8 Оптимальный размер заказа

8.3 Многономенклатурные поставки

При наличии на складе поставщика широкой номенклатуры продукции (товаров) встает вопрос о возможной организации, одновременной поставки потребителю n номенклатур. Аргументами в пользу объединения разных номенклатур в один заказ являются:

· требование поставщика о стоимости каждого заказа не ниже некоторой предельной величины;

· реализация полной загрузки используемых транспортных средств;

· ограничение количества отправок и их периодичности каждому клиенту (синхронизация поставок);

· снижение затрат на организацию, комплектацию партий поставок, поставляемых клиенту.

Рассмотрим составляющую затрат, связанную с многономенклатурной Поставкой от одного партнера. Очевидно, эти затраты можно

представить в виде двух составляющих: постоянной (определяемой

главным образом стоимостью транспортировки) и переменной, зависящей от объема выполняемых на складе операций при формировании заказа. Тогда для каждой iй номенклатуры затраты, связанные с организацией одной поставки, будут определяться по формуле

$$C_i^* = C_0 + C_i \quad , (8.32)$$

а для всей номенклатуры в виде одной поставки:

$$C^*(n) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=0}^{n} C_i \quad , (8.33)$$

При независимых заказах для каждой iй позиции номенклатуры расчет оптимальной величины заказа S_i, количества заказов N_i, периодичности и минимальных суммарных затрат производится по формулам (8.4), (8.6)-(8.8).

$$S = S_0 = \sqrt{\frac{2C_0 A}{C_n i}}. \qquad (8.4)$$

$$N = A/S_0, \qquad (8.6)$$

$$C_{\min} = \sqrt{2C_0 A C_n i}, \qquad (8.7)$$

$$T_З = Д_p S_0/A = Д_p/N, \qquad (8.8)$$

При подстановке C_i^* вместо C_0 суммирование $C_{\sum\min}$ по всей номенклатуре позволяет получить оценку затрат при независимой поставке каждой iй позиции:

$$C_{\sum\min}(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2(C_0 + C_i) A_i C_{Xi}} \qquad (8.34)$$

Рассмотрим один из возможных подходов к решению задачи. Запишем основное уравнение для суммарных затрат iй номенклатуры в виде

$$C_{\Sigma i} = \frac{A_i(C_0 + C_i)}{S_i} + \frac{S_i C_{Xi}}{2} \to \min. \qquad (8.35)$$

Известно, что размер iй поставки можно определить по формуле

$$S_i = T_i \frac{A_i}{D} \qquad (8.36)$$

Подставляя, получим

$$C_{\Sigma i} = D\frac{(C_0 + C_i)}{T_i} + \frac{T_i A_i C_{Xi}}{2D} \to \min. \qquad (8.37)$$

Очевидно, что при условии , т. е. одновременной поставке n позиций номенклатуры, уравнение для суммарных затрат можно представить в виде

$$C_{\Sigma} = \frac{D}{T}\sum_{i=0}^{n} C_i + \frac{T}{2D}\sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi}. \qquad (8.38)$$

Определим оптимальное значение периодичности многономенклатурной поставки , взяв производную по *T* и приравняв ее к нулю. Отсюда найдём выражение для оптимальной периодичности:

$$T_0^* = D\sqrt{2\sum_{i=0}^{n} C_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi}}. \qquad (8.40)$$

На… …ктеризующие многономенклатурную поставку:

$$C_{\Sigma n}^* = \sqrt{2\sum_{i=0}^{n} C_i \sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi}}. \qquad (8.41)$$

Кол…

$$N^* = D/T^*_0. \qquad (8.42)$$

При подстановке в формулу (8.38) после преобразований находим выражение для минимальных суммарных затрат:

$$C_{\Sigma n}^* = \sqrt{2\sum_{i=0}^{n} C_i \sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi}}. \qquad (8.43)$$

Пример 8.7. Рассмотрим последовательность расчета многономенклатурной поставки, включающей два вида продукции. Исходные данные приведены в табл. 8.13. Вначале рассчитаем параметры при независимых поставках. Так, для первого вида продукции находим EOQ:

$$S_1 = \sqrt{\frac{2(18+4)\times 3000}{1{,}5}} = 296{,}6 \cong 297 \text{ ед.}$$

Количество заказов N_1= 3000/297 = 10.

Периодичность T_1 = 365/10 = 36,5 дн.

Минимальные затраты $C_{\Sigma \min 1} = \sqrt{2 \times 3000(18+4) \times 1{,}5} = 445$ руб.

Общее количество заказов $N_\Sigma = 10 + 5 = 15.$

Общие затраты при независимых поставках

$$C_{\Sigma n} = 445 + 200 = 645 \text{ руб.}$$

На рис: 8.10 приведены составляющие суммарных затрат $C_i(T)$ для каждого вида продукции.

Выполним расчеты при условии совместной поставки (табл. 8.14).

Таблица 8.13

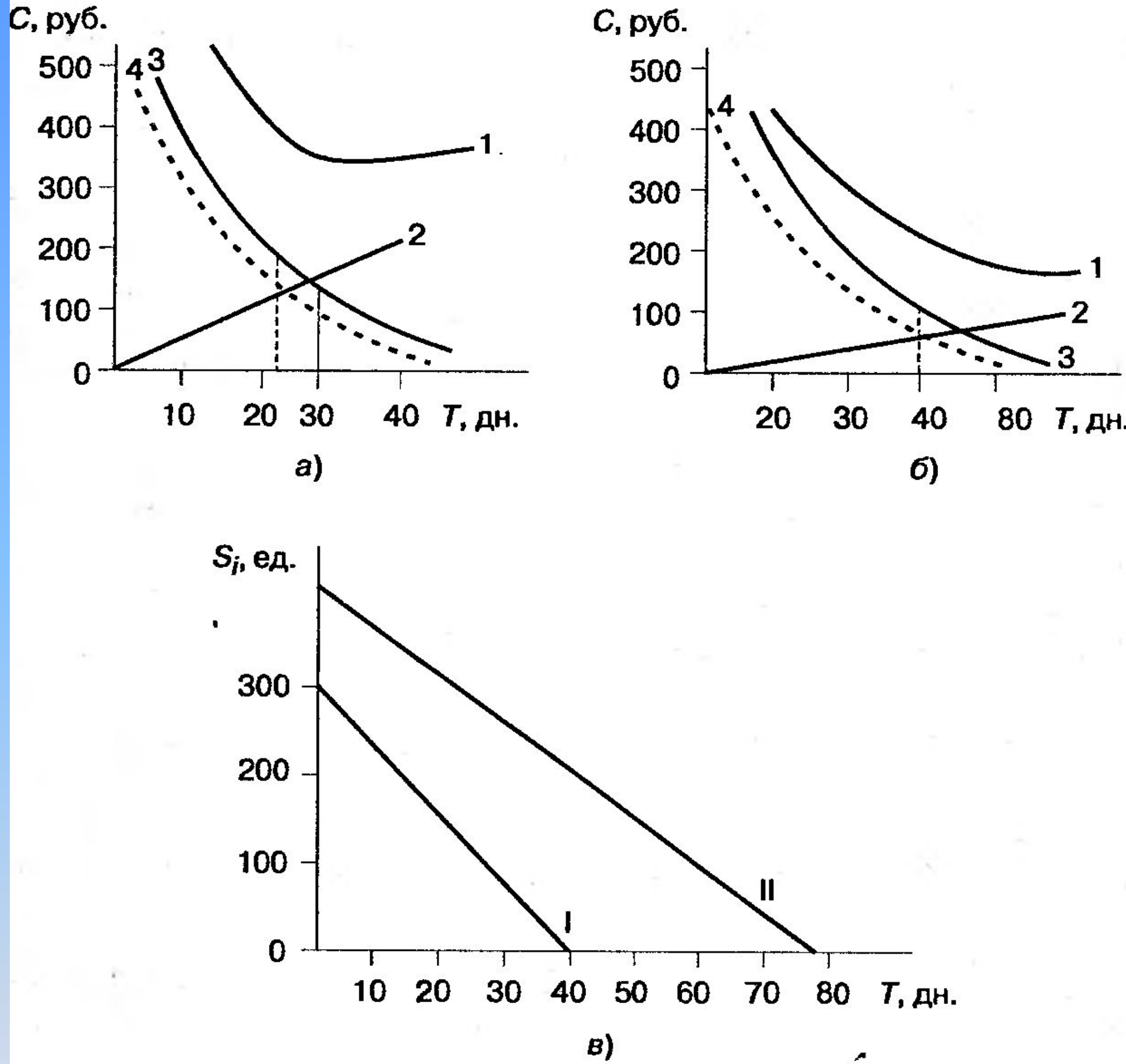
Исходные данные и результаты расчета EOQ при независимых поставках

