

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГАШЕНИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ СПУТНИКА И СВОЙСТВЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С.А.Мирер

*Институт прикладной математики им. М.В.  
Келдыша РАН*

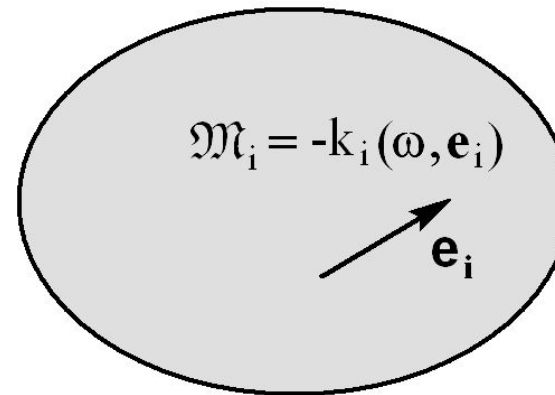
[mirer@keldysh.ru](mailto:mirer@keldysh.ru)

При решении задачи об оптимальном демпфировании угловой скорости космического аппарата потребовалось проанализировать специфические функции элементов тензора инерции твердого тела. В результате были доказаны некоторые общие экстремальные соотношения.

В частности, оказалось, что произведение моментов инерции тела относительно трех ортогональных осей минимально, когда они являются главными центральными осями инерции.

## Задача о модельном демпфировании

- ❑ Рассматривается задача оптимального гашения малой угловой скорости твердого тела.
- ❑ По трем произвольно ориентированным осям установлены устройства, вырабатывающие управляющие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости тела на эти оси.



К.В. ЛУКАНИН, В.А. САРЫЧЕВ. **Модельная задача о быстродействии и точности системы гравитационной стабилизации спутников. Препринт ИПМ АН СССР, 1971, №47.**

Движение тела относительно центра масс описывается уравнением

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}$$

где  $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$ ,  $M_i = -k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)$

или в проекциях на главные оси инерции тела ( $\mathbf{E}_i$ )

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + \sum k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_1) = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 + \sum k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_2) = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 + \sum k_i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_3) = 0$$

$\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ;  $k_i$  - коэффициенты усиления моментных устройств.

Известно, что систему, в которой моментные устройства установлены по трем произвольным осям, можно свести к системе, в которой эти оси являются взаимно перпендикулярными. Далее считаем, что орты  $\mathbf{e}_i$  образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов.

Уравнения движения приводятся к виду

$$I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + \sum m_{1i} \omega_i = 0$$

$$I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 + \sum m_{2i} \omega_i = 0$$

$$I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 + \sum m_{3i} \omega_i = 0$$

где  $m_{is} = \sum_{j=1}^3 k_j a_{js} a_{ji}$  - элементы симметричной матрицы.

Рассматривается решение

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

Для того, чтобы его можно было использовать в качестве рабочего режима, необходимо не только гарантировать асимптотическую устойчивость, но и выбрать значения параметров системы, при которых собственные колебания затухают достаточно быстро.

Скорость демпфирования оценивается величиной степени устойчивости  $\xi$ .

## Задача о модельном демпфировании

Характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$I_1 I_2 I_3 p^3 + (\bar{k}_1 J_1 L_1 + \bar{k}_2 J_2 L_2 + \bar{k}_3 J_3 L_3) p^2 + (\bar{k}_1 \bar{k}_2 + \bar{k}_2 \bar{k}_3 + \bar{k}_3 \bar{k}_1) J_1 J_2 J_3 p + \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 J_1 J_2 J_3 = 0,$$

где

$$J_i = I_1 \alpha_{i1}^2 + I_2 \alpha_{i2}^2 + I_3 \alpha_{i3}^2,$$

$$L_i = I_2 I_3 \alpha_{i1}^2 + I_3 I_1 \alpha_{i2}^2 + I_1 I_2 \alpha_{i3}^2,$$

$$\bar{k}_i = k_i / J_i.$$

$J_i$  - момент инерции тела относительно  $\mathbf{e}_i$  - характеризует меру инертности тела при воздействии на него управляющего момента по этой оси. Отсюда ясно, что чем больше  $J_i$ , тем больше должен быть и соответствующий момент  $M_i$ .

