

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ЛЕКЦИЯ 4:
ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ, ТЕОРЕМА О
ВИРИАЛЕ

1. Теорема Бернулли: условия применимости

Теорема Бернулли – результат применения теоремы об изменении **кинетической энергии** к установившемуся движению жидкости. Это – основная теорема гидродинамики, имеющая многочисленные приложения при изучении течения воды в реках, каналах, трубах, при исследовании действия воды в водяных двигателях и т. д.

Теорема Бернулли имеет дело с **идеальной жидкостью**:

- 1) Несжимаемой
- 2) Невязкой

ВАЖНО: Работа внутренних сил в идеальной жидкости равна нулю!

Теорема Бернулли имеет дело с **установившемся течением**:

в каждой точке пространства, наполненного жидкостью, явления не изменяются с течением времени; направление и величина скорости в этой точке, величина давления у этой точки остаются постоянными во все время движения.

2. Теорема Бернулли: изменение кинетической энергии

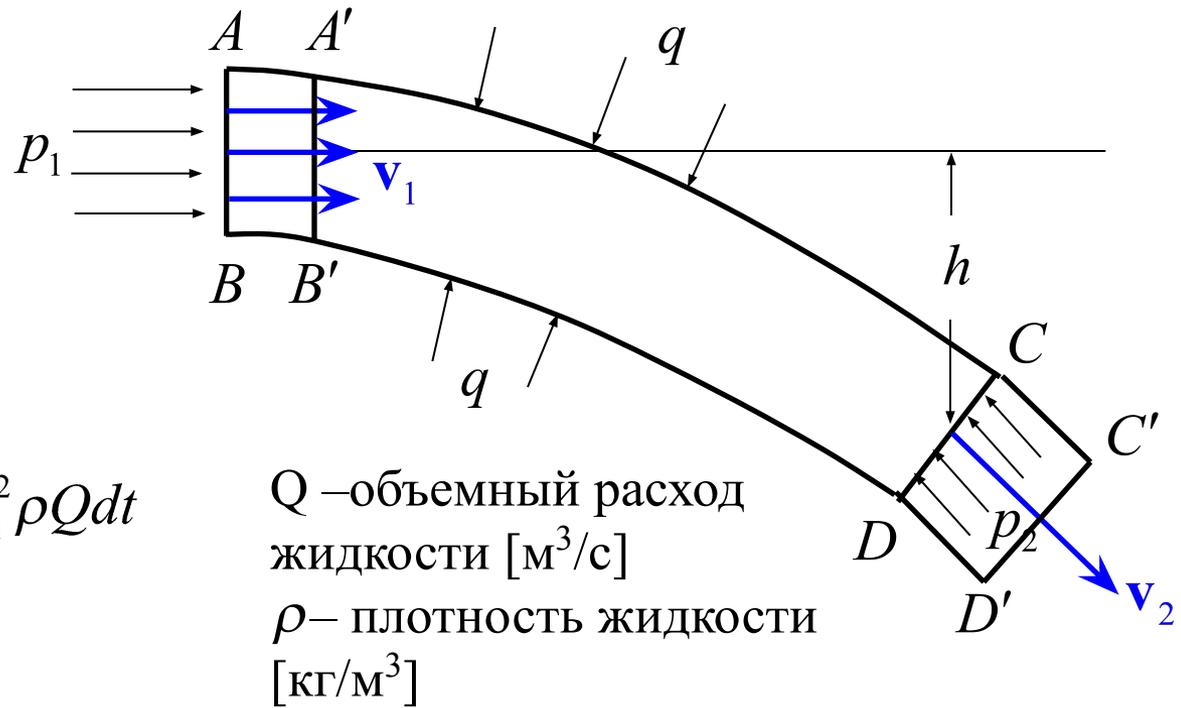
Изменение кинетической энергии за время dt