Вид продукции	A_i, ед.	Затраты на выполнение заказа, руб.		Затраты на хранение C_{Xi}, руб./ед. год	S_i, ед.	N_i	T_i, дн.	$C_{\Sigma min}$, руб.
		C_0	C_i					
1	3000	18	4	1,5	297	10	36,5	445
2	2000	18	2	0,5	400	5	73	200
Сумма	–	–	–	–	697	15	–	645

Таблица 8.14

Результаты расчета EOQ при многономенклатурной поставке

Вид продукции	A_i	$\lambda_i = \frac{A_i}{D}$	C_{Xi}	$C_0 + \sum C_i$	$A_i C_{Xi}$	T^*_0	N	C^*_Σ	S^*_i
1	3000	8,2	1,5	18 + 4 + 2 = 24	4500	34,1	11	51,4	280
2	2000	5,5	0,5		1000				188
Сумма	–	–	–	–	5500	–	–	–	468



1 — Суммарные затраты
2 — Затраты на хранение
3 — Затраты на выполнение поставки
4 — Составляющая затрат C_0

I — Первый вид продукции
II — Второй вид продукции

Рис. 8.10. Составляющие суммарные затрат для первого (*а*) и второго (*б*) видов продукции и графики расхода $S_i(T)$ (*в*)

Время выполнения заказа:

$$C_{\sum n} = 445 + 200 = 645 \text{ руб.}$$

Количество заказов:

$$T_0^* = 365\sqrt{\frac{2\times(18+4+2)}{5500}} = 34{,}1 \text{ дн.}$$

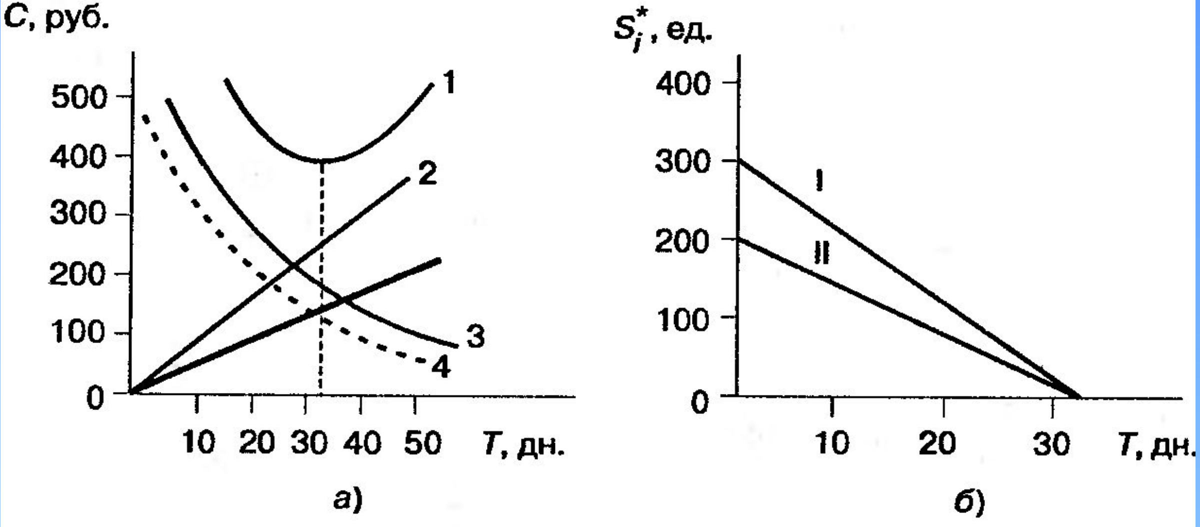
Оптимальное количество каждого вида продукции при совместной поставке:

$$S_1^* = \frac{3000\times 34{,}1}{365} \approx 280 \text{ ед.};\ S_2^* \approx 188 \text{ ед.}$$

Суммарные затраты (при T_0^* = 34 дн.):

$$C^*_{\sum n} = \sqrt{2\times 24\times 5500} = 514 \text{ руб.}$$

Соответствующие зависимости $C^*_{\Sigma n}$ и $S^*_i(T)$ при многономенклатурной поставке приведены на рис. 8.11. Из рис. 8.11 виден механизм многономенклатурности: при объединении в одну партию отправки происходит незначительное увеличение затрат, связанных с выполнением заказа.



1 — Суммарные затраты
2 — Затраты на хранение
3 — Затраты на выполнение поставки
4 — Составляющая затрат C_0

I — Первый вид продукции
II — Второй вид продукции

Рис. 8.11. Составляющие затрат (*а*) и графики расхода (*б*) при многономенклатурных поставках

Сопоставление суммарных затрат $C_{\Sigma n}$ и $C^*_{\Sigma n}$ независимых и многопродуктовых поставках показывает, что во втором случае наблюдается значительное уменьшение затрат:

$$\varphi_C = \frac{(645-514)}{645}100 = 20{,}3\%.$$

Пример 8.8. В табл. 8.15 приведены исходные данные и результаты

расчета основных параметров EOQ при независимой и одновременной поставке 9 видов продукции от одного поставщика. При расчетах

было принято, что Co = 18 у. е., а Ci = const = 2 у. е.

Из табл. 8.15 следует, что при независимых поставках их количество составляет $\sum N_i = 71$, а суммарные затраты $\sum C_{\Sigma i} = 2753$ у. е.

При подстановке в формулы (8.40)-(8.43) данных табл. 8.15 находим период одновременной поставки:

$$T_0^* = 365\sqrt{\frac{2\times(18+9\times2)}{22200}} = 21 \text{ дн.}$$

Минимальные суммарные затраты:

$$C_{\Sigma 9} = \sqrt{2\times(18+9\times2)\times22\,200} = 1264 \text{ у. е.}$$

Количество заказов: $N^* = 365/21 \approx 18.$

Таким образом, применение многономенклатурной поставки позволяет снизить суммарные затраты на:

$$\varphi_C = \frac{2753-1264}{2753}\times100 \approx 40\%.$$

Учет ограничений. При расчете многономенклатурных поставок особое значение приобретает учет ограничений, связанных с объемом(площадью) и грузоподъемностью транспортных средств, объемом (площадью) складских помещений, наличием средств для приобретения всей партии и т. д. Следует отметить, что такие же ограничения должны учитываться при однономенклатурных поставках.

Проведенные расчеты показали, что в общем виде учет ограничений указанных параметров производится с использованием формулы

$$T_V = \frac{G_V}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i q_i}, \tag{8.44}$$

где G_V - предельные значения физического или экономического показателя;

$\lambda = A_i/D$ - интенсивность потребления (расхода) iго продукта, ед./день;

q_i - физический или экономический показатель iго продукта.

Если период многономенклатурной поставки $T^*_0 \le T_V$, то ее параметры рассчитываются по формулам (8.43).

Если $T^*_0 > T_V$, то в качестве расчетного периода принимается T_v и производится корректировка N^*_i, S^*_i и $C^*_\Sigma(T_V)$:

$$S^*_i = \frac{A_i}{D} T_V; \tag{8.45}$$

$$N^* = D/T_V; \tag{8.46}$$

$$C^*_\Sigma(T_V) = \frac{D\sum_{i=0}^{n} C_i}{T_V} + T_V \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi}}{2D}. \tag{8.47}$$

При ... териев: $T^*_V = \min(T_V, T_q, T_C \dots)$, T_V, T_q, T_C - периоды времени, рассчитанные по формуле (8.44) ... критериев: объем, вес, затраты и т. п.

Пример 8.9. Рассмотрим многономенклатурную поставку (n= 3) с учетом ограничения на объем кузова автомобиля $V_0 = 16$ м^3. Исходные данные, включающие также объем каждой единицы продукции V_i, приведены в табл. 8.16.

