ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ЛЕКЦИЯ 4:

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ, ТЕОРЕМА О ВИРИАЛЕ

1. Теорема Бернулли: условия применимости

Теорема Бернулли – результат применения теоремы об изменении **кинетической энергии** к установившемуся движению жидкости. Это – основная теорема гидродинамики, имеющая многочисленные приложения при изучении течения воды в реках, каналах, трубах, при исследовании действия воды в водяных двигателях и т. д.

Теорема Бернулли имеет дело с **идеальной жидкостью**:

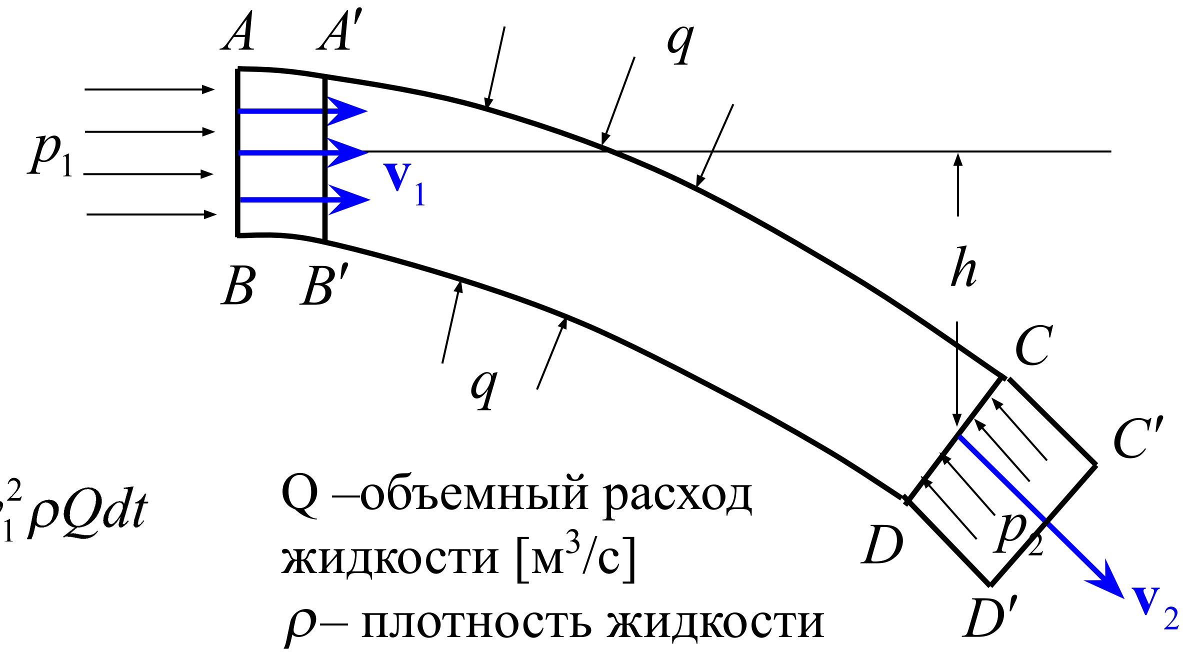
1) Несжимаемой
2) Невязкой

ВАЖНО: Работа внутренних сил в идеальной жидкости равна нулю!

Теорема Бернулли имеет дело с **установившемся течением**:
в каждой точке пространства, наполненного жидкостью, явления не изменяются с течением времени; направление и величина скорости в этой точке, величина давления у этой точки остаются постоянными во все время движения.

