Применение метода рационализации при решении неравенств и систем неравенств

Метод рационализации
заключается
в замене сложного выражения *F(x)*
на
более простое выражение *G(x)*,
при которой
неравенство ***G(x)v0*** равносильно
неравенству ***F(x)v0*** в
области определения выражения
F(x).

Выделим некоторые выражения

F

и соответствующие им рационализирующие выражения

G,

где f,g,h,p,q – выражения с переменной x ($h>0$, $h \neq 1$, $f>0$, $g>0$),

a – фиксированное число ($a>0$, $a \neq 1$).

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$log_h f - log_h g$ $log_h - 1$ $log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$log_f h - log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ (h>0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f>0, g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Некоторые следствия с учетом области определения неравенства:

* $\log_h f \cdot \log_p g \vee 0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$

* $\log_h f \cdot \log_p g \vee 0 \Leftrightarrow (\mathrm{fg}-1)(\mathrm{h}-1) \vee 0$

* $\sqrt{\mathrm{f}} - \sqrt{\mathrm{g}} \vee 0 \Leftrightarrow \mathrm{f} - \mathrm{g} \vee 0$

* $\dfrac{\mathrm{h^f} - \mathrm{h^g}}{\mathrm{h^p} - \mathrm{h^q}} \vee 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{f} - \mathrm{g}}{\mathrm{p} - \mathrm{q}} \vee 0$

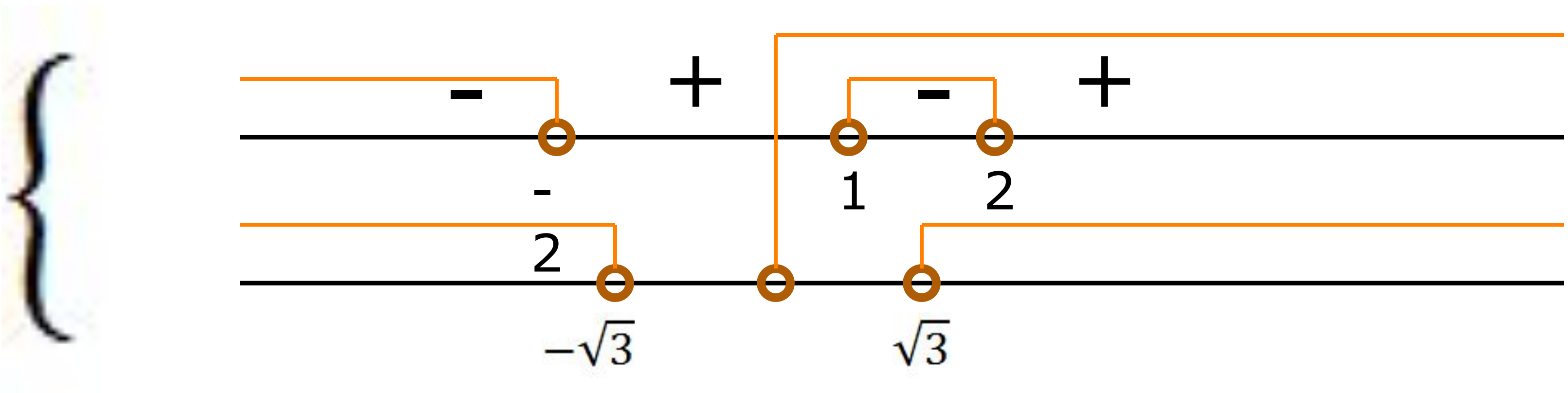
Пример 1.

Решить неравенство: $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение:

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-3-1) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x+2) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-\sqrt{3};2)$

Пример 2.

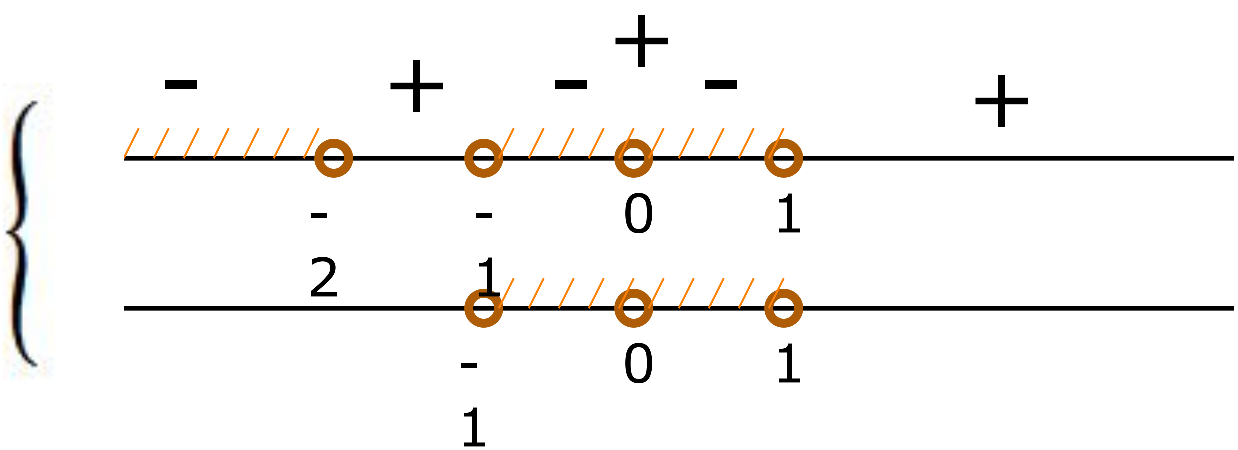
Решить неравенство: $\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$