Таблица 8.16

Исходные данные и результаты расчета параметров при независимых поставках с учетом ограничения

Вид продукции	A_i, ед.	C_{ni}, у. е.	C_{Xi}, у. е.	$C_0 + C_i$, у. е.	V_i, м^3	S^*_{oi}, ед.	N_i	T_i, дн.	C_Σ	Проверка ограничения $V \le V_0$
1	1000	5	1	18 + 2 = = 20	0,04	200	5	73	200	8 < 16
2	600	3	0,6	18 + 4 = = 22	0,08	210	2,86 (3)*	127,6 (128)*	126	16,8 ≤ 16
3	400	6	1,2	18 + 6 = = 24	0,20	126,5	3,16 (3)*	115,5 (121)*	151,8	25,3 > 16
3**						80	5	73	168	16
Сумма	–						11	–	494	–

* Округленные значения.

** Вариант с учетом ограничений.

На первом этапе определим параметры однономенклатурных отправок и проверим ограничения на объем кузова. Результаты расчетов показывают, что если для второго вида продукции использование данного типа автомобиля является спорным, то для третьего вида необходимо откорректировать параметры поставки.

Подстановка в формулы данных табл. 8.16 позволяет получить периодичность поставки с учетом ограничения, число поставок, размер поставки, суммарные затраты:

$$T_{V3} = \frac{16 \times 365}{400 \times 0{,}2} = 73 \text{ дн}$$

$$N^* = \frac{365}{73} = 5;$$

$$S^*_i = \frac{400}{5} = 80 \text{ ед.};$$

$$C_{\Sigma 3} = \frac{400 \times 24}{80} + \frac{80 \times 1{,}2}{2} = 168 \text{ у. е.}$$

На втором этапе рассчитываются параметры многономенклатурной поставки:

$$T^* = 365\sqrt{2\times(18+2+4+6)/1840} = 66 \text{ дн.},$$

$$C^*_{\Sigma} = \sqrt{2\times(18+2+4+6)\times 1840} = 332 \text{ у. е.}$$

Таблица 8.17

Исходные данные и результаты расчета параметров при многономенклатурной поставке с учетом ограничений

Вид продукции	A_i, ед.	C_{xi}, у. е.	$A_i C_{xi}$, у. е.	C^*, у. е.	T^*, дн.	N_i	$C_{\Sigma n}$, у. е.	S^*_i, ед.	$S^*_i \times V_i$, м³	S^*_{ik}, ед.
1	1000	1	1000	18 + 2 + + 4 + 6 = = 30	66	5,5 (6)	332	180	7,2	96
2	600	0,6	360					108	8,64	58
3	400	1,2	420					72	14,4	36
Сумма	–	–	1840	–				360	30,24	222

На третьем этапе проверим ограничение по объему кузова. Из сравнения $\Sigma S^*_i V_i = 30{,}24$ м³ с допустимым значением $V_0 = 16$ м³ следует, что параметры многономенклатурной поставки должны быть откорректированы.

Рассчитаем T_v по формуле (8.44):

$$T_V = \frac{16\times 365}{(1000\times 0{,}04 + 600\times 0{,}08 + 400\times 0{,}2)} = \frac{16\times 365}{168} = 35 \text{ дн.}$$

$$N^*_K = \frac{365}{35} = 10{,}4;$$

$$S^*_{1K} = 96 \text{ ед.}; \; S^*_{2K} = 58 \text{ ед.}; \; S^*_{3K} = 38 \text{ ед.};$$

$$C^*_{\Sigma K} = \frac{30\times 365}{35} + \frac{35\times 1840}{2\times 365} = 401 \text{ у. е.}$$

Таким образом, даже с учетом ограничений, затраты при многономенклатурных поставках значительно ниже, чем при независимых поставках.

Многономенклатурные поставки по системе кратных периодов.

В 1966 г. профессором Ю. И. Рыжиковым была предложена стратегия организации поставок, суть которой сводилась к объединению преимуществ, свойственных независимым поставкам с оптимальными периодичностями T_i и многономенклатурными поставками с периодичностью *T*. Для этого вводится система кратных периодов, когда по крайней мере одна номенклатура заказывается в каждом базисном периоде *T*, а остальные позиции номенклатуры поставляются с периодичностями kT (k = 1,2,3).

Оптимальный период группирования определяется по формуле

$$T^*_{\Gamma} = D\sqrt{2(C_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{k_i}) / \sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi} k_i}. \qquad (8.49)$$

Данному периоду соответствуют минимальные затраты:

$$C^*_{\sum\Gamma} = \sqrt{2(C_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{k_i})\sum_{i=1}^{n} A_i C_{Xi} k_i}. \qquad (8.50)$$

Не вдаваясь в подробности разработанного алгоритма поиска конфигурации группировок позиций номенклатуры, укажем несколько его этапов.

1. Позиции номенклатуры ранжируются по возрастанию величин показателей D^2C_i/A_iC_{Xi}. Нетрудно заметить, что ранжирование производится фактически с учетом периодичности независимой поставки каждой позиции номенклатуры T_i.
2. Выбирается начальное приближение для кратного периода; за основу принимается первое значение ранжированного ряда:

$$T_0 = D\sqrt{2(C_0 + C_1)/A_1C_{X1}}. \qquad (8.51)$$

3. Рассчитывается набор коэффициентов $k_i = T_i/T_0$ с помощью которых производится формирование базового варианта групп различной кратности.
4. Каждая позиция номенклатуры закрепляется за определенной группой.

По формулам (8.48) и (8.49) для базового варианта рассчитываются показатели $T^*_Г$ и $C^*_Г$ тем с использованием итерационной процедуры (путем перебора и размещения позиций номенклатуры в группах различной кратности) осуществляется поиск оптимального варианта по критерию минимума суммарных затрат $C^*_Г$.

$$T_0 = D\sqrt{2\sum_{i=0}^{j} C_i / \sum_{i=1}^{j} A_i C_{Xi}}. \qquad (8.52)$$

Присоединение к первой группе следующих позиций номенклатуры целесообразно при соблюдении неравенства:

$$C_{j+1} D^2 > A_{j+1} C_{X1j+1} \times T^2. \qquad (8.53)$$

Тогда условие прекращения накопления группы записывается в виде

$$\frac{C_{j+1}}{A_{j+1} \times C_{X1,j+1}} > 2\sum_{i=0}^{j} C_i / \sum_{i=1}^{j} A_i C_{Xi}. \qquad (8.54)$$

Проверка рекуррентного соотношения начинается со второй позиции номенклатуры, при этом в правой части подставляются значения

$$\sum_{i=0}^{j} C_i = C_0 + C_1 \text{ и } A_1 C_{X1}$$

При выполнении условия (8.54) для всех последующих позиций i > j вычисляется оптимальная периодичность T_i и по отношению T_i / T_0 - начальная кратность.

Пример 8.10. В табл. 8.18 приведены данные о двух видах продукции. Попытаемся ответить на вопрос о целесообразности применения стратегии кратных периодов.

Таблица 8.18

Исходные данные и результаты расчета при независимой поставке

Вид продукции	A_i, ед.	C_0, у. е.	C_i, у. е.	C_{xi}, у. е.	$C_{\Sigma n}$, у. е.	T_i, дн.	S_i, ед.	N_i
1	3000	18	6	1,5	465	37,7	310	9,67 (10)
2	500	18	6	0,5	110	166	227	2,2 (2)
Сумма	–				575	–		12

1. $$T^* = 365\sqrt{2(18+6+6)(4500+250)} = 41 \text{ дн.}$$

$$C^*_{\sum n} = \sqrt{2 \times 30 \times 4750} = 534 \text{ у. е.}$$

Поскольку $C_{\Sigma n} = 575 > C^*_{\Sigma n} = 534$ объединение в 1 поставку целесообразно.

2. $$T^*_{k=2} = 365\sqrt{2(18+6+\frac{6}{2})/(4500+2\times 250)} = 38 \text{ дн.}$$

$$C^*_{\sum n(rk=2)} = \sqrt{2 \times 27 \times 5000} = 520 \text{ у. е.}$$

Следовательно, при организации кратных поставок суммарные затраты меньше затрат с независимой, а также совместной (одновременной) поставкой, т. е. $C_{\Sigma 2} > C^*_{\Sigma 2} > C^*_{\Sigma}(k=2)$.

3.

Таблица 8.19

Результаты расчета параметров поставок при различных коэффициентах кратности

Коэффициент кратности k_i	$C_0 + \sum \frac{C_i}{k_i}$	$\sum A_i C_{xi} k_i$	$T(k_i)$	$C_\Sigma(k)$
2	27	5000	38,9	519,6
3	26	5250	36,3	522,5
4	25,5	5500	35,1	529,6
5	25,2	5750	34,7	538,3

Поскольку минимум суммарных затрат $C_\Sigma(k)$ наблюдается при k = 2, можно выбрать следующую стратегию кратных поставок: через каждые 38 дн. поставляется первый вид продукции; второй вид продукции - совместно с первым, через 76 дн.