## Задача о модельном демпфировании

Выберем коэффициенты усиления моментных устройств так, чтобы

$$k_1/J_1 = k_2/J_2 = k_3/J_3, \quad \text{т.е.} \quad \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_3 = k.$$

Тогда характеристическое уравнение принимает вид

$$I_1 I_2 I_3 p^3 + k(J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3) p^2 + (3p + k) k^2 J_1 J_2 J_3 = 0.$$

Предположим,  $\xi_{\max}$  достигается при таких значениях параметров, когда все корни действительны и равны между собой. Тогда выполняются соотношения

$$(1) \quad J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3,$$

$$(2) \quad J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3 = 3 I_1 I_2 I_3,$$

$$(3) \quad k = \xi.$$

Из (3) следует, что  $k$  надо брать как можно больше. Что касается (1) и (2), то можно доказать, что эти равенства имеют место только в случае «параллельности» осей демпфирования и главных центральных осей инерции тела (при этом порядок соответствия осей несущественен).

Таким образом, при рассмотрении конкретной прикладной задачи возникает необходимость анализа специфических функций элементов тензора инерции твердого тела

$$J_1 J_2 J_3$$

$$J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3$$

$$\left( J_i = I_1 \alpha_{i1}^2 + I_2 \alpha_{i2}^2 + I_3 \alpha_{i3}^2, \quad L_i = I_2 I_3 \alpha_{i1}^2 + I_3 I_1 \alpha_{i2}^2 + I_1 I_2 \alpha_{i3}^2 \right)$$

В результате такого анализа удалось доказать некоторые экстремальные соотношения для произвольного твердого тела.



Рассматривается твердое тело с главными центральными моментами инерции  $I_1, I_2, I_3$  .

$Ox_1x_2x_3$  - система координат с осями вдоль главных центральных осей инерции;

$Oy_1y_2y_3$  - связанная система, ее ориентация относительно  $Ox_1x_2x_3$  определяется ортогональной матрицей  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ ,

$$a_{ij} = \cos(Oy_i, Ox_j).$$

$$J_i = \sum_{k=1}^3 I_k a_{ik}^2 - \text{момент инерции тела относительно оси } Oy_i$$

## Теорема:

Для любого твердого тела выполняются неравенства

$$I_1 I_2 I_3 \leq J_1 J_2 J_3 \leq \left( \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} \right)^3,$$

причем правое равенство достигается только при коллинеарности осей  $Ox_i$  и  $Oy_j$  (порядок соответствия произвольный), а левое равенство имеет место при  $J_1 = J_2 = J_3$ .

Сначала докажем правую часть неравенства  $J_1 J_2 J_3 \leq \left( \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} \right)^3$ .

Обозначим  $c = (I_1 + I_2 + I_3)/3$ . С учетом  $J_1 + J_2 + J_3 = I_1 + I_2 + I_3 = 3c$  имеем

$$J_1 J_2 J_3 = J_2 \cdot \frac{1}{4} \left[ (J_1 + J_3)^2 - (J_1 - J_3)^2 \right] \leq \frac{1}{4} J_2 (3c - J_2)^2 \quad (\text{равенство при } J_1 = J_3).$$

Теперь рассмотрим функцию  $f(J_2) = \frac{1}{4} J_2 (3c - J_2)^2$ .

Принимая во внимание, что  $f$  определена на отрезке  $[0, 3c/2]$ , и

$$\frac{df}{dJ_2} = \frac{3}{4} (3c - J_2)(c - J_2), \quad \frac{d^2 f}{dJ_2^2} = \frac{3}{2} (J_2 - 2c),$$

приходим к выводу, что  $\max f$  имеет место при  $J_2 = c$ ,

т.е.  $\max(J_1 J_2 J_3) = c^3$  достигается при  $J_1 = J_2 = J_3 = c$ .