Решение:

$$\begin{cases} (x+3-1)\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}-1\right) > 0; \\ x+3 > 0; \\ x+3 \neq 1; \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)\frac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-1;0)\cup(0;1)$

Решить неравенства:

Пример 3. $$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \le \log_{2x}(x^2 + x)$$

ОТВЕТ

Пример 4. $$\frac{\log_x(x-3) - \log_x(9-x)}{\log_{x-1} x} < 0$$

ОТВЕТ

Пример 5. $$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2+1) \le 0$$

ОТВЕТ

Пример 6. $$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

Пример 7.

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2$$

ОТВЕТ

Пример 8.

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \ge 0$$

ОТВЕТ

Пример 9.

$$\log_{2x+1}(4x-5) + \log_{4x-5}(2x+1) \le 2$$

ОТВЕТ

Решить систему неравенств

1. $$\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(7x-2) \ge 0; \\ 42^x - 36 \cdot 7^x - 6^x + 36 \le 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(6x-2) \ge 0; \\ 20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \le 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \log_{x+3}(x^2 - x) < 1; \\ \log_{x^2 - \frac{3}{2}x}(3 - 2^x) > 0; \end{cases}$$

Решить неравенство (из сборника МИОО):

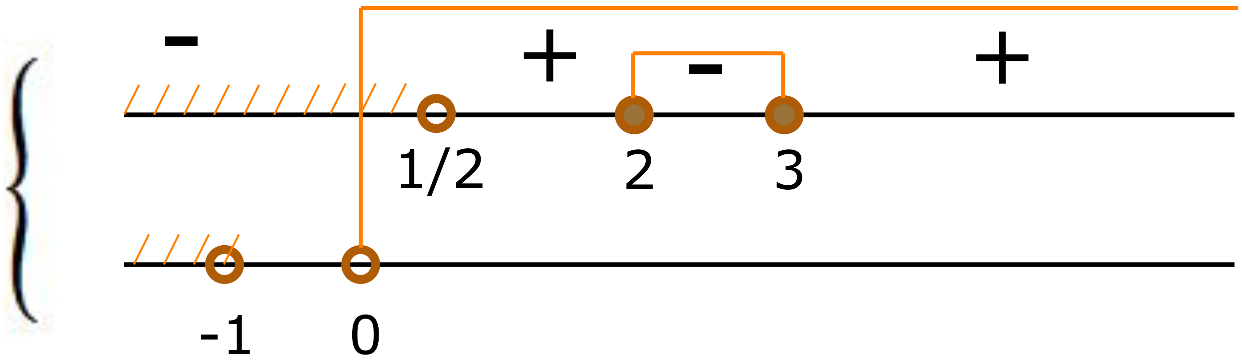
$$\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)}\left(\frac{14}{24-2x-x^2}\right) > 1$$

$$\begin{cases}(x-1)\lg 2+\lg\left(2^{x+4}+1\right)<\lg\left(7\cdot 2^{x}+12\right)\\ \log_{x}(x+2)>2\end{cases}$$

$$\begin{cases}25^{x}+3\cdot 10^{x}-4\cdot 4^{x}>0\\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)-\log_{1+\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_{\log_x 3x}(4x-1)\geq 0\\ 21^{x}-9\cdot 7^{x}-3^{x}+9\leq 0\end{cases}$$