2. Теорема Бернулли: измене-ние кинетической энергии

Изменение кинетической энергии за время dt



$$dT = T_{A'B'C'D'} - T_{ABCD}$$

$$dT = T_{CDC'D'} - T_{ABA'B'}$$

$$T_{ABA'B'} = \frac{1}{2} M_{ABA'B'} v_1^2 = \frac{1}{2} v_1^2 \rho Q dt$$

$$T_{CDC'D'} = \frac{1}{2} v_2^2 \rho Q dt$$

Q –объемный расход жидкости [м^3/с]

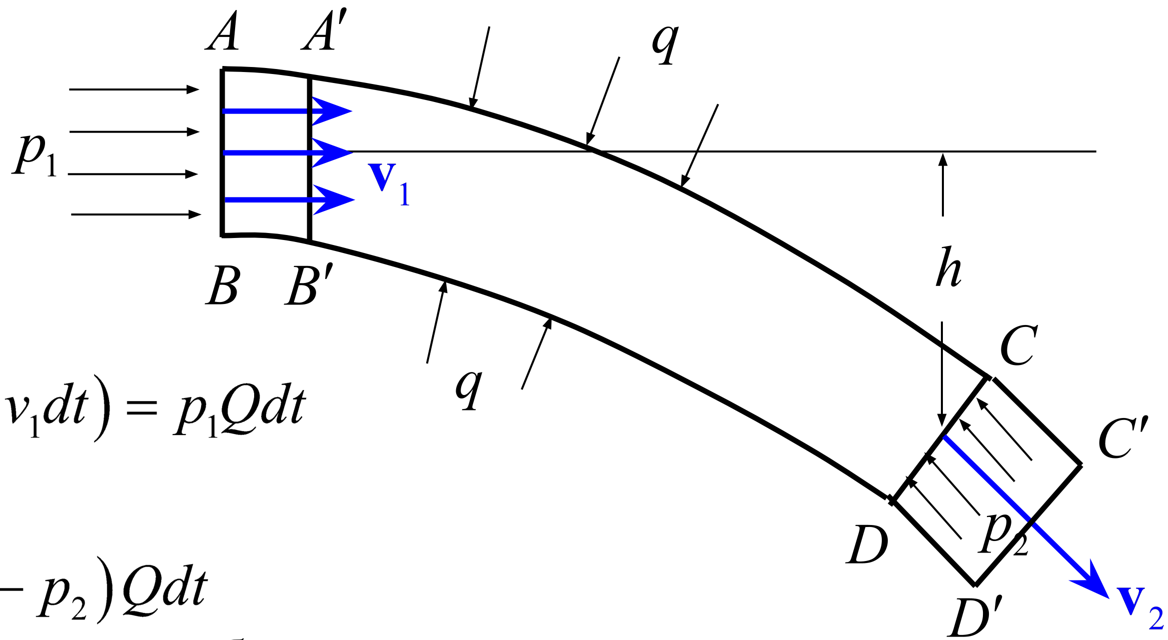
ρ– плотность жидкости [кг/м^3]

$$\boxed{dT = \frac{1}{2} \rho Q \left(v_2^2 - v_1^2 \right) dt}$$

3. Теорема Бернулли: работа внешних сил

1) Работа сил тяжести

$$dA_g = hg\rho Qdt$$



2) Работа сил давления

$$dA_1 = Fds = \left(p_1 S_{AB}\right)\cdot\left(v_1 dt\right) = p_1 Qdt$$

$$dA_2 = -p_2 Qdt$$

$$dA_p = dA_1 + dA_2 = \left(p_1 - p_2\right)Qdt$$

3) Работа сил со стороны стенок трубы равна нулю

Предполагается, что трения жидкости о стенки нет, значит силы нормальны к стенке. Скорости частиц жидкости касательны к стенке. Скалярное произведение есть ноль.