$$dT = T_{A'B'C'D'} - T_{ABCD}$$

$$dT = T_{CDC'D'} - T_{ABA'B'}$$

$$T_{ABA'B'} = \frac{1}{2} M_{ABA'B'} v_1^2 = \frac{1}{2} v_1^2 \rho Q dt$$

$$T_{CDC'D'} = \frac{1}{2} v_2^2 \rho Q dt$$



$$dT = \frac{1}{2} \rho Q (v_2^2 - v_1^2) dt$$

3. Теорема Бернулли: работа внешних сил

1) Работа сил тяжести

$$dA_g = hg\rho Qdt$$

2) Работа сил давления

$$dA_1 = Fds = (p_1 S_{AB}) \cdot (v_1 dt) = p_1 Qdt$$

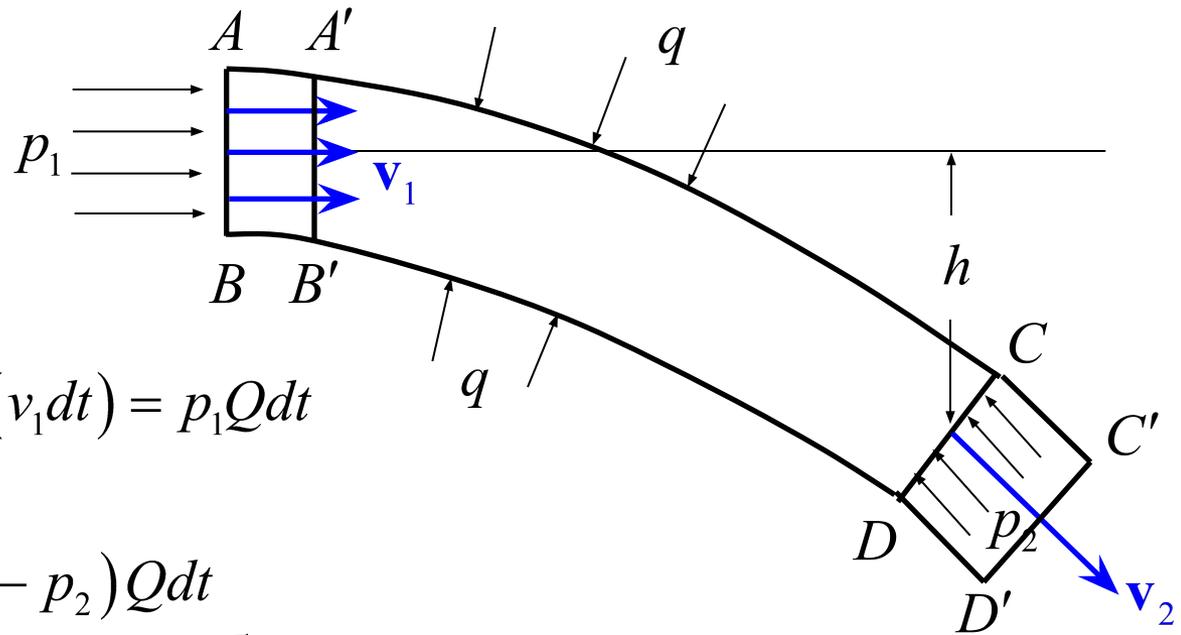
$$dA_2 = -p_2 Qdt$$

$$dA_p = dA_1 + dA_2 = (p_1 - p_2) Qdt$$

3) Работа сил со стороны стенок трубы равна нулю

Предполагается, что трения жидкости о стенки нет, значит силы нормальны к стенке. Скорости частиц жидкости касательны к стенке. Скалярное произведение есть ноль.