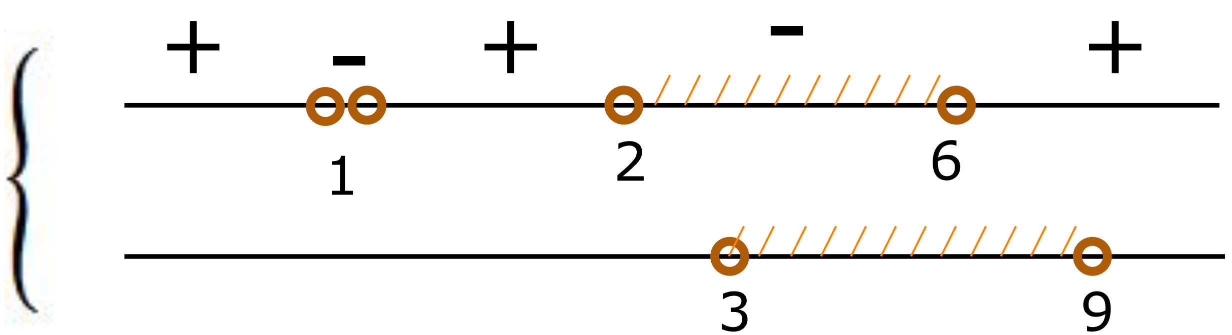
Пример 3



ОТВЕТ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3]$

НАЗАД

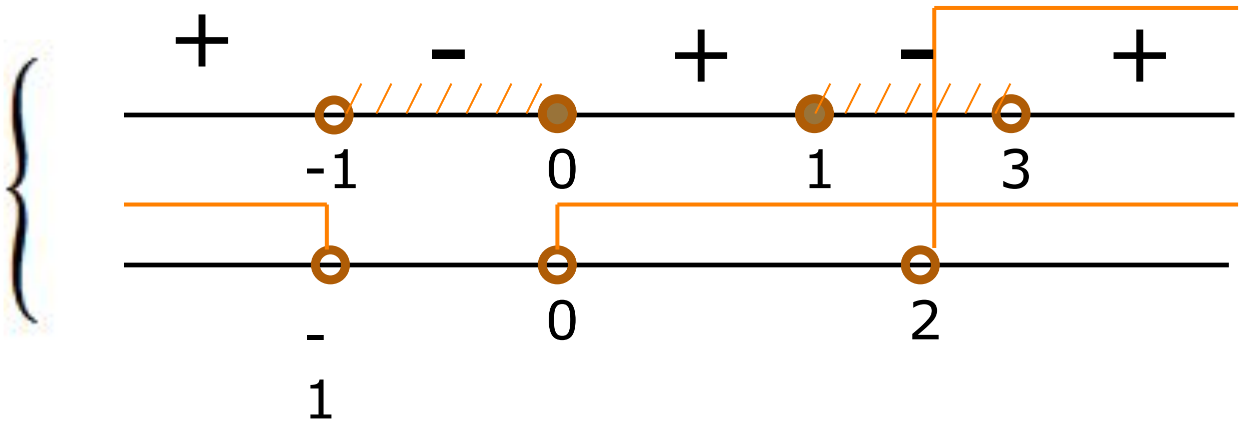
Пример 4



ОТВЕТ: $(3; 6)$

НАЗАД

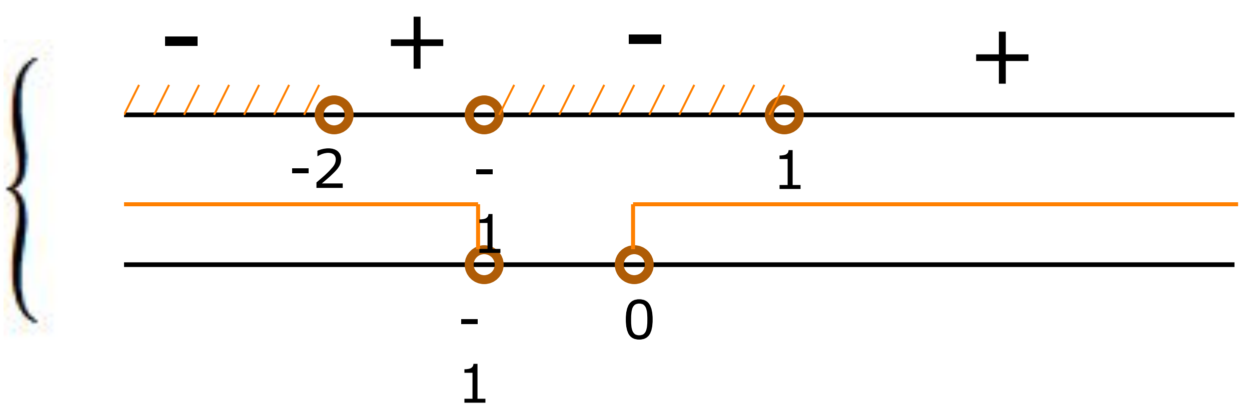
Пример 5



ОТВЕТ: (2;3)