$$\boxed{dA = \left(hg\rho + p_1 - p_2\right)Qdt}$$

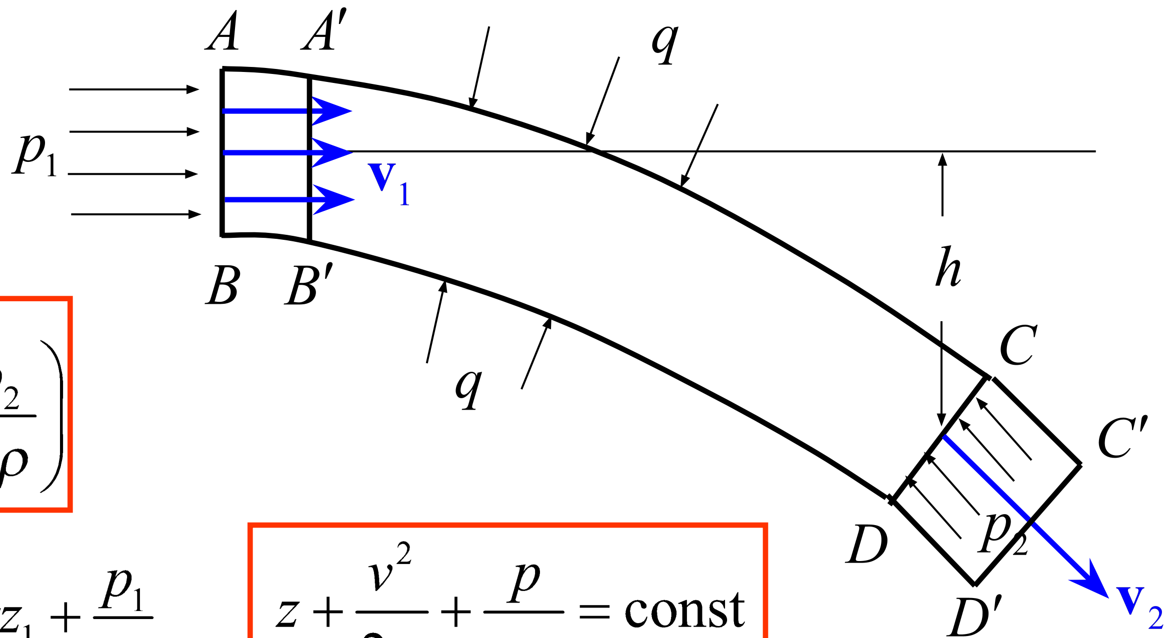
4. Теорема Бернулли: результат

$$dT = d'A$$

$$dT = \frac{1}{2}\rho Q\left(v_2^2 - v_1^2\right)dt$$

$$d'A = \left(hg\rho + p_1 - p_2\right)Qdt$$

$$\boxed{v_2^2 - v_1^2 = 2g\left(h + \frac{p_1}{g\rho} - \frac{p_2}{g\rho}\right)}$$



$$\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}$$

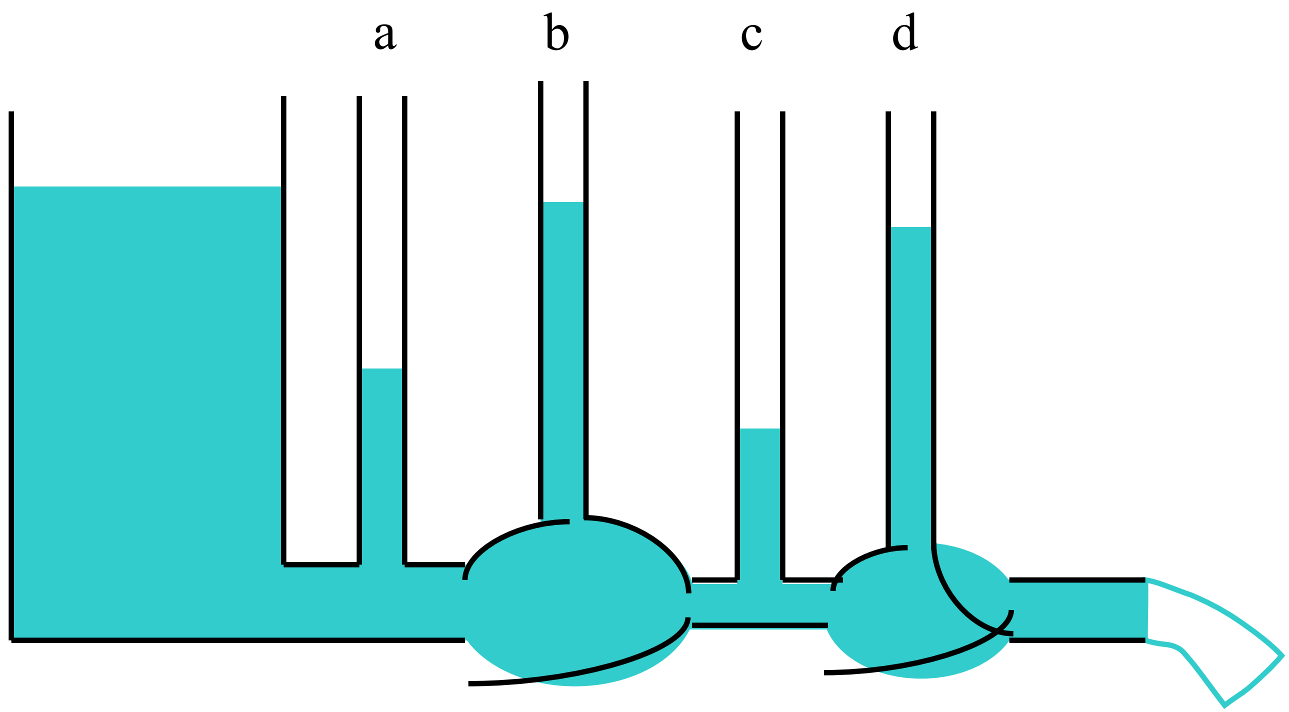
$$\boxed{z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \text{const}}$$