$$dA = (hg\rho + p_1 - p_2) Qdt$$



4. Теорема Бернулли: результат

$$dT = d'A$$

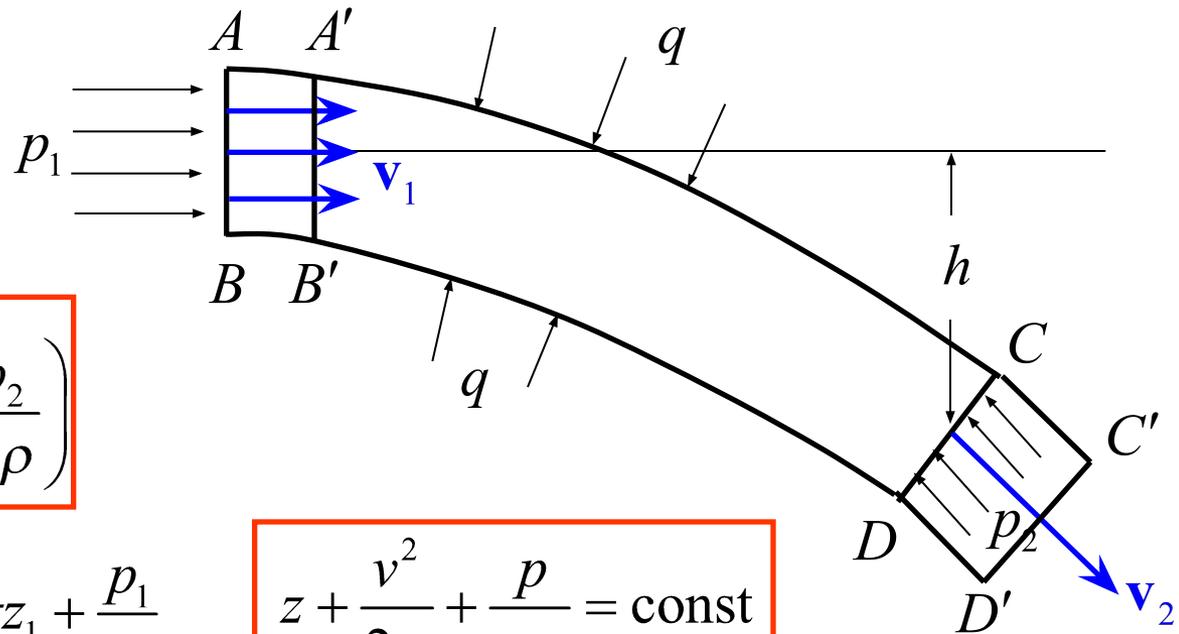
$$dT = \frac{1}{2} \rho Q (v_2^2 - v_1^2) dt$$

$$d'A = (hg\rho + p_1 - p_2) Q dt$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g \left(h + \frac{p_1}{g\rho} - \frac{p_2}{g\rho} \right)$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho}$$

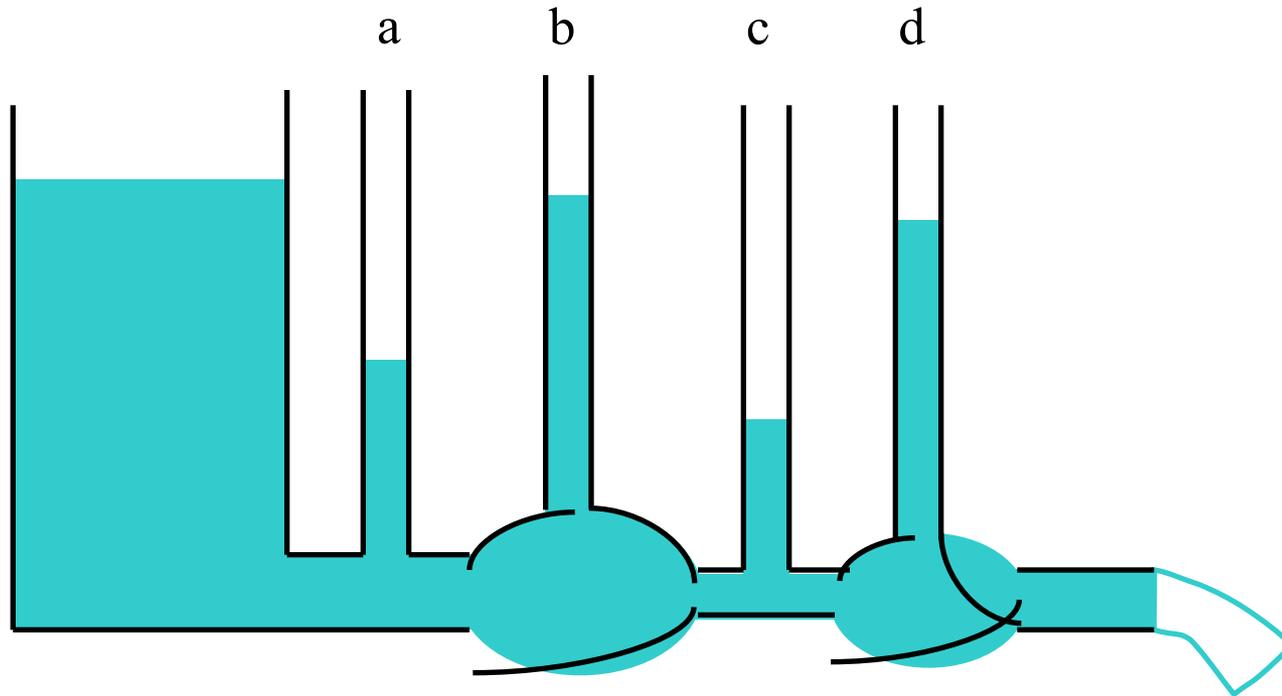
$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$$



При установившемся движении несжимаемой жидкости сумма геометрической, скоростной и пьезометрической высот остается неизменной для частиц одной и той же трубки тока.

