Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

При аппроксимации функций,
а также в некоторых других задачах
приходится вычислять значения многочленов вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

При непосредственном вычислении
потребуется выполнить большое число операций

$\dfrac{n^2 + n}{2}$ умножений и n сложений

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$

на двучлен $x-\xi$

равен значению этого многочлена при $x=\xi$

<u>Доказательство</u>:

Пусть $P_n(x)=(x-\xi)g(x)+r$, где

$g(x)$ – многочлен степени на единицу меньшей, чем $P_n(x)$

Найдем значение $P_n(x)$ при $x=\xi$

$$P_n(\xi)=(\xi-\xi)g(\xi)+r=r$$

что и требовалось доказать

Рассмотрим более простой метод деления многочлена

$P_n(x)$ на линейный двучлен $x-\xi$

Представим многочлен

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

в виде

$$P_n(x)=(x-\xi)g(x)+b_n,$$

где

$$g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\dots+b_{n-1}$$

или

$$P_n(x)=(x-\xi)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\dots+b_{n-1}\right)+b_n$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве имеем

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n=$$

$$=b_0x^n+b_1x^{n-1}-b_0\xi x^{n-1}+b_2x^{n-2}-b_1\xi x^{n-2}+b_3x^{n-3}-b_2\xi x^{n-3}+\dots$$

$$\dots+b_{n-1}x-b_{n-2}\xi x+b_n-b_{n-1}\xi$$

После приведения подобных членов имеем

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\dots+a_{n-1}x+a_n=$$

$$=b_0x^n+(b_1-b_0\xi)x^{n-1}+(b_2-b_1\xi)x^{n-2}+(b_3-b_2\xi)x^{n-3}+\dots$$

$$\dots+(b_{n-1}-b_{n-2}\xi)x+(b_n-b_{n-1}\xi)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим равенства

$$
\begin{aligned}
a_0 &= b_0\,,\\
a_1 &= b_1 - b_0\xi\,,\\
a_2 &= b_2 - b_1\xi\,,\\
a_3 &= b_3 - b_2\xi\,,\\
a_4 &= b_4 - b_3\xi\,,\\
&\cdots\\
a_{n-1} &= b_{n-1} - b_{n-2}\xi\,,\\
a_n &= b_n - b_{n-1}\xi\,,
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0\,,\\
b_1 &= b_0\xi + a_1\,,\\
b_2 &= b_1\xi + a_2\,,\\
b_3 &= b_2\xi + a_3\,,\\
b_4 &= b_3\xi + a_4\,,\\
&\cdots\\
b_{n-1} &= b_{n-2}\xi + a_{n-1}\,,\\
b_n &= b_{n-1}\xi + a_n = r = P_n(\xi).
\end{aligned}
$$

Вычисления удобно располагать по следующей схеме
(называемой **схемой Горнера**):

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots$	a_{n-1}	a_n
ξ		$b_0\xi$	$b_1\xi$	$b_2\xi$	$b_3\xi$	$\dots$	$b_{n-2}\xi$	$b_{n-1}\xi$
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$	b_{n-1}	b_n

Этот метод требует n умножений и n сложений.

Вычисление значений аналитической функции

Действительная функция f(x) называется аналитической в точке ξ если в некоторой окрестности $|x-\xi|<R$ этой точки функция разлагается в степенной ряд (*ряд Тейлора*):

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\dots$$

При $\xi=0$ получаем *ряд Маклорена*

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

Разность

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

называется остаточным членом
и представляет собой ошибку
при замене функции f(x) полиномом
Тейлора

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

Как известно,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi + \theta(x-\xi))}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

В частности, для ряда Маклорена имеем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

Имеются также другие формы остаточных членов.

Вычисление значений показательной функции

Для показательной функции справедливо разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$-\infty < x < +\infty$$

Остаточный член ряда имеет вид

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad 0 < \theta < 1$$

Приближенное вычисление для малых x удобно вести

,

пользуясь следующей рекуррентной записью:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad u_k = \frac{x}{k} u_{k-1}$$

$$S_k = S_{k-1} + u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $u_0 = 1$ $S_0 = 1$

Число $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

приближенно дает искомый результат.

Для остатка ряда может быть получена следующая оценка:

$$|R_n(x)| < |u_n| \quad \text{при} \qquad 0 < 2|x| \le n$$

Поэтому процесс суммирования может быть прекращен, как только очередной вычисленный член ряда будет по модулю меньше заданной допустимой погрешности:

$$|u_n| < \varepsilon, \text{ если только} \qquad |x| \le \frac{n}{2}$$

Для больших по модулю значений x этот ряд мало пригоден для вычислений

Вычисление значений логарифмической функции

Пользуемся разложением по степеням $\dfrac{1-z}{1+z}$

$$\ln z = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2k-1} \qquad (0 < z < +\infty)$$

Пусть x – положительное число.
Представим его в виде

$$x = 2^m z$$

где m – целое число
и $\dfrac{1}{2} \le z < 1$

Тогда, полагая $\frac{1-z}{1+z}=\xi$, получим

$$\ln x = \ln 2_m z = m \ln 2 + \ln z = m \ln 2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\xi^{2k-1}$$

где $0<\xi\le\frac{1}{3}$

Обозначив $u_k = \dfrac{\xi^{2k-1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

получаем рекуррентную запись

$$\ln x = m \ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{n} u_k + R_n$$

$$u_1 = \xi, \qquad u_{k+1} = \frac{(2k-1)\xi^2}{2k+1} u_k$$

Процесс суммирования прекращается, как только выполнится неравенство $u_n < 4\varepsilon$

где ε – допустимая погрешность.

Вычисление значений синуса и косинуса.

Для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$

пользуемся степенными разложениями

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Эти ряды при больших x сходятся медленно, но, учитывая периодичность функции

$\sin x$ и $\cos x$

и формулы приведения тригонометрических функций, легко заключить, что достаточно уметь вычислять

$\sin x$ и $\cos x$

для промежутка $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

При этом можно использовать следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} \sin x = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + R_n(x), \\ u_1 = x, \qquad u_{k+1} = -\dfrac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k + R_n(x), \\ v_1 = 1, \qquad u_{k+1} = -\dfrac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

Так как в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ряд

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

знакочередующийся с монотонно убывающими по модулю членами, то для его остатка справедлива оценка

$$|R_n| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = |u_{n+1}|$$

Аналогично для ряда

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$|R_n| \le |u_{n+1}|$$

Следовательно, процесс вычисления

$\sin x$ и $\cos x$

можно прекратить, как только очередной полученный член ряда по модулю будет меньше допустимой погрешности ε