ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЯХ

Е.Н. Акимова, Д.В. Белоусов, А.Н. Уваров

Институт математики и механики УрО РАН
г. Екатеринбург

Аннотация

1. **Линейная обратная задача гравиметрии** о нахождении плотности в слое. Для решения линейной обратной задачи гравиметрии предложены и численно реализованы на суперкомпьютере МВС–1000 и видеоускорителях NVIDIA GeForce Параллельные итерационные алгоритмы (МПИ и ММН).
Решена обратная задача гравиметрии с реальными данными.

2. **Задачи электроразведки** (СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами). Для решения СЛАУ предложены и численно реализованы на видеоускорителе NVIDIA GeForce, 4-х ядерном процессоре Intel Core I5-750 и суперкомпьютере МВС-1000 параллельный алгоритм матричной прогонки и параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем. Решена модельная задача о нахождении распределения потенциала на поверхности земли в проводящей среде.

Проведено сравнение времени счета параллельных алгоритмов на вычислителях различного типа с анализом эффективности и ускорения.

Работа выполнена в рамках Междисциплинарного проекта УрО РАН и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 при поддержке УрО РАН.

Постановка обратной задачи гравиметрии

Одной из важнейших моделей строения земной коры является модель горизонтальной слоистой среды. Рассм. линейная обратная задача гравиметрии о нахождении переменной плотности $\sigma(x, y)$ в горизонтальном или криволинейном слое

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D,\ H_1(x, y) \le z \le H_2(x, y)\}$$

по грав. данным, измеренным на площади земной поверхности $D = \{(x, y) \in R^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$.

Используется априорная информация об отсутствии аномалий плотности вне слоя с криволинейными границами $H_1 = H_1(x, y)$ и $H_2 = H_2(x, y)$ такими, что $H_1 < H_2\ \ \forall(x, y)$ и выпол. условие $H_i(x, y) \to h_i = const$. Предполагается, что распределение плотности внутри слоя не зависит от z.

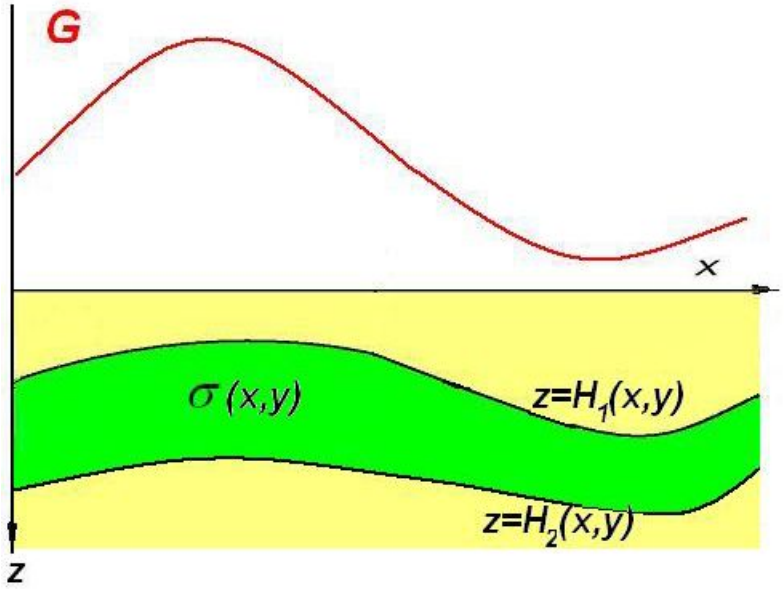

Рис. 1.

Нахождение плотности в слое

Задача сводится к решению линейного двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода для нахождения искомой плотности [1]

$$A\sigma \equiv f\int_a^b\int_c^d \left\{ \frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+H_1^2(x',y')\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+H_2^2(x',y')\right]^{1/2}} \right\} \sigma(x',y')dx'dy' = \Delta g(x,y), \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная, $\Delta g(x,y)$ – гравитационный эффект, порождаемый источниками в горизонтальном или криволинейном слое.

Уравнение гравиметрии (1) относится к классу некорректно поставленных задач, решение которой обладает сильной чувствительностью к погрешности правой части, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

---

[1]. Martyshko P.S., Koksharov D.E. On the construction of the density sections using gravity data // Extended Abstracts of 66th EAGE Conference and Exhibition. Paris, 7-12 June 2004. P. 143.