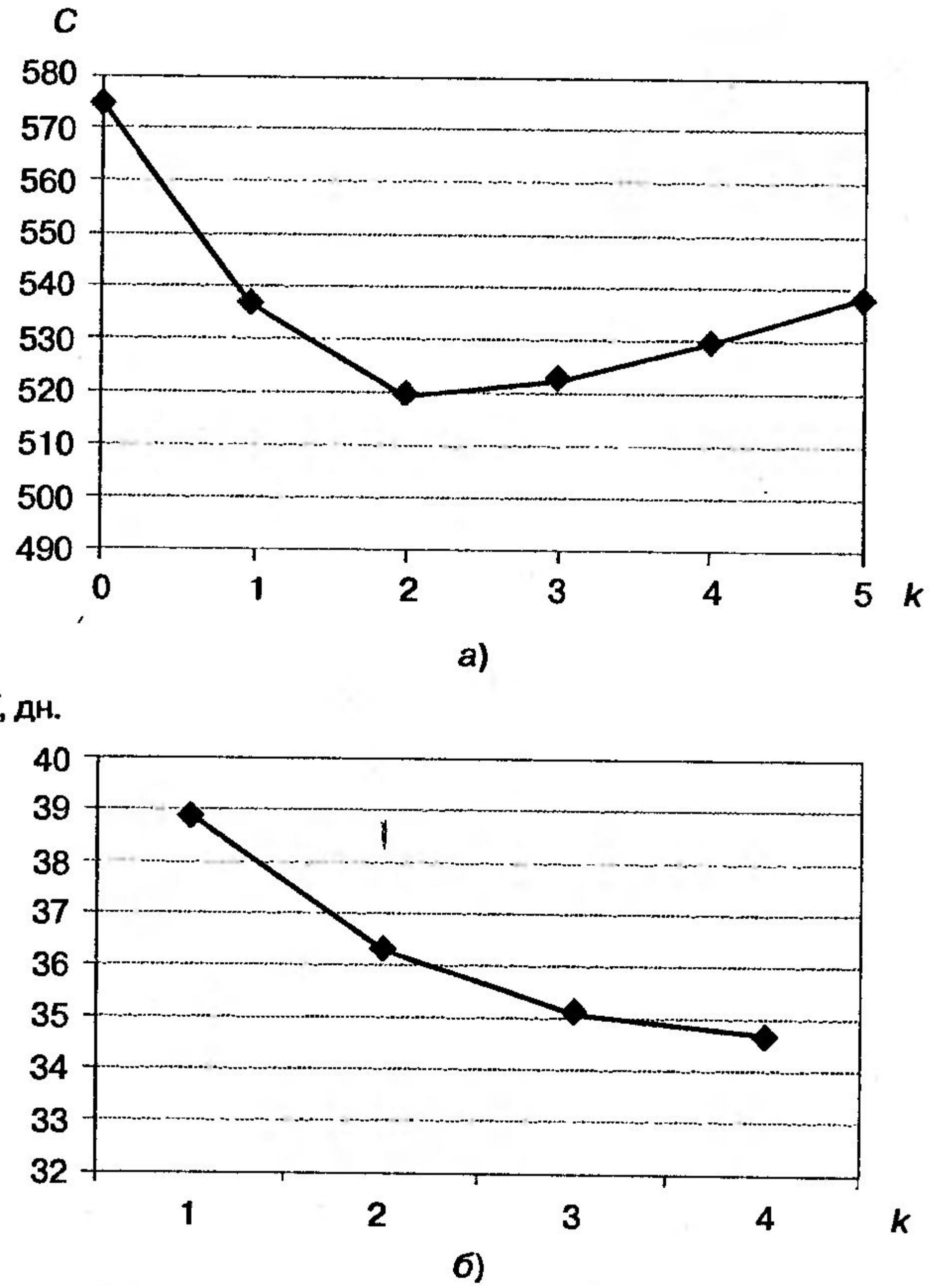


Рис. 8.12. Зависимости суммарных затрат $C_\Sigma(k)$ и периода поставок от коэффициента кратности k: *а* — суммарные затраты $C_\Sigma(k)$; *б* — период поставок $T(k)$

Пример 8.11. В табл. 8.20 приведены исходные данные о четырех видах продукции. Требуется выбрать наилучшую стратегию поставок.

Допустим, что предварительно были рассчитаны параметры независимых поставок каждого вида продукции и приведено их ранжирование.

Определим коэффициенты кратности k_i относительно начального приближения T_0 = 37,7 дн. На основании выберем базовый вариант кратности поставок:

· первый и второй вид продукции - k = 1;

. третий вид - k = 2;

. четвертый вид - k = 4.

Рассчитаем составляющие формул (8.49), (8.50) для базового варианта кратных периодов:

$$C_0+\sum_{i=1}^{4}\frac{C_i}{k_i}=18+6+4+\frac{4}{2}+\frac{6}{4}=31,5 \text{ у. е.}$$

$$\sum_{i=1}^{n}A_iC_{Xi}k_i=3000\times1,5\times1+2000\times1\times1+1000\times0,5\times2+500\times0,5\times4=8500 \text{ у. е.}$$

$$T^*(k)=365\sqrt{2\times31,5/8500}=31 \text{ дн.}$$ - оптимальный период.

$$C_\Sigma(k)=\sqrt{2\times31,5\times8500}=726 \text{ у. е.}$$ - минимум суммарных затрат.

Учитывая, что при одновременной поставке 4 видов продукции суммарные затраты $C^*_{\Sigma 4}=742$ у. е. (при T = 37,4 дн.), следует выбрать стратегию кратных периодов, позволяющих снизить суммарные затраты до 726 у. е.

Таблица 8.20

Исходные данные и результаты расчета при независимой поставке

Вид продукции	A_i, ед.	C_0, у. е.	C_i, у. е.	$C_0 + C_i$, у. е.	C_{Xi}, у. е.	T_i, дн.	$C^*_{\Sigma i}$, у. е.	k_i	Базовый вариант k_i
1	3000	18	6	24	1,5	37,7	465	1	1
2	2000		4	22	1,0	38,3	297	1,01	1
3	1000		4	22	0,5	76,6	148	2,03	2
4	500		6	24	0,5	168,5	109	2,47	4
Сумма							1019		