При установившемся движении несжимаемой жидкости сумма геометрической, скоростной и пьезометрической высот остается неизменной для частиц одной и той же трубки тока.

$v^2/2g$ высота, на которую поднимается тело, брошенное вверх со скоростью v

$p/\rho g$ высота столба жидкости с давлением p у основания столба

5. Пример: течение в трубе переменного сечения



$S_b > S_d > S_a > S_c$ $\qquad v = \dfrac{Q}{S}$ $\qquad v_b < v_d < v_a < v_c$

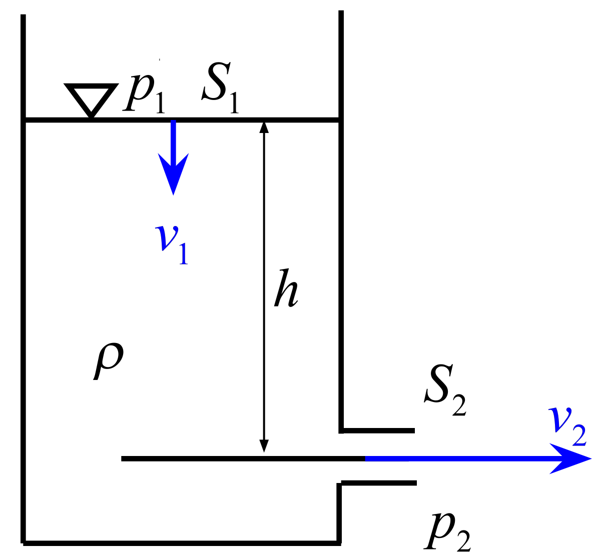
$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \mathrm{const}$$

$p_b > p_d > p_a > p_c$

6. Пример: истечение из сосуда

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\left(h + \frac{p_1}{g\rho} - \frac{p_2}{g\rho}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$



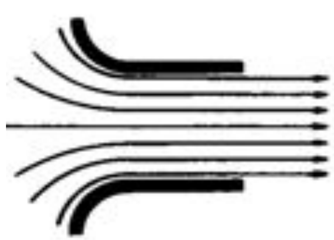
Если $S_1 \gg S_2,\ p_1 = p_2 \quad \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$

Теорема Торичелли (1644)