$v^2/2g$ высота, на которую поднимается тело, брошенное вверх со скоростью v
 $p/\rho g$ высота столба жидкости с давлением p у основания столба

5. Пример: течение в трубе переменного сечения



$$S_b > S_d > S_a > S_c \quad v = \frac{Q}{S}$$

$$v_b < v_d < v_a < v_c$$

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$$

$$p_b > p_d > p_a > p_c$$

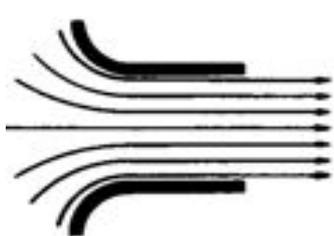
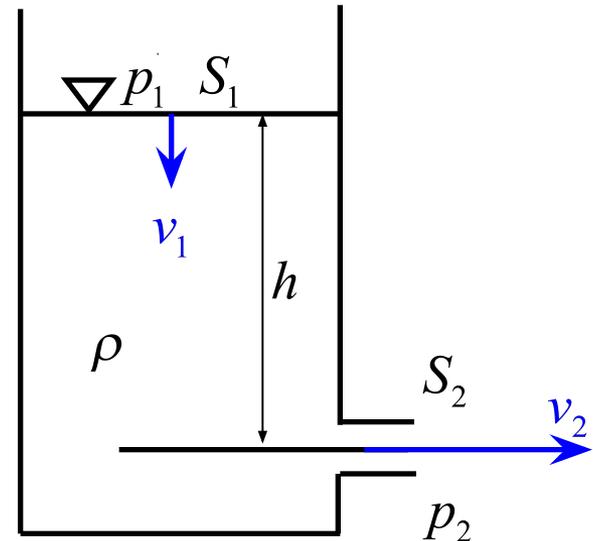
6. Пример: истечение из сосуда

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g \left(h + \frac{p_1}{g\rho} - \frac{p_2}{g\rho} \right)$$

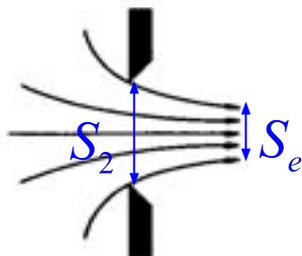
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Если $S_1 \gg S_2, p_1 = p_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$

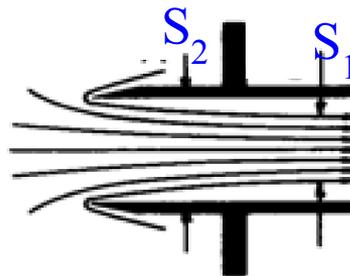
Теорема Торичелли (1644)