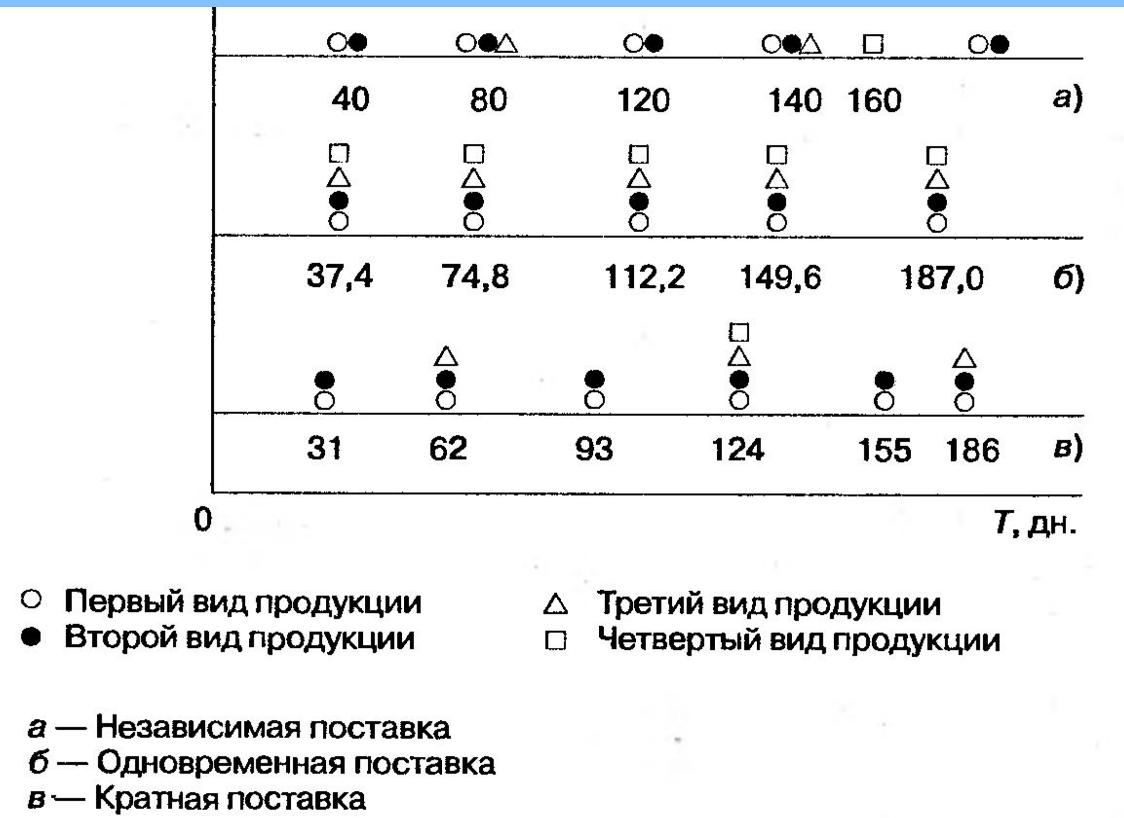


Рис. 8.13. Различные варианты стратегии многономенклатурных поставок

8.4. Многопродуктовые заказы

Ранее считалось, что каждый вид продукции не зависит от остальных и он хранится на складе самостоятельно. Однако для промышленных предприятий, а также предприятий розничной и оптовой торговли условия независимости видов продукции друг от друга могут быть нарушены. Основными причинами возникновения взаимосвязи между *N* видами продукции, поставляемой на склад, являются следующие ограничения:

· максимальный размер капитала *B*, который предполагается вложить в запасы;

. площадь (объем) склада, где размещаются одновременно *N* видов продукции;

. верхний предел общего числа заказов за определенный период и др.

Помимо указанных одиночных ограничений могут возникнуть ситуации, когда требуется соблюдение нескольких из них или всех одновременно.

Рассмотрим задачу, учитывающую ограничения на максимальный размер капитала, подробнее.

На первом этапе рассчитываются оптимальные партии поставок S_{oi}; по каждому i-му виду продукции (i = 1,... N) по формуле (8.4).

$$S = S_0 = \sqrt{\frac{2C_0 A}{C_n i}}. \qquad (8.4)$$

На втором этапе сравниваются затраты, связанные с запасами продукции и капиталом *B*, выделенным на приобретение продукции:

$$B \geq k\sum_{i=1}^{N} S_{oi} C_{\Pi i}, \qquad (8.55)$$

где k - коэффициент, введенный для учета неодновременности поступления i-х видов продукции; $0 < k \leq 1$ (часто принято k = 0,5).

Если неравенство (8.55) соблюдается, то поставки осуществляются в объемах, рассчитанных по формуле (8.4). Соответственно переменные затраты на выполнение заказа и хранение при многопродуктовой поставке определяются по формуле:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2A_i C_{oi} C_{\Pi i}\beta}, \qquad (8.56)$$

где β - доля от цены C_Π, приходящейся на затраты по хранению (аналогична *i* в формуле (8.4)).

Третий этап, когда неравенство (8.54) не соблюдается. Для расчета оптимальных значений S_{oi} применяется метод множителей Лагранжа. Исходное уравнение - функция Лагранжа - записывается в виде

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{A_i C_{oi}}{S_i} + \frac{S_i C_{\Pi i}\beta}{2}\right) + z\left(B - k\sum_{i=1}^{N} S_i C_{\Pi i}\right), \qquad (8.57)$$

где *i* - индекс, указывающий вид продукции, *i* = 1, ... *N*; *z* - неопределенный множитель Лагранжа, $z \leq 0$.

Оптимальные значения S_{oi} определяются из решения системы, включающей *N* уравнений типа $\frac{dC_\Sigma}{dS_i}=0$ и уравнения $\frac{dC_\Sigma}{dZ}=0$. Доказано, что данная система имеет *N* решений вида

$$S_{oi}=\sqrt{\frac{2A_iC_{oi}}{C_{\Pi i}(\beta-2kz^*)}},\ i=1,2,\ldots,N, \qquad (8.58)$$

где - такое значение множителя *z*, при котором удовлетворяется равенство (8.55).

$$N_{\Pi i}=\frac{A_i}{S_i}, \qquad (8.59)$$

$$T_i=\frac{D}{N_{\Pi i}}. \qquad (8.60)$$

D – рассматриваемый период. Для расчета минимальных переменных затрат выведена формула

вана:

$$C_{\Sigma 1}=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2A_iC_{oi}Cn_i(\beta-2kz)}. \qquad (8.61)$$

$$C_{\Sigma 2}=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2A_iC_{oi}C_{ni}}\left(\frac{\beta-kz}{\sqrt{\beta-2kz}}\right), \qquad (8.62а)$$

$$C_{\Sigma 2}=C_{\Sigma 1}\times\left(\frac{\beta-kz}{\beta-2kz}\right). \qquad (8.62б)$$

Таким образом, суммарные затраты, включающие затраты на приобретение запасов *B*, затраты на выполнение заказов и хранение запасов, будут равны

$$C_\Sigma^*=B+C_{\Sigma 2}, \qquad (8.63)$$

Для определения множителя Лагранжа *z* в литературе рассмотрены три варианта.

Первый, наиболее распространенный, базируется на численном методе решения.

Второй вариант рекомендует в качестве первого приближения *z* эмпирическую зависимость.

Третий вариант, предложенный Ю. И. Рыжиковым, записывается в виде:

$$z^{*} = \left[\beta - (kV/B)^{2}\right]/2k, \qquad (8.64)$$

где $V = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2 A_i C_{oi} C_{ni}}$

Таким образом, последовательность определения параметров многопродуктовых поставок сводится к следующему:

- выбираем вариант расчета множителя Лагранжа *z*;
- рассчитываем величины поставок каждого вида продукции S_{oi}, формула (8.58), и минимальных переменных издержек $C_{\Sigma i}$, формула (8.62а) или (8.626);
- определяем количество поставок N_{ni}, формула (8.59), и их периодичность T_i, формула (8.[illegible]), для каждого вида продукции.

Пример 8.12. Рассчитаем параметры многопродуктовой поставки при наличии ограничений на капитал. При расчетах принято

$B = 3600$ у. е.; $\beta = 0{,}2$; $k = 1$.

Суммарные затраты на приобретение оптимальных партий поставок:

$$\sum_{i=1}^{N} S_{oi} C_{ni} = 2682 + 3160 + 2682 = 8524 \text{ у. е.}$$

превышает *B* = 3600 у. е., т. е. неравенство (8.55) не соблюдается.

Воспользуемся ЧМ определения множителя *z*, последовательно рассчитывая оптимальные величины S_{oi} по формуле (8.58) и суммируя затраты на закупку. Так, при *z* = -0,2 находим:

$$S_{o1} = \sqrt{\frac{2 \times 12\,000 \times 20}{3(0{,}2 - 2 \times 1 \times (-0{,}2))}} = 516 \text{ ед.}$$

$$S_{o2} = 912 \text{ ед.}, S_{o3} = 258 \text{ ед.}$$

$$\sum_{i=1}^{3} S_{oi} C_{ni} = 516 \times 3 + 912 \times 2 + 258 \times 6 = 4922 \text{ у. е.}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 8.22, из которой видно, что множитель Лагранжа может быть принят

$$z^* = -0{,}45.$$

Таблица 8.21

Исходные данные и результаты расчета при независимых однопродуктовых поставках

Вид продукции	A_i, ед.	C_{ni}, у. е.	$C_{ni}\beta$, у. е.	C_{oi}, у. е.	S_{oi}, у. е.	$S_{oi}C_{ni}$
1	12000	3	0,6	20	894	2682
2	25000	2	0,4	20	1580	3160
3	6000	6	1,2	20	447	2682

Таблица 8.22

Определение множителя Лагранжа

z	$S_{o1}\,C_{n1}$	$S_{o2}\,C_{n2}$	$S_{o3}\,C_{n3}$	$\Sigma S_{oi}\,C_{ni}$	$B - \Sigma S_{oi}\,C_{ni}$
0	2682	3160	2682	8524	–4924
–0,2	1549	1824	1549	4922	–1322
–0,4	1200	1414	1200	3814	–200
–0,45	1140	1343	1140	3623	–23
–0,50	1095	1291	1095	3481	119

По формуле (8.64). При подстановке данных табл. 8.21:

$$V=\sqrt{2\times 12\,000\times 3\times 20}+\sqrt{2\times 25\,000\times 2\times 20}+\sqrt{2\times 6000\times 6\times 20}=3814;$$

$$z^{*}=\left[0{,}2-\left(\frac{3814}{3600}\right)^{2}\right]\times 2=-0{,}46.$$

$$C_{\Sigma 1}=3814\sqrt{0{,}2-2(-0{,}46)}=4036 \text{ у. е.}$$

$$C_{\Sigma 2}=3814\frac{0{,}2-(-0{,}46)}{\sqrt{0{,}2-2(-0{,}46)}}=2379 \text{ у. е.}$$

$$C^{*}_{\Sigma}=3600+2379=5979 \text{ у. е.}$$

$$S^{*}_{o1}=\sqrt{\frac{2\times 12\,000\times 20}{3\times(0{,}2-(-0{,}46))}}=376 \text{ ед.};\ S_{o2}=664 \text{ ед.};\ S_{o3}=118 \text{ ед.}$$

$$N_{1}=\frac{12\,000}{376}=32;\ N_{2}=38;\ N_{3}=32.$$

$$T_{1}=\frac{365}{32}=11 \text{ дн.};\ T_{2}=9{,}6 \text{ дн.};\ T_{3}=11{,}4 \text{ дн.}$$

Результаты расчетов многопродуктовых поставок при различных *B* и *k* приведены на рис. 8.14 и 8.15.