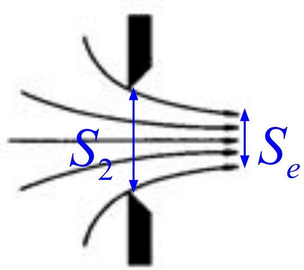
$$\psi = S_e / S_2$$

К-т сжатия потока

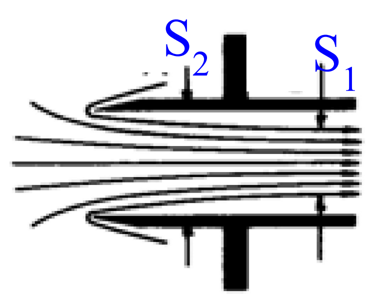
$$Q = \psi S_2 \sqrt{2gh}$$



$\psi = 1$

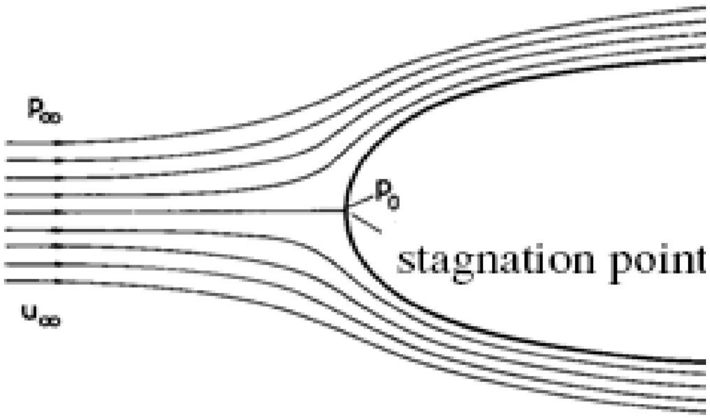


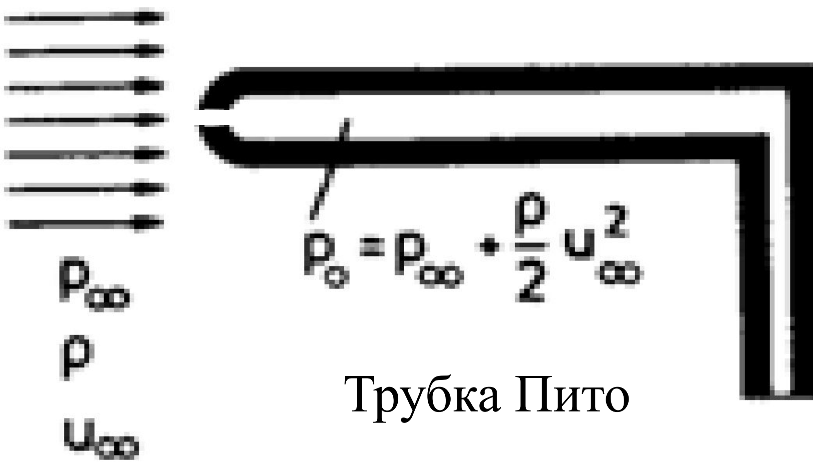
$\psi = 0.62$



$\psi = 0.5$

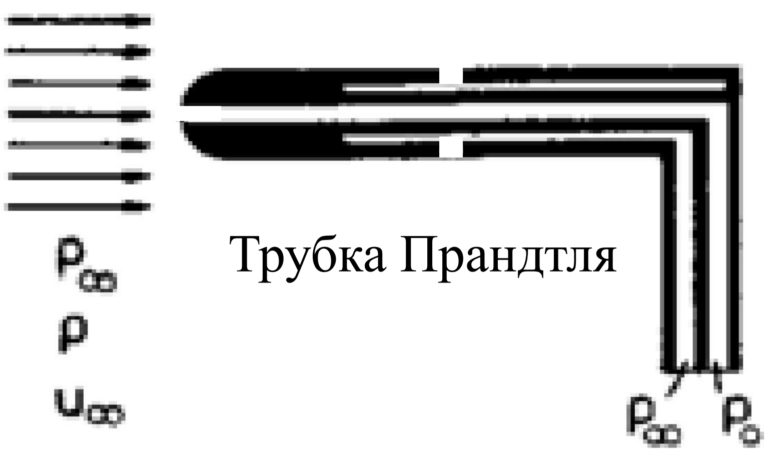
7. Пример: трубка Пито





Трубка Пито

Применяются при измерении скорости потока



Трубка Прандтля

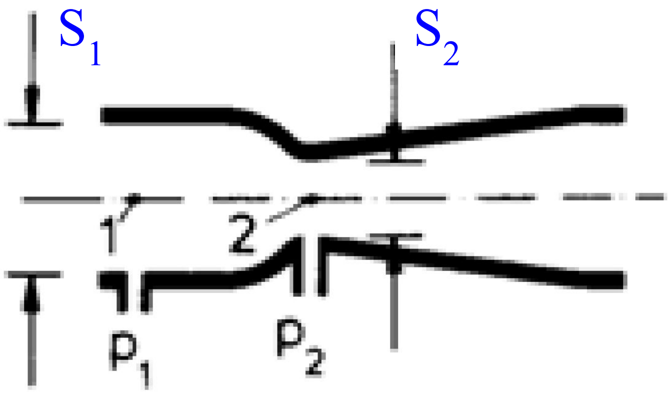
8. Пример: трубка Вентури

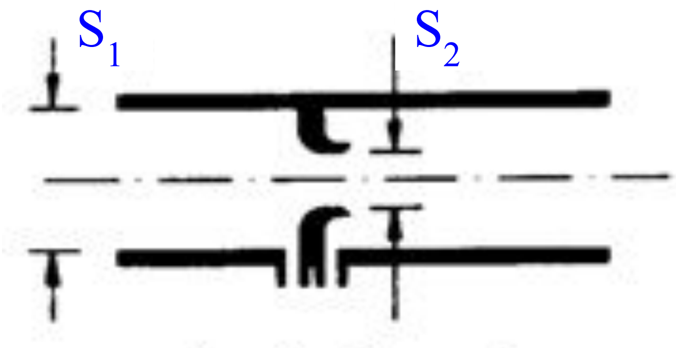
$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}$$

$$v_1S_1=v_2S_2=Q$$

$$\frac{Q^2}{2S_1^2}+\frac{p_1}{\rho}=\frac{Q^2}{2S_2^2}+\frac{p_2}{\rho}$$

$$Q=\frac{S_2S_1}{\sqrt{S_1^2-S_2^2}}\sqrt{2\frac{p_1-p_2}{\rho}},$$





Применяются при измерении расхода жидкости в трубе

9. Теорема о вириале

$$G=\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_r$$

$$\frac{dG}{dt}=\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k+\sum_{k=1}^{n} \dot{m}_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_k=\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k+\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k=2T+\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k$$