Методы решения

После дискретизации уравнения (1) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (1) сводится к решению СЛАУ с плохо обусловленной либо симметричной матрицей (горизонтальный слой), либо несимметричной матрицей (криволинейный слой)

$$(A + \alpha E)x = b, \qquad (2)$$

Лаврентьева

В случае криволинейного слоя СЛАУ предварительно преобразуется к виду

$$(A^T A + \alpha' E)x = A^T b. \qquad (3)$$

Тихонова

где $\alpha, \alpha' -$ параметры регуляризации.

Для решения СЛАУ (2), (3) используются регулярные итерационные методы градиентного типа [2].

---

[2]. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы Фейеровского типа. Теория и приложения. – Екатеринбург, 2005.

Методы решения СЛАУ

1. Итеративно регуляризованный метод простой итерации (МПИ)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{1}{\lambda_{\max}}[(A+\alpha E)z^k - b], \qquad (4)$$

где $\lambda_{\max}$ – макс. собств. значение $A+\alpha E$

2. Метод минимальных невязок (ММН)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{(A(Az^k - b), Az^k - b)}{\left\|A(Az^k - b)\right\|^2}(Az^k - b); \qquad (5)$$

$\dfrac{\left\|Az^k - b\right\|}{\left\|b\right\|} < \varepsilon$ – условие останова.

Параллельная реализация на МВС-1000

Ранее для решения линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении переменной плотности в слое параллельные методы градиентного типа были численно реализованы на МВС-1000 с высокой эффективностью распараллеливания [3].

Многопроцессорный вычислительный комплекс МВС–1000 — российский массивно-параллельный суперкомпьютер кластерного типа с распределенной памятью, установленный в ИММ УрО РАН.

МВС□1000/64 (UM64): 14 2-х процессорных 2-х ядерных модулей AMD Opteron 64 bit (2.6 ГГц); интерфейс GbitEthernet; 112 Гб оперативной памяти.

---

[3]. Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое // Труды института математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. Т. 13. № 3. С. 3-21.

Параллельная реализация на МВС-1000

Комплекс параллельных численных алгоритмов реализован с помощью библиотеки MPI на языке Фортран [4]. Распараллеливание итерационных методов основано на разбиении матриц A и B горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части b СЛАУ на m частей так, что $n = m \times L$, где $n -$ размерность системы уравнений, $m -$ число процессоров, $L -$ число строк матрицы в блоке.

Host □processor
1□ processor
2□ processor
…
m□ processor

Рис. 2. Схема распределения данных по процессорам

[4]. Баранов А.В., Лацис А.О., Сажин С.В., Храмцов М.Ю. Руководство пользователя системы МВС-1000. URL: http://parallel.ru/mvs/user.html.

Решение задачи гравиметрии с реальными данными

На МВС-1000/64 решена задача с реальными данными о восстановлении плотности в горизонтальном слое между глубинами $H_1 = 10,\ H_2 = 20$ км для области S_1: 120×220 км^2. Шаги сетки: $\Delta x \approx 0.6,\ \Delta y \approx 1.1$ км. Гравитационная постоянная $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$ (см^3/г$\cdot$с^2). Задача сводится к СЛАУ с плохо обусловленной симм. заполненной матрицей 40000×40000. Для решения задачи использовался параллельный итеративно регуляризованный МПИ с параметром регуляризации $\alpha = 0.001$.