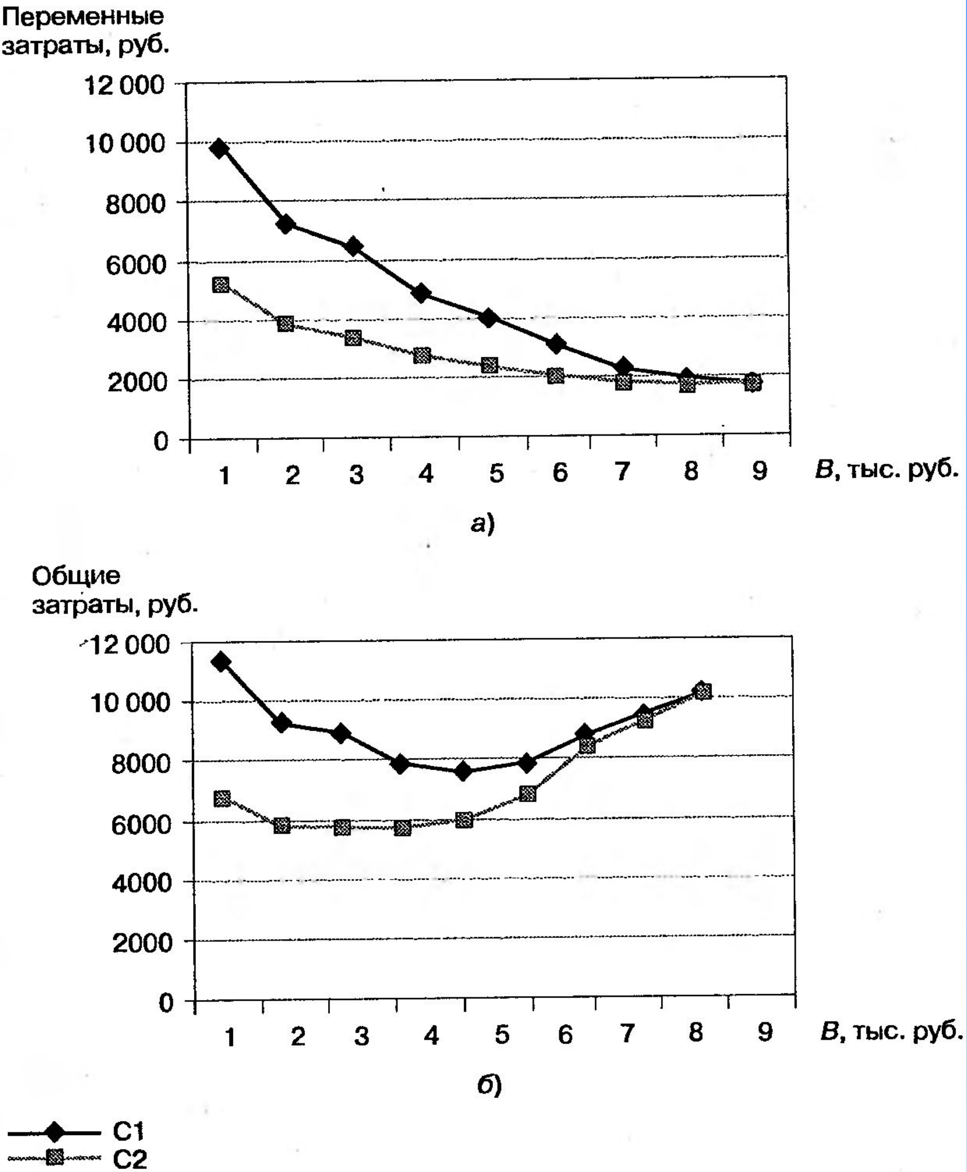


Рис. 8.14. Зависимость переменных (а) и общих (б) затрат от ограничения на капитал *B* (при *k* = 1): *C*1 — расчет по формуле (8.61); *C*2 — расчет по формуле (8.62)

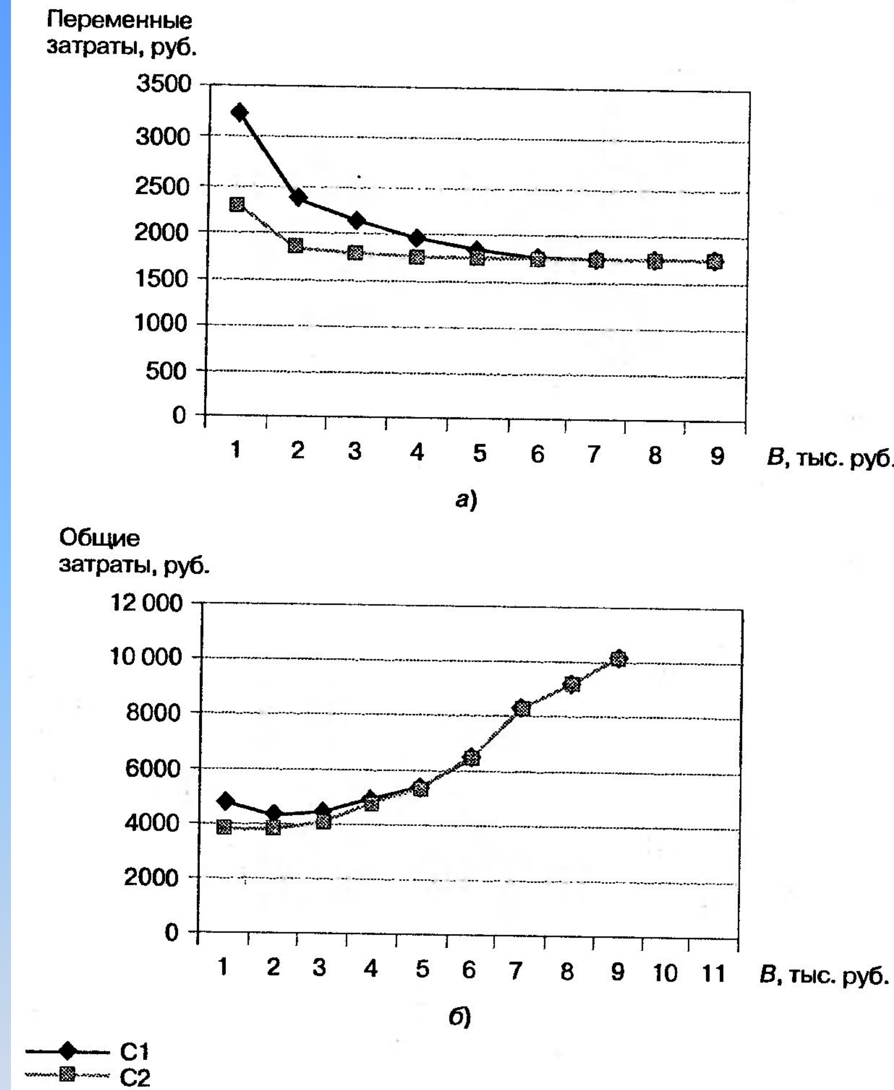


Рис. 8.15. Зависимость переменных (а) и общих затрат (б) от ограничения на капитал *B* (при *k* = 1/2)): *C*1 — расчет по формуле (8.61); *C*2 — расчет по формуле (8.62)

Из анализа полученных зависимостей следует:

- общие затраты имеют минимум, положение которого меняется в зависимости от разных факторов, и в частности от величины коэффициента неодновременности поступления различных видов продукции *k*;
- при расчете переменных затрат по формулам (8.61) и (8.62) наблюдается значительное расхождение результатов, поэтому для практических расчетов следует использовать формулы (8.62).