$$\psi = 1$$



$$\psi = 0.62$$



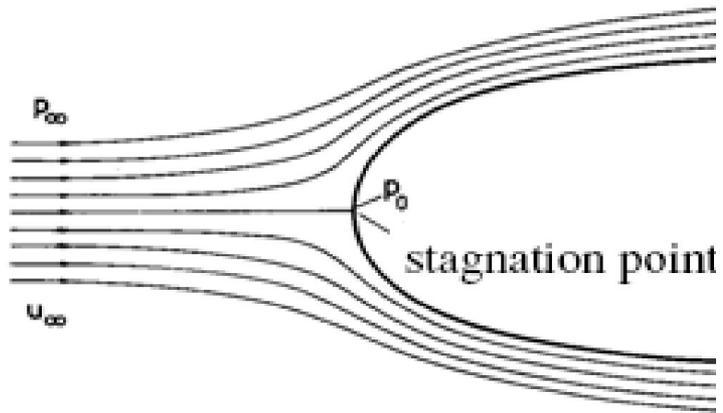
$$\psi = 0.5$$

$$\psi = S_e/S_2$$

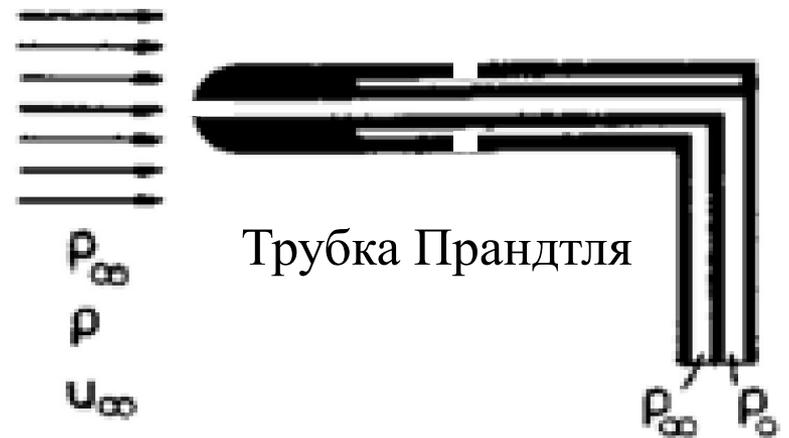
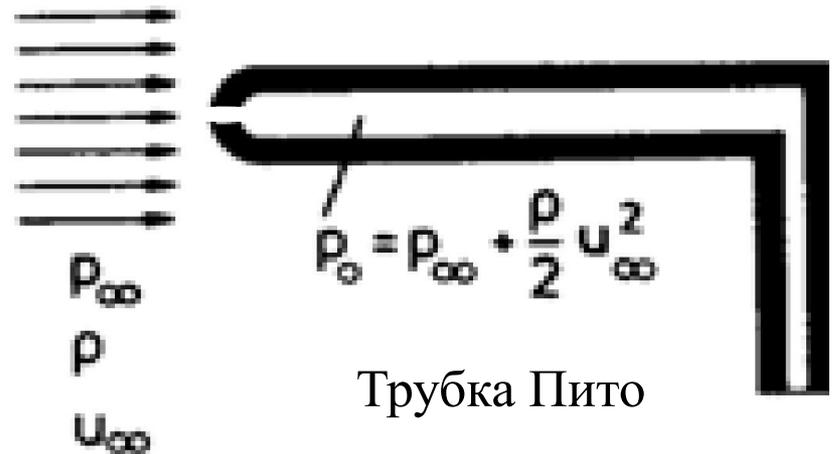
К-т сжатия потока

$$Q = \psi S_2 \sqrt{2gh}$$

7. Пример: трубка Пито



Применяются при измерении скорости потока



8. Пример: трубка Вентури

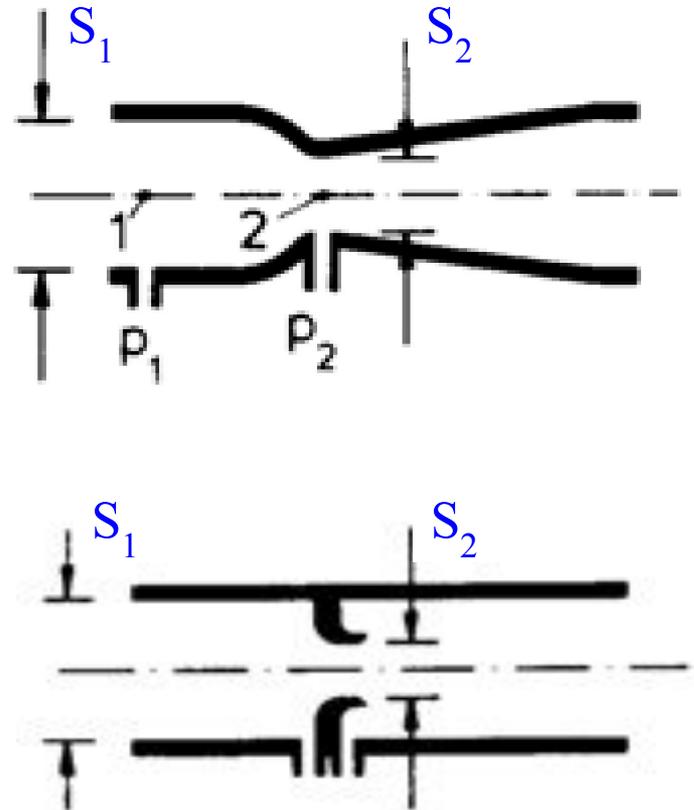
$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q$$

$$\frac{Q^2}{2S_1^2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{Q^2}{2S_2^2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$Q = \frac{S_2 S_1}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}},$$