Покажем, что найденный максимум действительно достигается, т.е. можно так подобрать элементы матрицы  $a_{ij}$ , чтобы

$$J_i = i \sum_{k=1}^3 I_k a_{ik}^2 = \dots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что  $a_{ij}$  также удовлетворяют условиям ортогональности

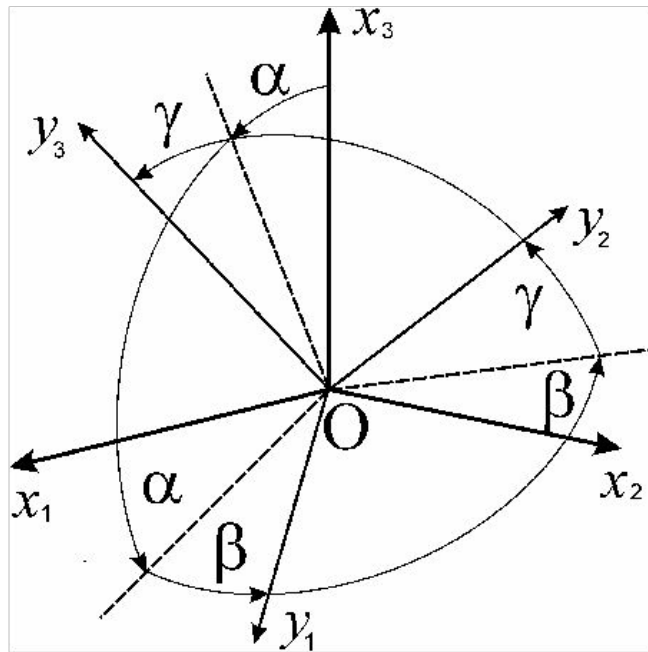
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1,$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0.$$

Не разрешая систему, покажем существование хотя бы одного решения.

Положение системы координат  $Oy_1y_2y_3$  относительно  $Ox_1x_2x_3$  определим углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Тогда условия ортогональности выполняются автоматически.



$$a_{11} = \cos \alpha \cos \beta,$$

$$a_{12} = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma,$$

$$a_{13} = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$a_{21} = \sin \beta,$$

$$a_{22} = \cos \beta \cos \gamma,$$

$$a_{23} = -\cos \beta \sin \gamma,$$

$$a_{31} = -\sin \alpha \cos \beta,$$

$$a_{32} = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma,$$

$$a_{33} = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

Условие

$$J_2 = I_1 a_{21}^2 + I_2 a_{22}^2 + I_3 a_{23}^2 = c$$

выполнено, например, при  $a_{21}^2 = a_{22}^2 = a_{23}^2 = 1/3 \Rightarrow \sin^2 \beta = 1/3, \sin^2 \gamma = 1/2$ .

Пусть для определенности

$$\sin \beta = 1/\sqrt{3}, \quad \sin \gamma = 1/\sqrt{2}, \quad \cos \gamma = 1/\sqrt{2}.$$

Тогда

$$a_{11}^2 = \frac{1}{3}(1 + \cos 2\alpha),$$

$$a_{12}^2 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha \right), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \frac{I_1 - c}{I_2 - I_3}$$

$$a_{13}^2 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha \right)$$

Заметим, что это выражение теряет смысл при  $I_2 = I_3$ . Однако, в этом случае  $\cos 2\alpha = 0$ , откуда, в частности,  $\alpha = \pi/4$ .

Таким образом, показано, что для произвольного твердого тела всегда можно так выбрать направления осей системы координат  $Oy_1y_2y_3$ , что все осевые моменты инерции окажутся одинаковыми, т.е.