$$N = 430, \quad \frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

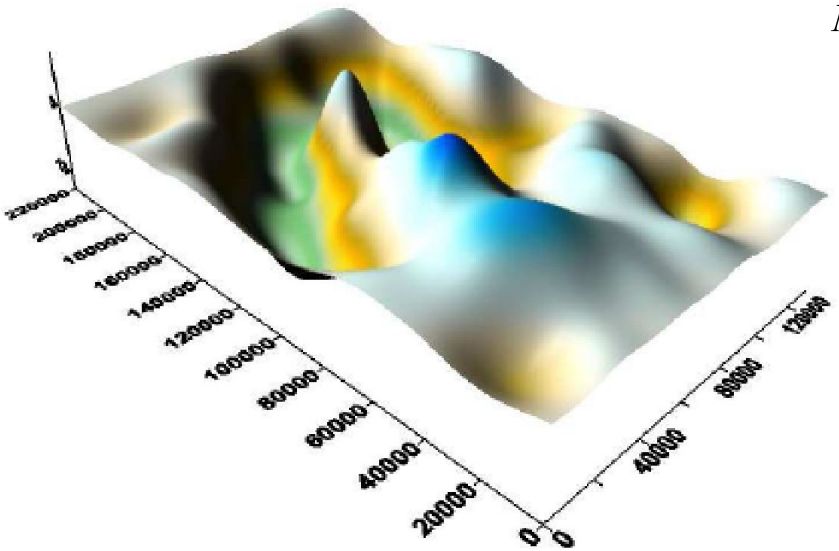

Рис. 3. Исходное гравитационное поле $\Delta g(x, y)$ для области S_1

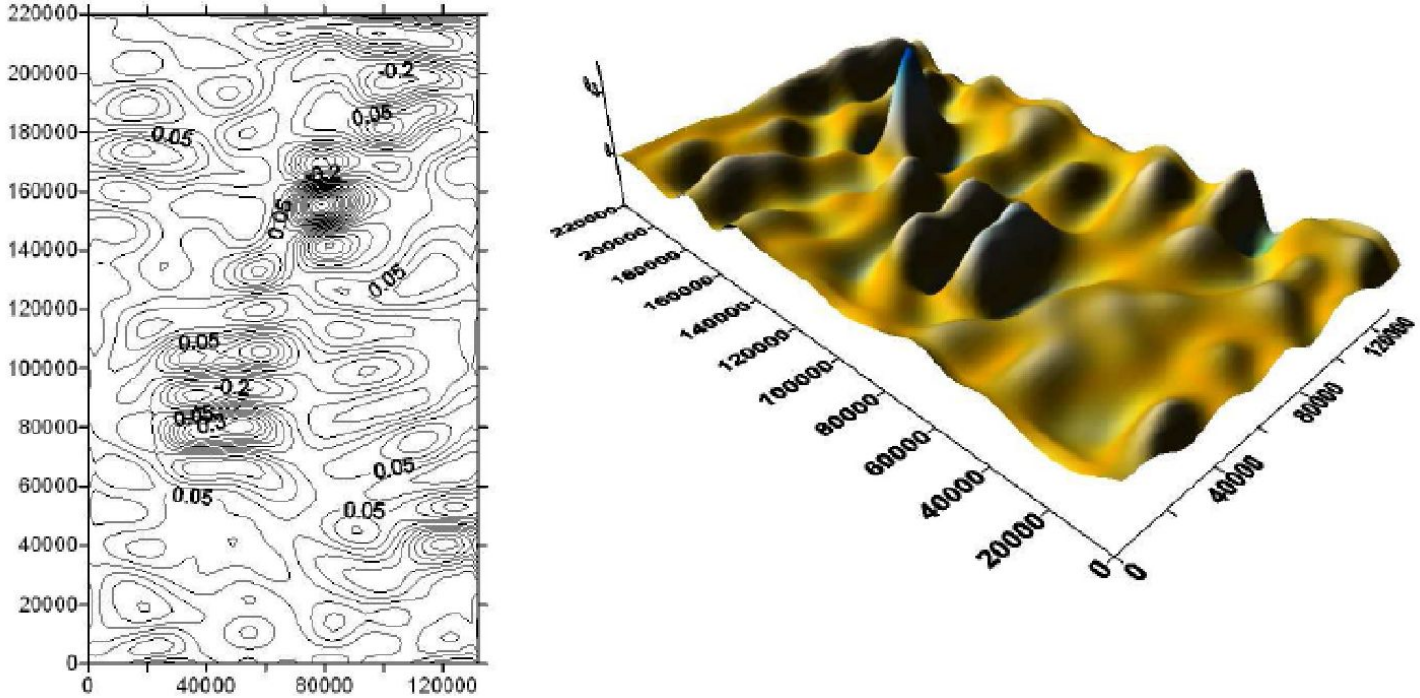

Рис. 4. Линии уровня и распределение восстановленной плотности $\sigma(x, y)$ в слое 10 - 20 км для области S_1

Более темные участки соответствуют зонам разуплотнения, представляющим интерес для геофизической интерпретации.

Ускорение и эффективность

$$S_m = T_1 / T_m, \quad E_m = S_m / m,$$

где T_1 – время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре,
T_m – время выполнения параллельного алгоритма на МВС с числом процессоров m $(m > 1)$,
$T_m = T_c + T_o$ – совокупность чистого времени счета и накладных расходов.

$$0 < E_m < 1$$

В табл. 1 приведены времена счета на МВС-1000/64 и коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи гравиметрии для области S_1 с использованием параллельного МПИ для 200 □ 200 точек сетки (430 итер).