Алгоритм принятия решения по многопродуктовым поставкам при ограничениях на капитал представлен на рис. 8.16.

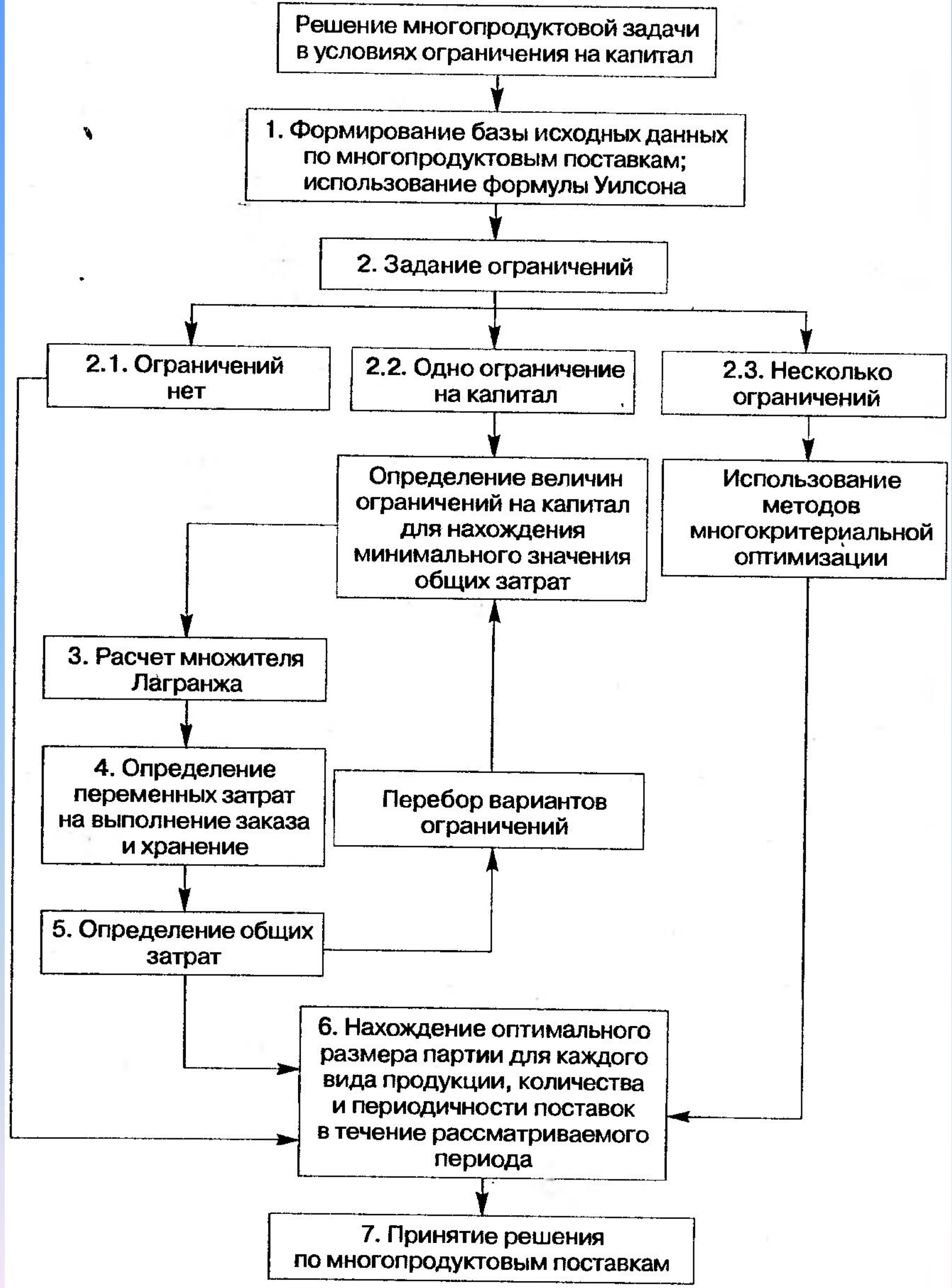


Рис. 8.16. Алгоритм принятия решения при многопродуктовых поставках

Из рис. 8.16 следует, что алгоритм включает три варианта решения многопродуктовых задач.

Первый вариант - отсутствие ограничений; для определения оптимальных параметров многопродуктовых поставок используется формула Уилсона.

Второй вариант предусматривает наличие одного ограничения на капитал, которое может быть задано в виде неравенства, формулы (8.54), либо в виде различных величин ограничений на капитал, необходимых для нахождения минимального размера общих затрат.

Третий вариант предусматривает наличие нескольких ограничений; в этом случае при принятии решения по многопродуктовым поставкам необходимо использовать методы многокритериальной оптимизации.

Очевидно, что, несмотря на четкость описанной последовательности вычислений, представляет интерес поиск аналитических зависимостей, позволяющих производить расчеты в «замкнутой» форме и, следовательно, анализировать всевозможные варианты многопродуктовой задачи. Продолжим вычисления.

Во-первых, при подстановке z^*, формула (8.64), в уравнение (8.58) для величин партий поставки с учетом ограничений после упрощений находим

$$S_i^* = \frac{B}{kV}\sqrt{\frac{2A_iC_{oi}}{C_{ni}}}. \qquad (8.65)$$

Во-вторых, выполнив аналогичные преобразования, получим аналитическое решение для переменных затрат, включающих затраты на выполнение заказов и хранение продукции:

$$C^*_{\Sigma 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{kV^2}{B} + \frac{B\beta}{k}\right). \qquad (8.66)$$

$$C_T^* = \frac{kV^2}{2B}. \qquad (8.67)$$

ыполнение заказа.

$$C_X^* = \frac{B\beta}{2k}. \qquad (8.68)$$

анение.

В-третьих, определим общие затраты

$$C^*_{\Sigma}(B) = B + \frac{1}{2}\left(\frac{kV^2}{B} + \frac{B\beta}{k}\right). \qquad (8.69)$$

Отсюда оптимальное значение капитала вложенного в запасы:

$$B^* = kV\sqrt{\frac{1}{2k+\beta}}. \qquad (8.71)$$

При ... находим оптимальную величину общих затрат:

$$C^*_{\text{опт}} = \sqrt{2k+\beta} \times \sum_{i=1}^{N}\sqrt{2A_iC_{oi}C_{ni}}. \qquad (8.72)$$

Можно сделать следующие выводы:

- Оптимизация общих затрат приводит к их абсолютному уменьшению по сравнению с первоначальным вариантом (отсутствие ограничений на капиталовложения в запасы). В то же время наблюдается существенный рост переменных затрат, тенденции изменения которых имеют противоположный характер: затраты, связанные с выполнением заказов, существенно возрастают из-за уменьшения величин партии поставок и роста их количества.
- Полученные аналитические зависимости позволяют в «замкнутой форме» приводить оценку влияния различных показателей, связанных с многопродуктовыми поставками,на составляющие общих затрат - капиталовложения в запасы,затраты на поставку и затраты на хранение продукции.
- Наличие оптимальной величины общих затрат является областью принятия стратегических компромиссных решений различных служб предприятия, отвечающих за закупку, транспортировку и хранение продукции.
- Дальнейшее развитие методов решения многономенклатурных и многопродуктовых задач требует активного привлечения финансовой логистики, т. е. аналитического инструментария исследования динамики финансовых потоков.

8.5. Перспективы развития модели EOQ

Модель EOQ занимает центральное место в теоретической логистике. Рассмотрим 2 примера. В работе [16] приведены данные о поставках металлопродукции железнодорожным транспортом и получена формула для определения оптимальной величины заказа:

$$\mathrm{P}_{опт} = \frac{bT_k A}{З_{пр} С_х} \quad (8.73),$$

где b-масштабный коэффициент (принят b=1); T_k - тариф за поставку одной транзитной или складной нормы, руб/вагон; А – суммарный спрос за рассматриваемый период (тонн в год); $З_{пр}$ – норма производственного запаса, т; $С_х$ – стоимость хранения 1т проката запаса, руб/т.