$$\frac{G(\tau)-G(0)}{\tau}=2\langle T\rangle_\tau+\left\langle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k\right\rangle_\tau \qquad \langle f\rangle_\tau=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$$ - среднее за время τ

Левая часть обращается в ноль если выполнено одно из условий

1. Интервал τ не ограничен, а функция G ограничена
2. Движение периодическое с периодом τ

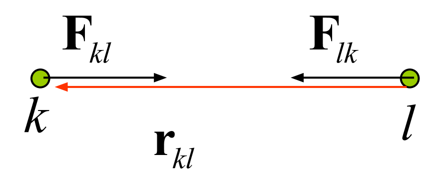
$$\boxed{\langle T\rangle_\tau=-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k\right\rangle_\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k\right\rangle_\tau$$ вириал системы

При выполнении условий 1 или 2 среднее за время τ значение кинетической энергии равно ее вириалу

10. Пример: замкнутая гравитационная система

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = \sum_{k} \mathbf{r}_k \cdot \sum_{l \neq k} \mathbf{F}_{kl} = \sum_{k} \sum_{l<k} \mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{F}_{kl} \qquad \mathbf{r}_{kl} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l$$



$$\mathbf{F}_{kl} = -\frac{Gm_k m_l}{r_{kl}^3}\mathbf{r}_{kl} \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = \sum_{k} \sum_{l<k} -\frac{Gm_k m_l}{r_{kl}} = U^i$$