Матрица СЛАУ формируется и хранится в памяти каждого процессора по частям.

m (число проц.)	T_m (время, мин.)	S_m (ускорение)	E_m (эффективность)
1	55.82	—	—
2	32.96	1.70	0.85
3	20.83	2.80	0.93
8	7.72	7.23	0.90
10	6.26	8.92	0.89
20	3.28	17.0	0.85
30	2.12	26.3	0.88
80	0.88	63.4	0.79

Таблица 1. Решение задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое

Распараллеливание на видеоускорителях с помощью технологии CUDA
http://www.nvidia.ru

Для организации параллельных вычислений актуальным в настоящее время является использование видеоускорителей (GPU) компании NVIDIA (рис.4).
Базовый блок - мультипроцессор, содержащий процессорные ядра.
Работа нескольких ядер мультипроцессора основана на архитектуре типа SIMD.

Для поддержки параллельных вычислений компания NVIDIA разработала технологию CUDA [5] - среду разработки программ на языке Си, позволяющую создавать программное обеспечение для решения сложных вычислительных задач.

Линейная задача гравиметрии решена на видеоускорителях GeForce GTX 285 (GPU-1) и GeForce GTX 260 (GPU-2) с помощью технологии CUDA .

Рис. 5. Видеоускоритель GeForce GTX 285

[5]. Берилло А. NVIDIA CUDA – неграфические вычисления на графических процессорах. URL: http://www.ixbt.com/video3/cuda-1.shtml

Табл. 2. Техн. характеристики вычислительной платформы

Характеристики подсистемы GPU-1:	NVIDIA GeForce GTX 285
Количество процессорных ядер	240
Частота ядра (МГц)	648
Частота процессора (МГц)	1476
Количество видеопамяти (Мб)	1024
Характеристики подсистемы GPU-2:	NVIDIA GeForce GTX 260
Количество процессорных ядер	192
Частота ядра (МГц)	576
Частота процессора (МГц)	1242
Количество видеопамяти (Мб)	896
Характеристики CPU:	4-ядер. Intel Core I5-750
Частота процессора (ГГц)	2.66
Оперативная память (Гб)	8
Разрядность ОС (Бит)	64

Результаты численных экспериментов
Сравнение времени счета на GPU-1,2 и МВС-1000/64

В табл. 3 приводятся времена решения задачи гравиметрии на Intel Core I5-750 без использования и с использованием видеоускорителей GeForce на разных сетках: 110 x 110 (матр. СЛАУ 12100 x 12100) и 200 x 200 (матр. СЛАУ 40000 x 40000).

Метод – МПИ (280 итер.) Сетка 110 x 110 Матрица СЛАУ 12100 x 12100 $\frac{\lVert Az^k - b \rVert}{\lVert b \rVert} \approx 3.1 \cdot 10^{-4}.$	Intel Core I5-750 (2.66 ГГц) GeForce GTX 285 (240 ядер) GeForce GTX 260 (192 ядра) МВС–1000/64 (1 проц., 2.6 ГГц) МВС–1000/64 (2 проц.) МВС–1000/64 (8 проц.) МВС–1000/64 (10 проц.)	84.0 (сек) 14.0 (сек) 19.5 (сек) 157.8 (сек) 91.8 (сек) 20.4 (сек) 16.8 (сек)
Метод – МПИ (430 итер.) Сетка 200 x 200 Матрица СЛАУ 40000 x 40000 $\frac{\lVert Az^k - b \rVert}{\lVert b \rVert} \approx 4 \cdot 10^{-3}.$	Intel Core I5-750 (2.66 ГГц) GeForce GTX 285 (240 ядер) GeForce GTX 260 (192 ядра) МВС–1000/64 (1 проц., 2.6 ГГц) МВС–1000/64 (2 проц.) МВС–1000/64 (4 проц.) МВС–1000/64 (5 проц.) МВС–1000/64 (10 проц.) МВС–1000/64 (15 проц.)	31.46 (мин) 4.08 (мин) 5.28 (мин) 55.82 (мин) 32.96 (мин) 15.83 (мин) 12.40 (мин) 6.26 (мин) 4.16 (мин)

Параллельные алгоритмы решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами

Задачи электроразведки

1. Задача вертикального электрического зондирования (ВЭЗ).

На поверхности земли собирают электроразведочную установку из двух питающих (A, B) и двух приемных электродов (M,N) (рис. 6). К питающим электродам подключают источник тока, на приемных электродах измеряют напряженность электрического поля. По результатам измерений вычисляют кажущееся электр. сопротивление $\rho_k = K \cdot \Delta V_{MN} / I_{AB}$, для неоднородной среды, где K – коэффициент, зависящий от расстояний между электродами, ΔV_{MN} – разность потенциалов на приемных электродах, I_{AB} – сила тока в питающей линии.