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3).$$

Полученный результат допускает также следующую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется трехосный эллипсоид с полуосями  $a, b, c$ . Тогда всегда можно ввести декартову систему координат с началом в центре эллипсоида таким образом, что точки пересечения координатных осей с эллипсоидом окажутся на одинаковом расстоянии  $d$  от его центра, причем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Левая часть неравенства  $J_1 J_2 J_3 \geq I_1 I_2 I_3$  становится очевидной после выполнения ряда элементарных преобразований, приводящих к

$$J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3 + I_1 (I_2 - I_3)^2 a_{22}^2 a_{23}^2 + I_2 (I_3 - I_1)^2 a_{23}^2 a_{21}^2 + I_3 (I_1 - I_2)^2 a_{21}^2 a_{22}^2 + \\ + (I_1 a_{21}^2 + I_2 a_{22}^2 + I_3 a_{23}^2) (I_1 a_{11} a_{31} + I_2 a_{12} a_{32} + I_3 a_{13} a_{33})^2 \geq I_1 I_2 I_3,$$

причем равенство достигается при одновременном выполнении условий

$$a_{21} a_{22} = 0, \quad a_{22} a_{23} = 0, \quad a_{23} a_{21} = 0,$$

$$I_1 a_{11} a_{31} + I_2 a_{12} a_{32} + I_3 a_{13} a_{33} = 0,$$

$$a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} + a_{13} a_{33} = 0 \quad (\text{следствие ортогональности матрицы}).$$

Отсюда определяются все случаи, когда возможно равенство  $J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3$  (в предположении, что  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ ).



Равенство  $J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3$  возможно в следующих случаях:

- 1).  $a_{11}^2 = a_{22}^2 = a_{33}^2 = 1$ ;
- 2).  $a_{11}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = 1$ ;
- 3).  $a_{12}^2 = a_{21}^2 = a_{33}^2 = 1$ ;
- 4).  $a_{12}^2 = a_{23}^2 = a_{31}^2 = 1$ ;
- 5).  $a_{13}^2 = a_{21}^2 = a_{32}^2 = 1$ ;
- 6).  $a_{13}^2 = a_{22}^2 = a_{31}^2 = 1$ .

(приведены только ненулевые элементы матрицы)

Из вида решений следует, что все они отвечают ситуациям, когда оси систем координат  $Oy_1 y_2 y_3$  и  $Ox_1 x_2 x_3$  «совпадают» (ось  $Oy_i$  коллинеарна оси  $Ox_k$ ).

Заметим, что надо оставить лишь те решения, которые отвечают правой системе координат, т.е. удовлетворяют условию  $|\mathbf{A}| = 1$ .

Имеет место также неравенство

$$J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3 \geq 3I_1 I_2 I_3,$$

где  $L_i = I_2 I_3 a_{i1}^2 + I_3 I_1 a_{i2}^2 + I_1 I_2 a_{i3}^2$ .

Неравенство становится очевидным после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 J_i L_i &= 3I_1 I_2 I_3 + I_1 (I_2 - I_3)^2 (a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{22}^2 a_{23}^2 + a_{32}^2 a_{33}^2) + \\ &+ I_2 (I_3 - I_1)^2 (a_{13}^2 a_{11}^2 + a_{23}^2 a_{21}^2 + a_{33}^2 a_{31}^2) + \\ &+ I_3 (I_1 - I_2)^2 (a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{21}^2 a_{22}^2 + a_{31}^2 a_{32}^2). \end{aligned}$$

Ясно, что равенство достигается при одновременном выполнении условий

$$a_{i1} a_{i2} = 0, \quad a_{i2} a_{i3} = 0, \quad a_{i3} a_{i1} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

что возможно только в уже рассмотренных ранее случаях.

**С.А.МИРЕР. О некоторых экстремальных соотношениях  
между элементами тензора инерции твердого тела.  
Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2009, №55.**

[mirer@keldysh.ru](mailto:mirer@keldysh.ru)

***Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и  
Программы поддержки Ведущих научных школ России.***