Применяются при измерении расхода жидкости в трубе



9. Теорема о вириале

$$G = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_k$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_{k=1}^n \dot{m}_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = 2T + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k$$

$$\frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 2\langle T \rangle_\tau + \left\langle \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \right\rangle_\tau \quad \langle f \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad - \text{среднее за время } \tau$$

Левая часть обращается в ноль если выполнено одно из условий

1. Интервал τ не ограничен, а функция G ограничена
2. Движение периодическое с периодом τ

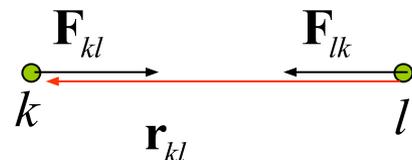
$$\langle T \rangle_\tau = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \right\rangle_\tau$$

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \right\rangle_\tau \quad \text{вириал системы}$$

При выполнении условий 1 или 2 среднее за время τ значение кинетической энергии равно ее вириалу

10. Пример: замкнутая гравитационная система

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = \sum_k \mathbf{r}_k \cdot \sum_{l \neq k} \mathbf{F}_{kl} = \sum_k \sum_{l < k} \mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{F}_{kl} \quad \mathbf{r}_{kl} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l$$



$$\mathbf{F}_{kl} = -\frac{Gm_k m_l}{r_{kl}^3} \mathbf{r}_{kl} \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = \sum_k \sum_{l < k} -\frac{Gm_k m_l}{r_{kl}} = U^i$$

Теорема о вириале $2\langle T \rangle_\tau + \langle U^i \rangle_\tau = 0$

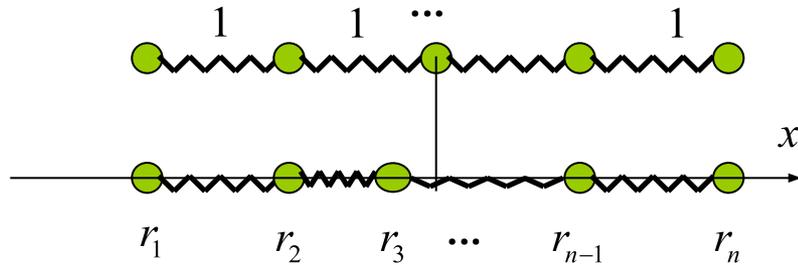
Сохранение энергии $\langle T \rangle_\tau + \langle U^i \rangle_\tau = E$

$$\langle T \rangle_\tau = -E \quad \langle U^i \rangle_\tau = 2E$$

Указывает в какой пропорции начальная энергия «делится в среднем» между кинетической и потенциальной энергией во время движения замкнутой гравитационной системы

Задача : пусть $\mathbf{F}_{kl} = -a_{kl} r_{kl}^{n-1} \mathbf{r}_{kl}$ тогда $\langle T \rangle_\tau = \frac{n+1}{n+3} E$ $\langle U^i \rangle_\tau = \frac{2}{n+3} E$

11. Пример: упругая цепочка



$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = r_1 k (r_2 - r_1 - 1) +$$

$$r_2 (-k(r_2 - r_1 - 1) + k(r_3 - r_2 - 1)) + \dots$$

$$r_{n-1} (-k(r_{n-1} - r_{n-2} - 1) + k(r_n - r_{n-1} - 1)) +$$

$$-r_n k(r_n - r_{n-1} - 1)$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k = -k(r_2 - r_1 - 1)(r_2 - r_1 - 1 + 1) -$$

$$-k(r_3 - r_2 - 1)(r_3 - r_2 - 1 + 1) - \dots$$

$$-k(r_n - r_{n-1} - 1)(r_n - r_{n-1} - 1 + 1) =$$

$$= \left[-k(r_2 - r_1 - 1)^2 - k(r_3 - r_2 - 1)^2 - \dots - k(r_n - r_{n-1} - 1)^2 \right] +$$

$$+ \left[-k(r_2 - r_1 - 1) - k(r_3 - r_2 - 1) - \dots - k(r_n - r_{n-1} - 1) \right] = 2U - (r_n - r_1 - (n - 1))$$

$$U = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (r_{i+1} - r_i - 1)^2$$