Согласно [16], входящая в формулу (8.72) норма производственного запаса $З_{пр}$ включает: $З_{пр} = З_п + З_с + 0.5P$, (8.74)

Где $З_{пр}$ – подготовительный запас, т; $З_с$ – страховой запас, т; P – текущий запас, т.

Исходные данные для расчета по формуле (8.73): А = 32 тыс. т в год; = 2730 руб./вагон; = 50 руб./т в год; = 2040 т. Помимо этого, указано, что стоимость одной тонны металла = 2900 руб. При подстановке находим:

$$\mathrm{P}_{опт} = \frac{1x2730x32000}{2040x50} = 856т.$$

При загрузке одного вагона $Q_B = 60\text{т}$ получим количество вагонов при поставке $P_{опт}$:

$$n_B = \frac{865}{60} \approx 14{,}2 \cong 14 \text{ вагонов.}$$

На первый взгляд, формула (8.73) не вызывает особых возражений, за исключением производственного запаса $З_{пр}$, составную часть которого, а именно Р – текущий запас, и требуется определить. Запишем выражение для общих затрат

$$C_\Sigma = \frac{bT_kA}{P} + (З_п + З_с + 0.5P)C_x.$$

Решим уравнение d $C_\Sigma/dP =$ 0

$$\frac{dC_x}{dP} = \frac{bT_kA}{p^2} + 0.5C_x$$ (8.76)

Отсюда $P^*_{опт} = \sqrt{\frac{2bT_kA}{C_x}}$ (8.77) – это формула Уилсона. При подстановке исходных данных получим:

$P^*_{опт} = \sqrt{\frac{2x1x2730x32000}{50}}$ ли n=31 вагон.

С одной стороны величина $P^*_{опт}$ значительно превосходит $P_{опт}$, но с другой стороны, формула (8.77) не содержит противоречивого производственного запаса $З_{пр}$, включающего текущий запас.

Рассмотрим последовательность вывода формулы (8.73).

=a$З_{пр}$и далее считается, что *a* является постоянной величиной. Это позволяет записать уравнения для общих затрат в виде:

(8.79).

$$C_{\Sigma} = \frac{bT_k A}{P} + aPC_x \rightarrow min$$

После дифференцирования получим

+a =0. (8.80)

$$-\frac{bT_k A}{p^2}$$

Следующий шаг вызывает недоумение, так как в уравнение (8.80) подставляется значение *а*= $\frac{З_{пр}}{P}$, формула (8.78), и после упрощений приходим к формуле (8.73). Ошибка состоит в том, что *а* не является постоянной величиной, поскольку при вынесении за скобку Р в правой части формулы (8.74) получим:

$$S_{пр}=\left(\frac{З_п}{P}+\frac{З_с}{P}+0{,}5\right)P \quad (8.81)$$

Таким образом *а* - переменная величина, зависящая от текущего запаса, поэтому операция дифференцирования должна выполнятся для функции :

$$\frac{bT_k A}{P}+\left(\frac{З_п}{P}+\frac{S_c}{P}+0{,}5\right)PC_x \to min \quad , (8.82)$$

Что приводит к формуле (8.77).

Однако выявленная неточность не является главной, поскольку полученный по формуле (8.83) результат некорректен. Как только величина $q_{опт}$ превысит массу одного вагона, необходимо заказывать дополнительный подвижной состав. Но в этом случае затраты возрастут, т.е. при двух вагонах они составят 5460 руб, по формуле(8.77):

$$q^*_{опт}=\sqrt{\frac{2x2x2730x32000}{50}}=2644 \text{ т}$$

агона и так далее. Очевидно, что в данной постановке задача не имеет оптимального решения с точки зрения минимизации затрат на выполнение заказа и хранение продукции. Таким образом несоблюдение ограничений приводит к ошибочным расчетам величины EOQ.

Рассмотрим модификации формулы Уилсона – модель с постепенным пополнением запаса и равномерным потреблением (EPQ). Отличие данной модели заключается в том, что разгрузка и пополнение запаса происходит не мгновенно, а постепенно, с интенсивностью μ=S/т, где S – оптимальный размер заказа, т – период разгрузки.

При формировании таблицы 8.26 были введены следующие обозначения:

Оптимальная партия заказа:

- $S = \sqrt{\frac{2AC_0}{C_x}}$,
- $\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\mu-\lambda}}$; - поправочный коэффициент для модели EPQ.
- $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\mu-\lambda\left(-\left(\frac{C_x}{C_x}\right)\right)}}$ .85) – для откорректированной модели EPQ

Таблица 8.26

Традиционные и откорректированные зависимости для параметров модели EPQ

Параметр модели	Традиционный вариант		Откорректированный вариант	
	$\mu > \lambda$	$\mu = \lambda$	$\mu > \lambda$	$\mu = \lambda$
Оптимальная партия поставки, $S^*_{опт}$, ед.	$S\alpha$	∞	$S\beta$	$\sqrt{\dfrac{2AC_o}{C_X^*}}$
Максимальная партия, поступившая на склад, S^*_{max}, ед.	S/α	0	$S\beta/\alpha^2$	0
Количество поставок N^* в плановый период D	$\dfrac{A}{S\alpha}$	0	$\dfrac{A}{S\beta}$	$\sqrt{\dfrac{AC_X^*}{2C_o}}$
Периодичность поставки T^*, дн.	$D\dfrac{S\alpha}{A}$	∞	$D\dfrac{S\beta}{A}$	$D\sqrt{\dfrac{2C_o}{AC_X^*}}$
Минимальные суммы C^*_Σ, ден. ед.	$\sqrt{\dfrac{2AC_oC_X}{\alpha}}$	0	$\sqrt{\dfrac{2AC_oC_X}{\beta}}$	$\sqrt{2AC_oC_X^*}$

Для иллюстрации полученных зависимостей в табл. 8.27 приведены результаты расчетов для известных и откорректированных моделей при двух условиях ($\mu = \lambda$ и $\mu > \lambda$) и следующих исходных данных:

*потребность в заказываемом продукте А = 1000 ед. в год;

*затраты на выполнение одного заказа C_0 = 100 руб.;

*затраты на хранение единицы продукции (на складе) = C_x = 20 руб./ед. год;

* количество рабочих дней в год D = 250 дней;

* интенсивность пополнения запасов на склад μ = 25 ед. /дн.;

*интенсивность расхода запаса со склада λ = 4 ед./дн.

Затраты на хранение доставленной продукции вне склада C_x^* принимались равными 40 руб./ед., год и 10 руб./ед., год, т. е. отношения α = $\left(\frac{C_x^*}{C_x}\right)$ были взяты равными 2 и 0,5.

Из анализа табл. 8.27 можно сделать следующие выводы:

1. Введение затрат на хранение C_x (при постепенной разгрузке транспортных средств) позволяет восстановить экономический смысл модели EPQ.

2. Откорректированная модель является универсальной, так как включает частные случаи в традиционную модель EPQ (при $C_x^* = C_x$) и модель Уилсона EOQ (при $C_x^* = C_x$ и $\frac{\lambda}{\mu} \to 0$ т.е. мгновенное пополнение запаса).

3. Проведенные расчеты показали, что помимо модели EPQ корректировке подлежат другие модификации формулы Уилсона в частности:

* модель экономического размера партии (EBQ) постепенного пополнения запаса (без расхода) и последующего равномерного расхода;

*обобщенная детерминированная модель с учетом потерь от дефицита и постепенным (не мгновенным) пополнением запаса, находящегося в контейнерах, кузовах автомобилей или железнодорожных вагонах во время их постепенной разгрузки.

Таким образом, среди многообразия возможных направлений исследований модели EOQ к важнейшим, на наш взгляд, могут быть отнесены следующие:

* постепенный переход от допущений, принятых при выводе формулы Уилсона и ее модификаций, путем замены линейных (детерминированных, независимых, упрощенных) реальными параметрами (случайными, взаимосвязанными и взаимозависимыми), отражающими большее количество составляющих затрат и различных факторов;

*обязательный учет в модели всевозможных ограничений, связанных с внутренними и внешними факторами и обеспечивающих по сути ее жизнеспособность;

*подробный, достоверный анализ всех составляющих затрат (издержек, расходов), их идентификация, однозначная трактовка и классификация;

* разумное усложнение модели, ее дифференциация, без которой невозможно приблизить аналитические зависимости к практическим, прикладным задачам;

*разработка специального пакета программ, позволяющего проводить расчеты всей гаммы возможных вариантов модели EOQ, анализировать их и осуществлять выбор эффективных решений.