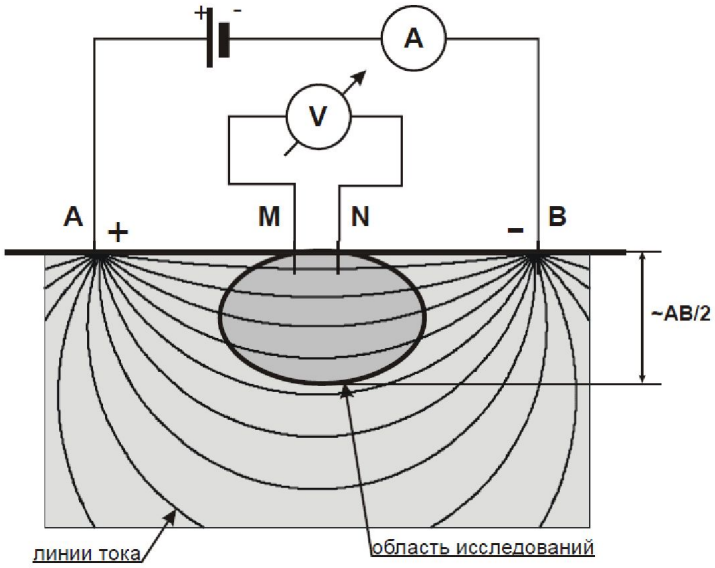

Рис. 6. Схема измерений в методе ВЭЗ

1. Задача ВЭЗ о нахождении потенциала $V_0(r, z=0)$ на поверхности земли сводится к решению двумерного уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат [7]

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (6)$$

с граничными условиями непрерывности потенциала и непрерывности нормальной составляющей к границам плотности тока

$V_o\big|_{z=l} = V_1\big|_{z=l}$, $\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial V_0}{\partial z}\Big|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}\Big|_{z=l}$ – условия на горизонтальных прямых $z = l$, (7)

$\frac{\partial V_0}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$ – сверху, $\frac{\partial V_0}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$ – слева, $V_0 = 0$ – справа и снизу. $\rho = \frac{2\pi r^2}{I}\cdot\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|$.

После использования конечно-разностной аппроксимации краевая задача (6)–(7) сводится к решению СЛАУ с блочно-трехдиагональной матрицей.

2. Задача бокового каротажного зондирования (БКЗ) – при измерении потенциала электрического поля использует однотипные зонды разной длины. В результате интерпретации данных каротажа получают значение удельного электрического сопротивления пласта, близкое к истинному, по величинам которого выявляют полезные ископаемые. После конечно-разностной аппроксимации задача БКЗ сводится к решению СЛАУ с блочно-трехдиагональной матрицей [8]

$$AV \equiv -\frac{1}{r}\left(\bar{r}\, a V_{\bar{r}}\right)_{\hat{r}} - \left(b V_{\bar{z}}\right)_{\hat{z}} = F. \qquad (8)$$

A – матрица размерности $(N_r \times 2N_z)\times(N_r \times 2N_z)$ с блоками $N_r \times N_r$.

$a_{ij} = \sigma\left(r_i - \frac{h_i^{(r)}}{2}, z_j + \frac{h_j^{(z)}}{2}\right)$, $b_{ij} = \sigma\left(r_i + \frac{h_i^{(r)}}{2}, z_j - \frac{h_j^{(z)}}{2}\right)$, $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – коэф. электропров.

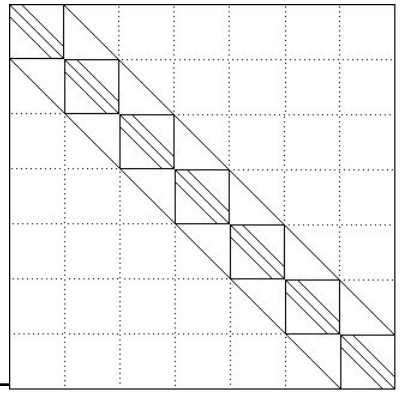

Рис.7.

[7]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[8]. Дашевский Ю.А., Суродина И.В., Эпов М.И. Квазитрехмерное мат. моделирование диаграмм неосесимм. зондов постоянного тока в анизотропных разрезах // Сиб. ЖИМ. 2002. Т. 5. №3 (11). С. 76-91.

