

**Применение метода  
рационализации при  
решении неравенств и  
систем неравенств**

Метод рационализации  
заключается  
в замене сложного выражения  $F(x)$   
на  
более простое выражение  $G(x)$ ,  
при которой  
неравенство  $G(x) > 0$  равносильно  
неравенству  $F(x) > 0$  в  
области определения выражения  
 $F(x)$ .

Выделим некоторые выражения

$F$

и соответствующие им

рационализирующие выражения

$G,$

где  $f, g, h, p, q$  – выражения  $\neq 1$ ,  $f > 0$ ,  $g > 0$ ),

$a$  – фиксированное число  $\neq 1$ ).

( $a > 0$ ,  $a$

	<b>Выражение F</b>	<b>Выражение G</b>
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
1a	$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
1б	$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
2a	$\log_h - 1$	$(h - 1)(f - h)$
2б	$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ ( $g \neq 1, f \neq 1$ )	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
4	$h^f - h^g$ ( $h > 0$ )	$(h - 1)(f - g)$
4a	$h^f - 1$	$(h - 1)f$
5	$f^h - g^h$ ( $f > 0, g > 0$ )	$(f - g)h$
6	$ f  -  g $	$(f - g)(f + g)$

# Некоторые следствия с учетом области

определения неравенства:

$$* \log_h f \cdot \log_p g > 0 \Leftrightarrow (h - 1)(f - 1)(p - 1)(g - 1) > 0$$

$$* \log_h f \cdot \log_p g > 0 \Leftrightarrow (fg - 1)(h - 1) > 0$$

$$* \sqrt{f} - \sqrt{g} > 0 \Leftrightarrow f - g > 0$$

$$* \frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} > 0 \Leftrightarrow \frac{f - g}{p - q} > 0$$

## Пример 1.

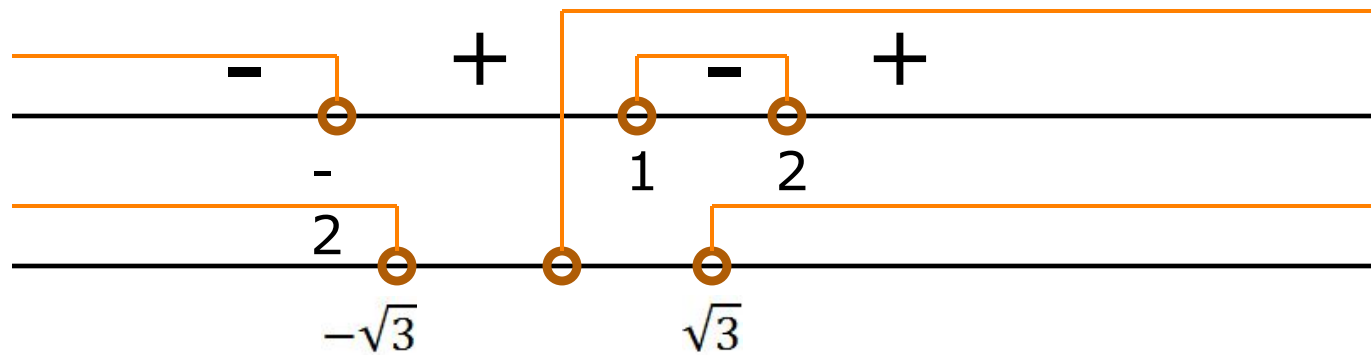
Решить неравенство:  $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение:

$$\begin{cases} (x - 1)(x^2 - 3 - 1) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2)(x + 2) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$

{



OTBE  $(-\sqrt{3}; 2)$

T:

## Пример 2.

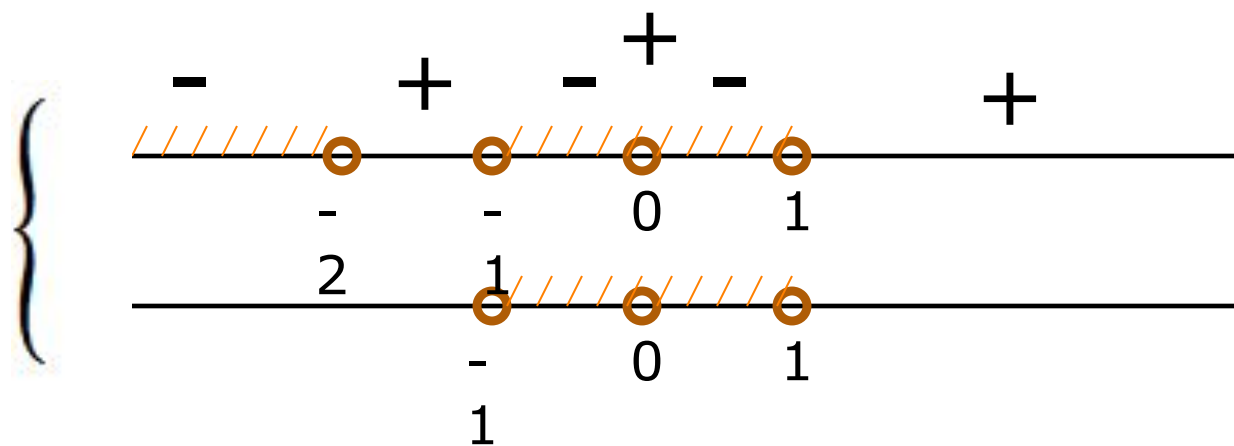
Решить неравенство:  $\log_{x+3} \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) > 0$

Решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+3-1) \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \right) > 0; \\ x+3 > 0; \\ x+3 \neq 1; \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+2) \frac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{array} \right.$$





OTBE  $(-1; 0) \cup (0; 1)$

T:

**Решить  
неравенства:**

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \leq \log_{2x}(x^2 + x)$$

**Пример 3.**

ОТВЕТ

$$\frac{\log_x(x - 3) - \log_x(9 - x)}{\log_{x-1} x} < 0$$

**Пример 4.**

$$\log_{x-1} x$$

ОТВЕТ

**Пример 5.**

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2 + 1) \leq 0$$

ОТВЕТ

**Пример 6.**

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

## Пример 7.

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2$$

ОТВЕТ

## Пример 8.

$$\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$$

ОТВЕТ

## Пример 9.

$$\log_{2x+1}(4x - 5) + \log_{4x-5}(2x + 1) \leq 2$$

ОТВЕТ

# Решить систему

1. 
$$\begin{cases} \log_{\log_x 3x} (7x - 2) \geq 0; \\ 42^x - 36 \cdot 7^x - 6^x + 36 \leq 0 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} \log_{\log_x 2x} (6x - 2) \geq 0; \\ 20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} \log_{x+3} (x^2 - x) < 1; \\ \log_{x^2 - \frac{3}{2}x} (3 - 2^x) > 0; \end{cases}$$

**Решить неравенство  
(из сборника МИОО):**

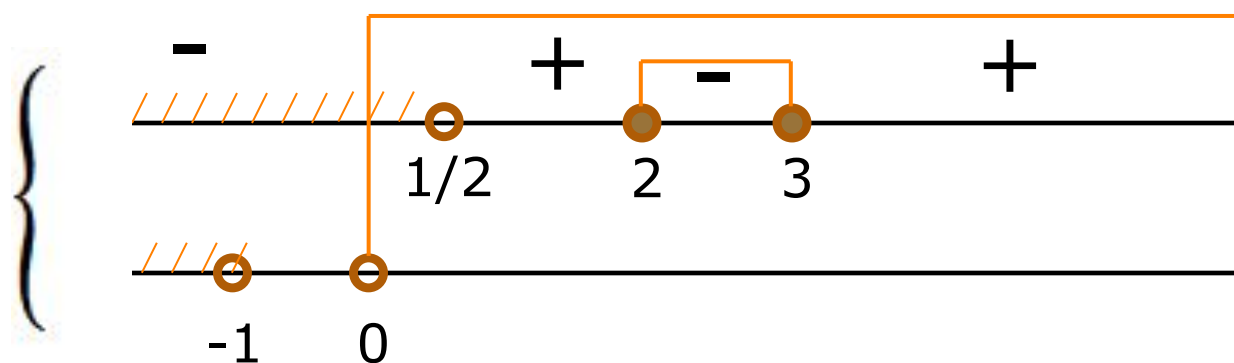
$$\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)} \left(\frac{14}{24-2x-x^2}\right) > 1$$

$$\begin{cases} (x - 1)\lg 2 + \lg (2^{x+4} + 1) < \lg (7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x (x + 2) > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0 \\ \log_{1 - \frac{x^2}{37}} (x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1 + \frac{x^2}{37}} (x^2 - 12|x| + 37) \geq 0 \end{cases}$$