НАЗАД

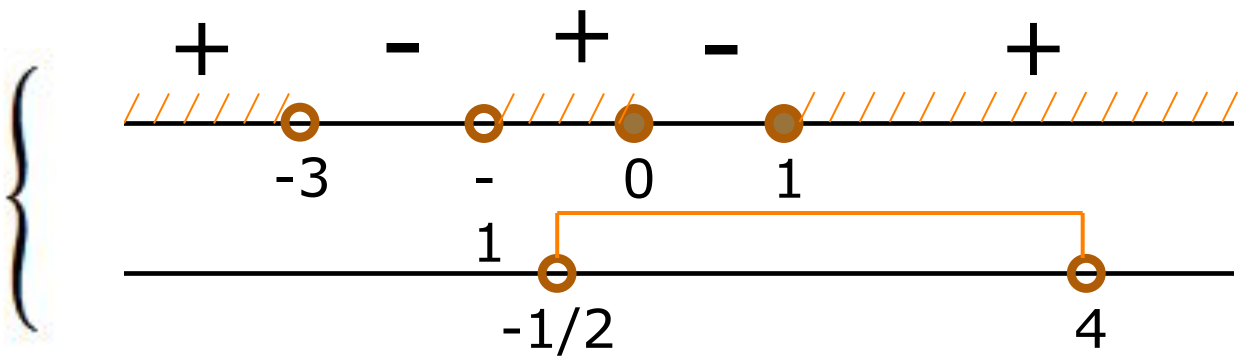
Пример 6



ОТВЕТ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

НАЗАД

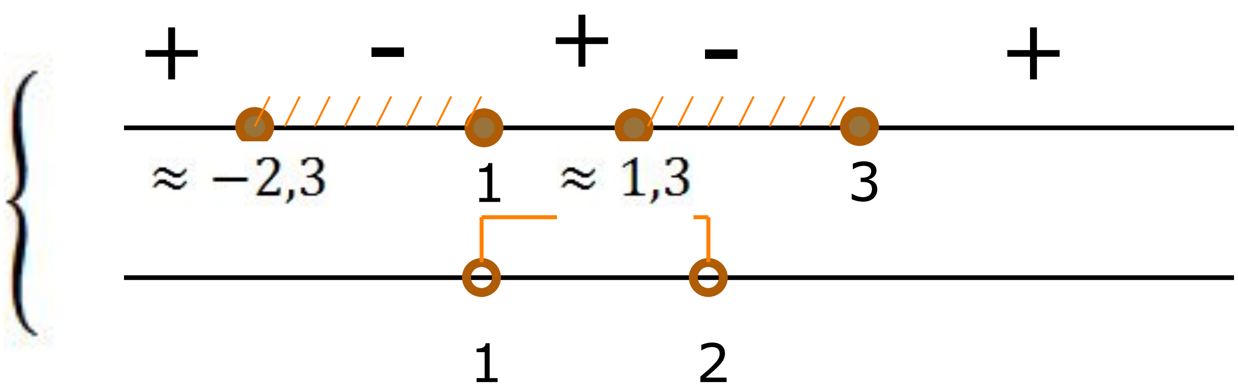
Пример 7



ОТВЕТ: $(-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; 4)$

НАЗАД

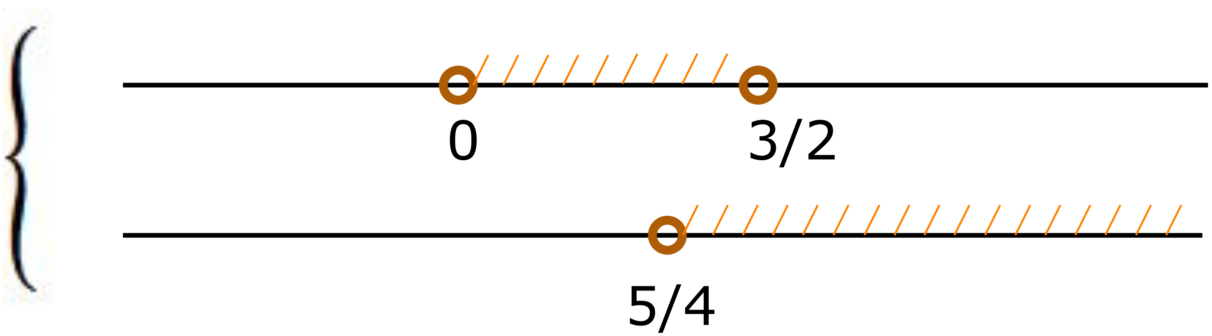
Пример 8



ОТВЕТ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

НАЗАД

Пример 9



ОТВЕТ: $x \in \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$

НАЗАД