Теорема о вириале $\quad 2\left\langle T \right\rangle_\tau + \left\langle U^i \right\rangle_\tau = 0$

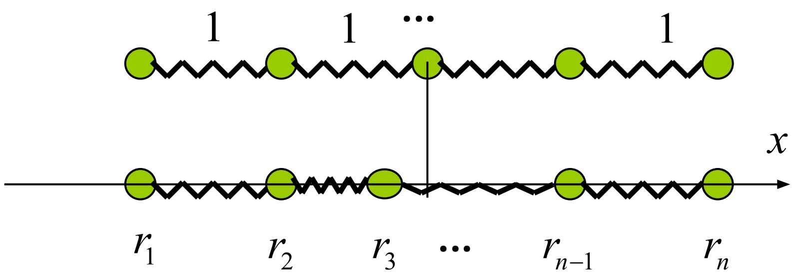
Сохранение энергии $\quad \left\langle T \right\rangle_\tau + \left\langle U^i \right\rangle_\tau = E$

$$\left\langle T \right\rangle_\tau = -E \qquad \left\langle U^i \right\rangle_\tau = 2E$$

Указывает в какой пропорции начальная энергия «делится в среднем» между кинетической и потенциальной энергией во время движения замкнутой гравитационной системы

Задача : $\quad$ пусть $\mathbf{F}_{kl} = -a_{kl} r_{kl}^{n-1} \mathbf{r}_{kl}$ $\quad$ тогда $\left\langle T \right\rangle_\tau = \dfrac{n+1}{n+3}E \qquad \left\langle U^i \right\rangle_\tau = \dfrac{2}{n+3}E$

11. Пример: упругая цепочка

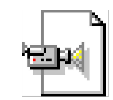


$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = \quad r_1 k\left(r_2 - r_1 - 1\right) +$$

$$r_2\left(-k(r_2 - r_1 - 1) + k\left(r_3 - r_2 - 1\right)\right) + \ldots$$

$$r_{n-1}\left(-k(r_{n-1} - r_{n-2} - 1) + k\left(r_n - r_{n-1} - 1\right)\right) +$$

$$-r_n k(r_n - r_{n-1} - 1)$$



Âèäåîçàïèñü

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = -k\left(r_2 - r_1 - 1\right)\left(r_2 - r_1 - 1 + 1\right) -$$

$$-k\left(r_3 - r_2 - 1\right)\left(r_3 - r_2 - 1 + 1\right) - \ldots$$

$$-k\left(r_n - r_{n-1} - 1\right)\left(r_n - r_{n-1} - 1 + 1\right) =$$

$$= \left[-k\left(r_2 - r_1 - 1\right)^2 - k\left(r_3 - r_2 - 1\right)^2 - \ldots - k\left(r_n - r_{n-1} - 1\right)^2\right] +$$

$$+\left[-k\left(\cancel{r_2} - r_1 - 1\right) - k\left(\cancel{r_3} - \cancel{r_2} - 1\right) - \ldots - k\left(r_n - \cancel{r_{n-1}} - 1\right)\right] = 2U - \left(r_n - r_1 - (n-1)\right)$$