Методы решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами

1. Параллельный алгоритм матричной прогонки

$$\begin{cases} C_0\bar{Y}_0 - B_0\bar{Y}_1 = \bar{F}_0, & i=0 \\ -A_i\bar{Y}_{i-1} + C_i\bar{Y}_i - B_i\bar{Y}_{i+1} = \bar{F}_i, & i=1,\dots,N-1 \\ -A_N\bar{Y}_{N-1} + C_N\bar{Y}_N = \bar{F}_N, & i=N, \end{cases} \qquad (9)$$

где $\bar{Y}_i$ и $\bar{F}_i$ – искомые и заданные векторы размерности n, A_i, B_i, C_i – квадратные матрицы порядка n.

Будем предполагать, что исходная область P – прямоугольник. Разобьем P на L подобластей вертикальными линиями так, что $N = L \times M$. В качестве параметров выберем векторы $\bar{Y}_K$, $K = 0, M, \dots, N$, связывающие неизвестные на сетке по вертикали. В подобластях, определяемых интервалами (K,K+M), рассмотрим задачи

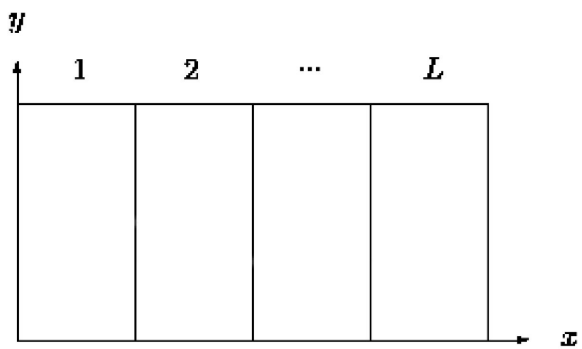

Рис. 8.

$$\begin{cases} -A_i\bar{U}^1_{i-1} + C_i\bar{U}^1_i - B_i\bar{U}^1_{i+1} = 0, \quad \bar{U}^1_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{U}^1_{K+M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -A_i\bar{U}^n_{i-1} + C_i\bar{U}^n_i - B_i\bar{U}^n_{i+1} = 0, \quad \bar{U}^n_K = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{U}^n_{K+M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} -A_i\bar{V}^1_{i-1} + C_i\bar{V}^1_i - B_i\bar{V}^1_{i+1} = 0, \quad \bar{V}^1_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{V}^1_{K+M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -A_i\bar{V}^n_{i-1} + C_i\bar{V}^n_i - B_i\bar{V}^n_{i+1} = 0, \quad \bar{V}^n_K = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{V}^n_{K+M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \qquad (11)$$

$$-A_i\bar{W}_{i-1} + C_i\bar{W}_i - B_i\bar{W}_{i+1} = \bar{F}_i, \quad \bar{W}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{W}_{K+M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = K+1, \dots, K+M-1. \qquad (12)$$

[9]. Акимова Е.Н. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки // Математическое моделирование. М.: Наука, 1994. Т. 6. № 9. С. 61- 67.

Утверждение 1. Если $\bar{U}_i^1,\ldots,\bar{U}_i^n$ –решения задач (10), $\bar{V}_i^1,\ldots,\bar{V}_i^n$ – решения задач (11), $\bar{W}_i$ – решения задачи (12), $\bar{Y}_i$ – решения исходной задачи (9) на $(K, K+M)$, тогда

$$\bar{Y}_i = \left(\bar{U}_i^1\bar{U}_i^2\ldots\bar{U}_i^n\right)\bar{Y}_K + \left(\bar{V}_i^1\bar{V}_i^2\ldots\bar{V}_i^n\right)\bar{Y}_{K+M} + \bar{W}_i. \qquad (13)$$

После подстановки (13) в (9) получим систему относительно параметров $\bar{Y}_K$, $K = 0, M, \ldots, N$.

$$\begin{cases} \left[C_0 - B_0U_1\right]\bar{Y}_0 - \left[B_0V_1\right]\bar{Y}_M = \bar{F}_0 + B_0\bar{W}_1, & K = 0; \\ -\left[A_KU_{K-1}\right]\bar{Y}_{K-M} + \left[C_K - A_KV_{K-1} - B_KU_{K+1}\right]\bar{Y}_K - \left[B_KV_{K+1}\right]\bar{Y}_{K+M} = \\ = \bar{F}_K + A_K\bar{W}_{K-1} + B_K\bar{W}_{K+1}, & K = M, 2M, \ldots, N-M; \\ -\left[A_NU_{N-1}\right]\bar{Y}_{N-M} + \left[C_N - A_NV_{N-1}\right]\bar{Y}_N = \bar{F}_N + A_N\bar{W}_{N-1}, & K = N, \end{cases} \qquad (14)$$

где U_K и V_K – квадратные матрицы порядка n.