- потенциальная энергия системы



Àèäâîçàìèñü

12. Пример: упругая цепочка

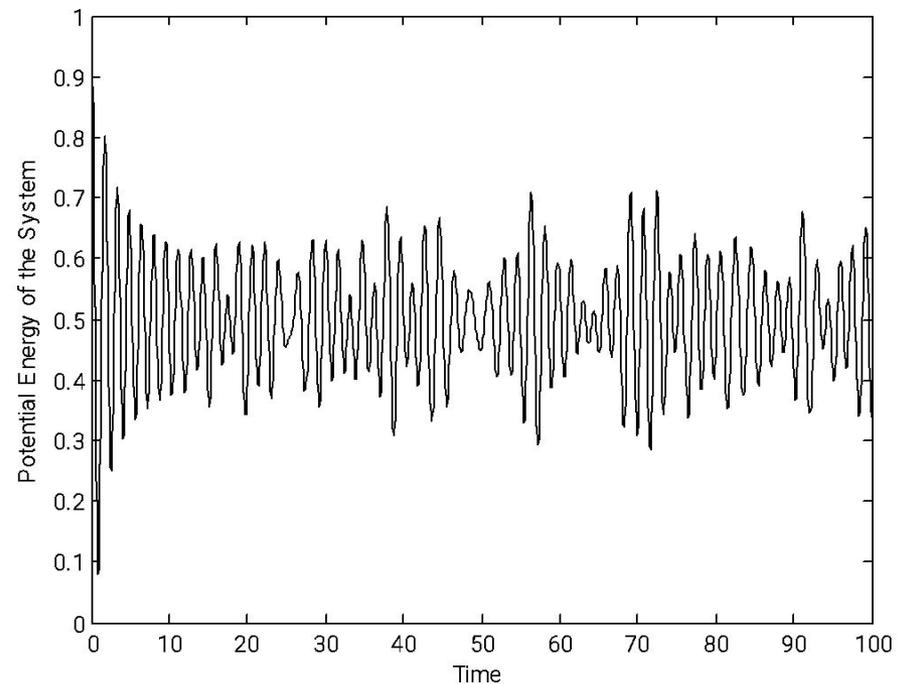
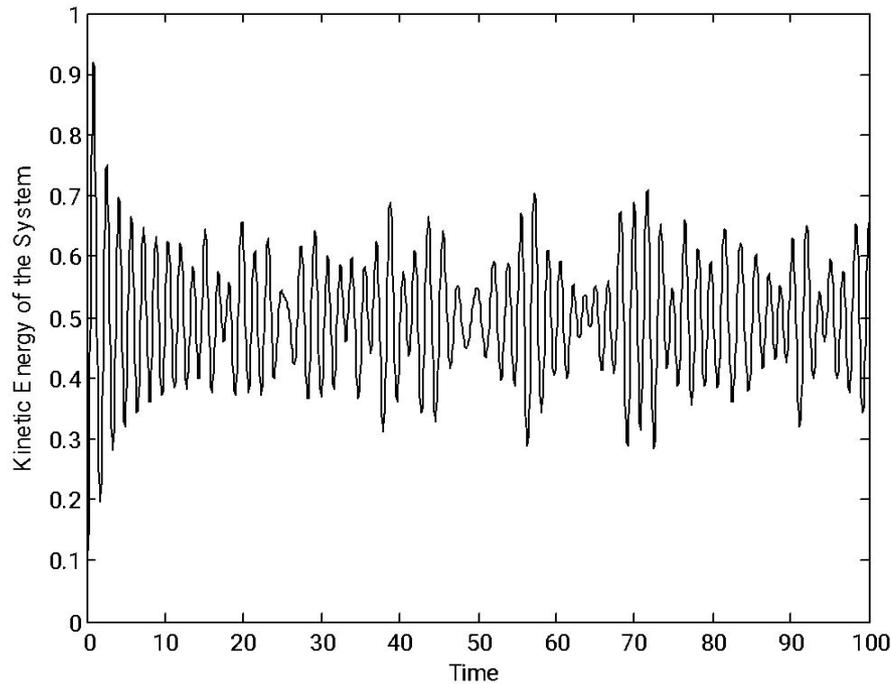
$$\langle r_n - r_1 - (n-1) \rangle = 0$$

$$\langle T \rangle_\tau - \langle U \rangle_\tau = 0$$

$$\langle T \rangle_\tau = \frac{1}{2} E$$

$$\langle T \rangle_\tau + \langle U \rangle_\tau = E$$

$$\langle U \rangle_\tau = \frac{1}{2} E$$



$$n = 30$$