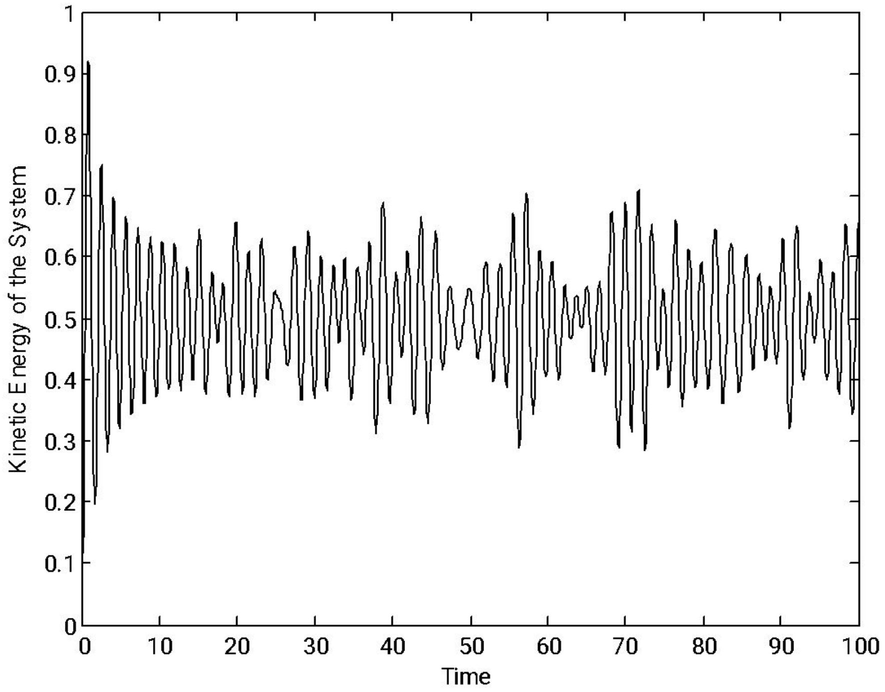
$$U = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(r_{i+1} - r_i - 1\right)^2$$ - потенциальная энергия системы

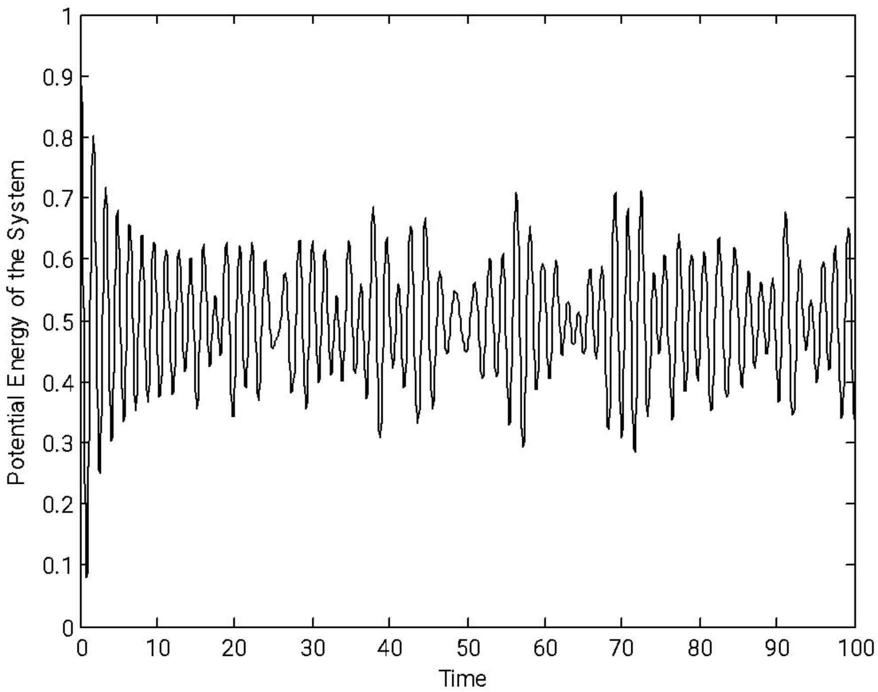
12. Пример: упругая цепочка

$$\langle r_n - r_1 - (n-1) \rangle = 0$$

$$\langle T \rangle_\tau - \langle U \rangle_\tau = 0$$
$$\langle T \rangle_\tau + \langle U \rangle_\tau = E$$

$$\langle T \rangle_\tau = \frac{1}{2} E$$
$$\langle U \rangle_\tau = \frac{1}{2} E$$





$$n = 30$$