Схема параллельного алгоритма матричной прогонки: **(10)-(11)-(12) ⟶ (14) ⟶ (13).**
Задача (14) решается классическим алгоритмом матричной прогонки.
Задачи (10)-(11)-(12) и (13) решаются независимо на L процессорах.

Утверждение 2. Если для исходной системы (9) выполняются достаточные условия устойчивости метода матричной прогонки по А.А. Самарскому [10]

$$\left\|C_0^{-1}B_0\right\| \le 1, \quad \left\|C_N^{-1}A_N\right\| \le 1, \quad \left\|C_i^{-1}A_i\right\| + \left\|C_i^{-1}B_i\right\| \le 1, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое, то эти же условия достаточны и для устойчивости метода матричной прогонки при решении системы уравнений (14) относительно параметров $\bar{Y}_K$ [9].

[9]. Акимова Е.Н. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки // Математическое моделирование. М.: Наука, 1994. Т. 6. № 9. С. 61- 67.
[10]. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

2. Параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем

МСГ – быстрый итерационный метод решения СЛАУ с симметричной положительно-определенной матрицей [11]. Введение предобуславливания применяется с целью сущест. ускорения сходимости итерационного процесса.

Исходная СЛАУ $Ax = b$ заменяется на $C^{-1}Ax = C^{-1}b.$ (15)

Условием выбора предобуславливателя C является следующее:

$$cond(\tilde{A}) << cond(A), \quad cond(\tilde{A}) = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}}{\tilde{\lambda}_{\min}}, \quad cond(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad \tilde{A} = C^{-1}A.$$

Для СЛАУ (15) МСГ с предобуславливателем имеет вид [12]

$$r^0 = b - Ax^0, \quad p^0 = C^{-1}r^0, \quad z^0 = p^0, \quad r^{k+1} = r^k - \alpha_k Ap^k, \quad z^{k+1} = C^{-1}r^{k+1},$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad \alpha_k = \frac{(r^k, z^k)}{(Ap^k, p^k)}, \quad p^{k+1} = z^{k+1} + \beta_k p^k, \quad \beta_k = \frac{(r^{k+1}, z^{k+1})}{(r^k, z^k)}. \qquad (16)$$

$\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon$ – условие останова.

Распараеливание МСГ с предобуславливателем показано на рис. 1 (слайд 8).

[11]. Фаддеев В.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1963.
[12]. Амосов А.А. Циркулянтно предобусловленный метод сопряженных градиентов и его применение для численного решения интегрального уравнения переноса излучения // Труды XI Всерос. школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования». Ростов-на-Дону: Издат. Ростов. госун-та, 2005. Выпуск 4. С. 49-65.

Результаты численных экспериментов решения задачи о нахождении распределения потенциала

Параллельный алгоритм матричной прогонки (ПАМП) и параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем (ПМСГ) реализованы на следующих многопроцессорных системах: МВС–1000/64 с помощью технологии MPI, 4-х ядерном процессоре Intel Core I5-750 (CPU) на языке C++ в среде разработки «Visual Studio» и видеоускорителе NVIDIA GeForce GTX 285 (GPU) с помощью технологии CUDA.

Тех. характеристики вычислительных систем приводятся на слайдах 7 и 13.

С помощью методов ПАМП и ПМСГ решена модельная задача о нахождении распределения потенциала в проводящей среде с известным решением (рис. 9).

Исходные данные и модельное решение задачи предоставлены лабораторией скважинной геофизики ИНГГ СО РАН (г. Новосибирск).