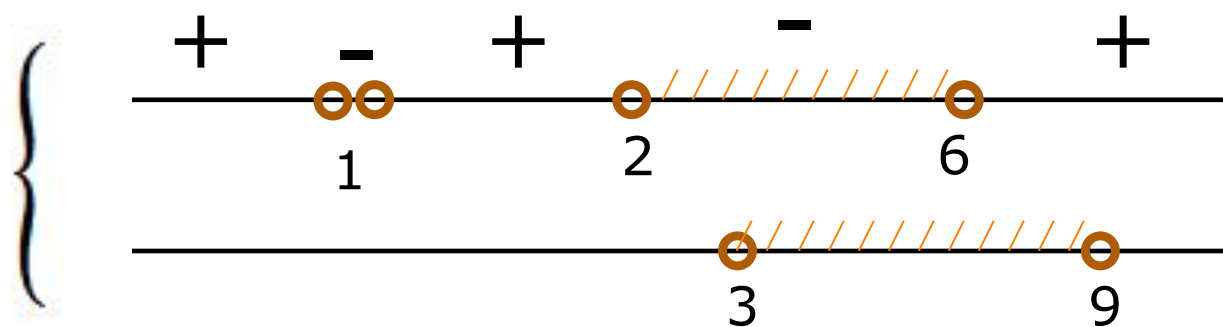
$$\begin{cases} \log_{\log_x 3x} (4x - 1) \geq 0 \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0 \end{cases}$$

## Пример 3



ОТВЕ  $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3]$   
Т:

## Пример 4



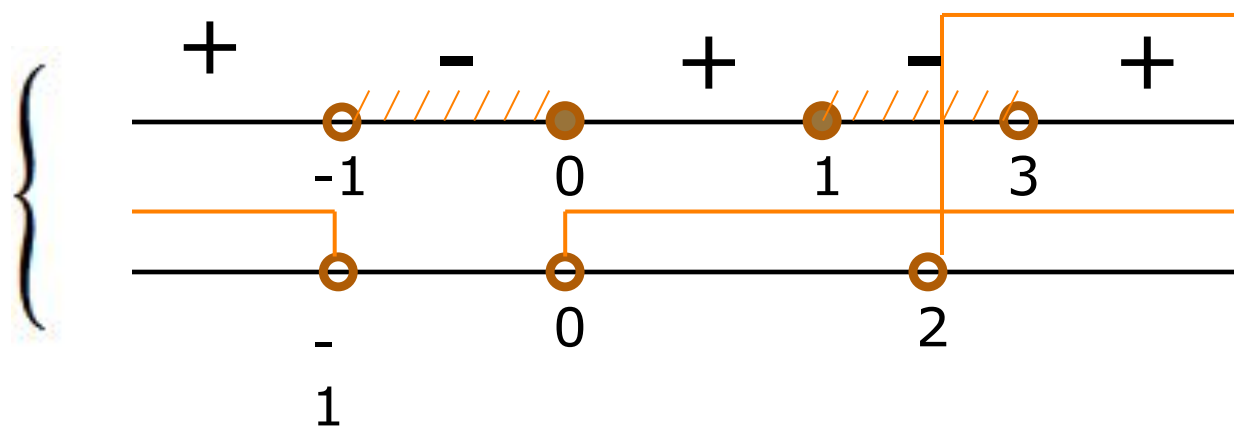
ОТВЕ  $(3; 6)$

Т:

[НАЗАД](#)



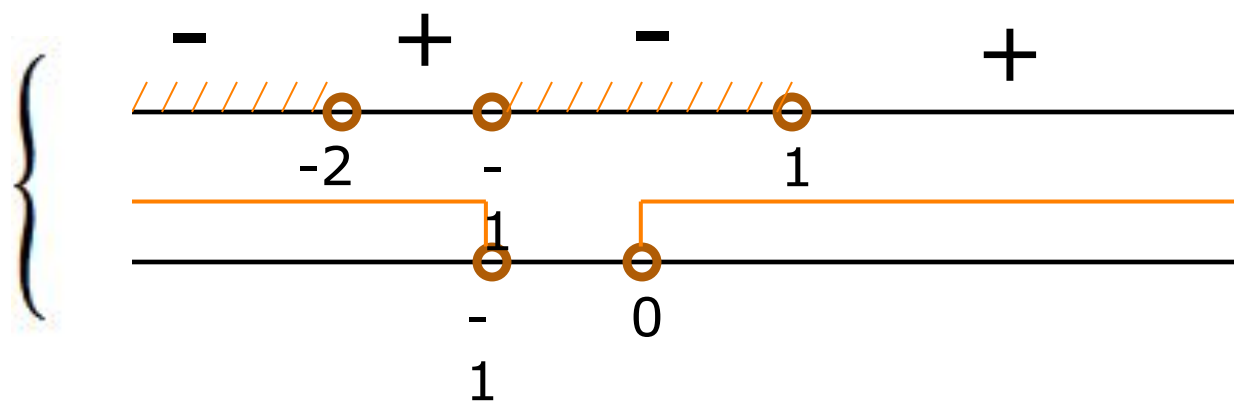
# Пример 5



ОТВЕ (2;3)

Т:

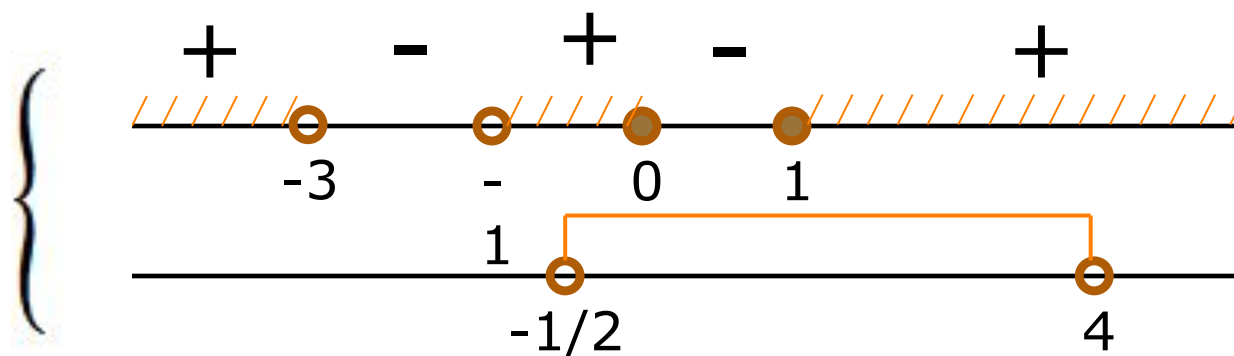
## Пример 6



ОТВЕ  $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

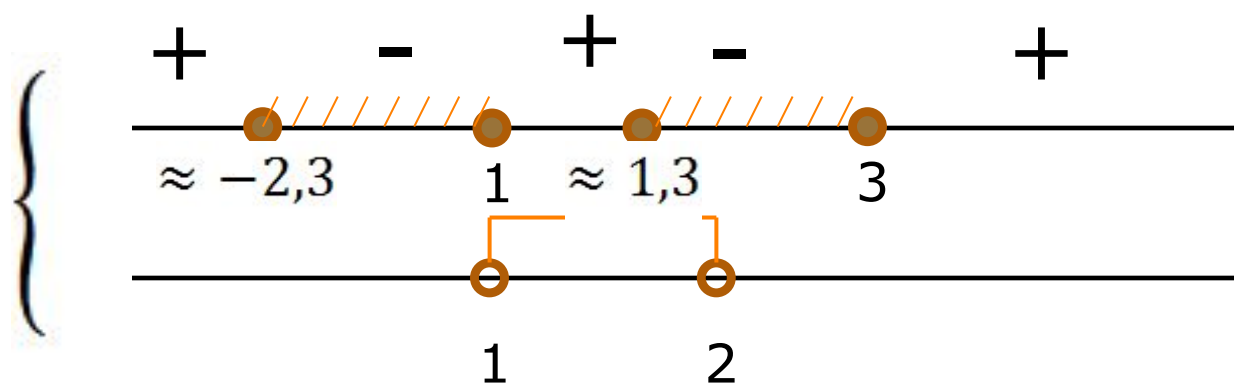
Т:

# Пример 7



ОТВЕ  
Т:  $(-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; 4)$

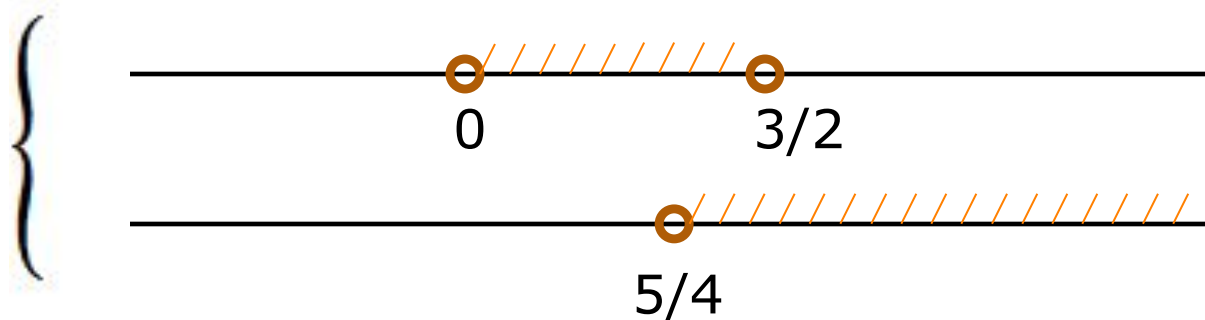
# Пример 8



ОТВЕ  
Т:

$$\left[ \frac{\sqrt{13} - 1}{2}; 2 \right)$$

## Пример 9



ОТВЕ  
Т:

$$x \in \left( \frac{5}{4}; \frac{3}{2} \right] \cup \{3\}$$

[НАЗАД](#)