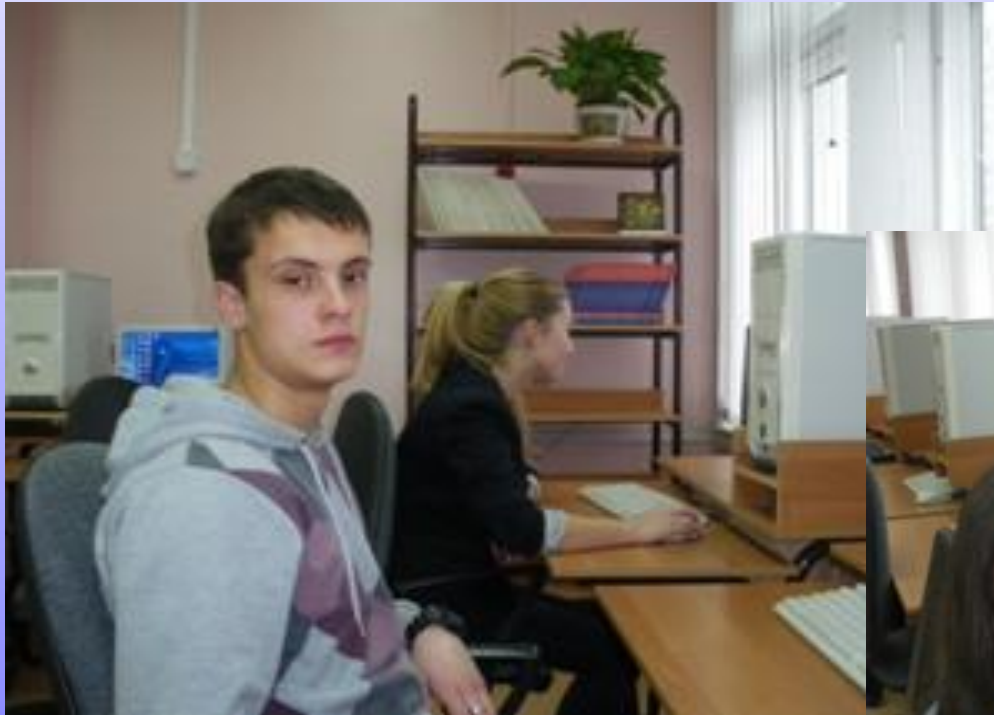
| X1 \ X2 | 0 | 1 |
|---------|---|---|
| 0       | 1 | 0 |
| 1       | 1 | 1 |

$$X1 \vee \neg X2$$

# Выводы

- Теория логических функций прошла долгую историю от Аристотеля до наших дней. В современном виде её сформулировал Джорж Буль.
- Логические функции являются математической основой современных вычислительных устройств. Для реализации логических функций в вычислительных устройствах важно унифицировать и минимизировать их представление.
- Любая логическая функция может быть представлена как комбинация базовых логических функций И, ИЛИ, НЕ.
- Для минимизации представления произвольных логических функций двух переменных удобно использовать карты Карно.
- В работе приведены минимальные представления всех логических функций двух переменных через базовые функции И, ИЛИ, НЕ.

# Авторы





# Источники информации

1. А.А. Ивин Логика учебное пособие издание 2 Москва издательство знание 1998
2. Д.А. Владимиров Булевы алгебры Москва, Наука 1969
3. <http://ru.wikipedia.org/>
4. <http://slovari.yandex.ru>
5. <http://alglib.sources.ru/articles/logic.php>