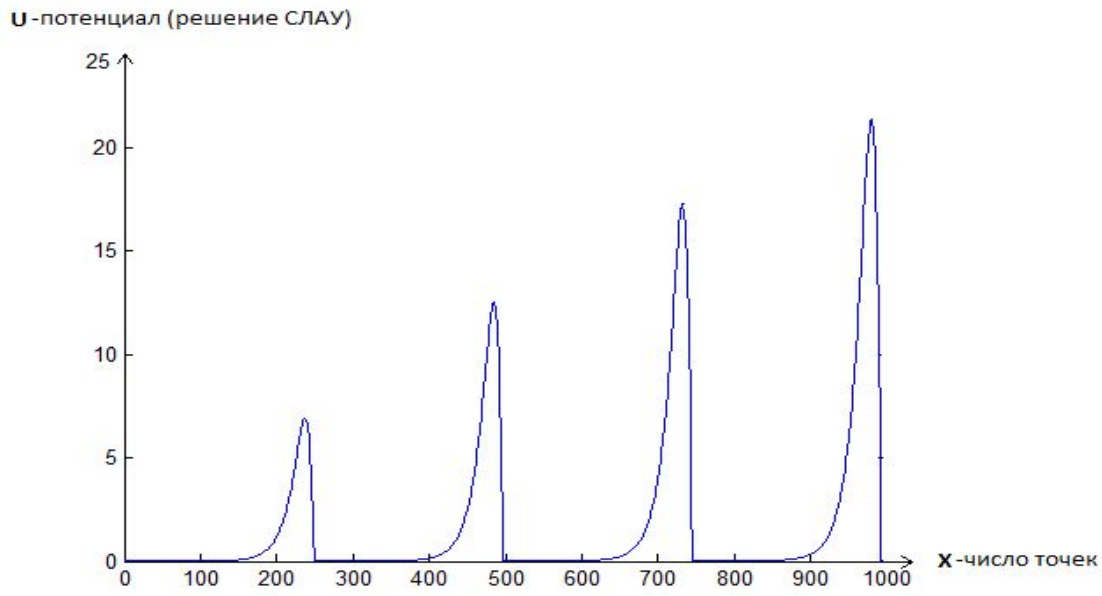

Рис. 9.

После дискретизации задача сводится к СЛАУ с плохо обусловленной симметричной положительно-определенной блочно-трехдиагональной матрицей размерности 76136×76136 с квадратными блоками порядка 248 (рис. 7, слайд 16).
Приближенное решение задачи сравнивалось с модельным решением с помощью вычисления относительной погрешности

$$\sigma = \frac{\left\| \bar{Y}^{M} - \bar{Y} \right\|}{\left\| \bar{Y}^{M} \right\|} \approx 2 \cdot 10^{-7}. \qquad (17)$$

Предварительно находилось число обусловленности матрицы A

$$cond(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \approx 1.3 \cdot 10^{11}, \quad \lambda_{\max} = 1.4 \cdot 10^{6}, \quad \lambda_{\min} = 1.1 \cdot 10^{-5} > 0,$$

В случае решения задачи ПМСГ находилось число обусловленности матрицы $\tilde{A}$

$$cond(\tilde{A}) = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}}{\tilde{\lambda}_{\min}} \approx 4.1 \cdot 10^{9} < cond(A).$$

Решение задачи методом ПМСГ $\sigma_{ПМСГ} \approx 2 \cdot 10^{-7}$ t=10 час.

Вычислитель	Время (сек.)	Ускор.	Эффект.
Intel Core I5-750 (одно ядро)	57 (21-OpenMP)	–	–
Intel Core I5-750 (2 ядра)	46 (16-OpenMP)	1.24	0.62
Intel Core I5-750 (4 ядра)	42 (14-OpenMP)	1.5	0.40
GeForce GTX 285 (240 ядер)	16	3.56	–
МВС–1000/64 (1 проц.)	120	–	–
МВС–1000/64 (2 проц.)	65	1.85	0.92
МВС–1000/64 (4 проц.)	34	3.53	0.88

Решение задачи методом ПАМП $\sigma_{ПАМП} \approx 2 \cdot 10^{-7}$

Вычислитель	Время (сек.)	Ускор.	Эффект.
Intel Core I5-750 (одно ядро)	52 (21-OpenMP)	–	–
Intel Core I5-750 (2 ядра)	28 (18-OpenMP)	1.86	0.93
Intel Core I5-750 (4 ядра)	16	3.25	0.81
GeForce GTX 285 (240 ядер)	10	5.2	–
МВС–1000/64 (1 проц.)	96	–	–
МВС–1000/64 (2 проц.)	60	1.6	0.80
МВС–1000/64 (4 проц.)	31	3.1	0.77

Основные результаты работы

1. Для решения линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое предложены и численно реализованы на МВС-1000 и видеоускорителях NVIDIA GeForce параллельные итерационные алгоритмы. Решена обратная задача гравиметрии с реальными данными. Проведено сравнение времени счета параллельных алгоритмов с анализом эффективности и ускорения.

2. Для решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами предложены и численно реализованы на видеоускорителе NVIDIA GeForce, 4-х ядерном процессоре Intel Core I5-750 и МВС-1000 параллельный алгоритм матричной прогонки и параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем.
Проведено сравнение времени счета параллельных алгоритмов при решении задачи о нахождении распределения потенциала на поверхности земли в проводящей среде.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !