

***Вычисление значений
многочлена. Схема
Горнера***

При аппроксимации функций,
а также в некоторых других задачах
приходится вычислять значения многочленов вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

При непосредственном вычислении
потребуется выполнить большое число операций

$$\frac{n^2 + n}{2} \text{ умножений и } n \text{ сложений}$$

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$
на двучлен $x - \xi$

равен значению этого многочлена при $x = \xi$

Доказательс

тво:

Пусть $P_n(x) = (x - \xi)g(x) + r$, где

$g(x)$ — многочлен степени на единицу меньшей, чем $P_n(x)$

Найдем значение $P_n(x)$ при $x = \xi$

$$P_n(\xi) = (\xi - \xi)g(\xi) + r = r$$

что и требовалось доказать

Рассмотрим более простой метод деления многочлена

$P_n(x)$ на линейный двучлен $x - \xi$

Представим
многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

В
виде $P_n(x) = (x - \xi)g(x) + b_n$,
где

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1}$$

или

и

$$P_n(x) = (x - \xi)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1}) + b_n$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве
имеем

$$\begin{aligned}
 & a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\
 = & b_0x^n + b_1x^{n-1} - b_0\xi x^{n-1} + b_2x^{n-2} - b_1\xi x^{n-2} + b_3x^{n-3} - b_2\xi x^{n-3} + \dots \\
 & \dots + b_{n-1}x - b_{n-2}\xi x + b_n - b_{n-1}\xi
 \end{aligned}$$

После приведения подобных членов
имеем

$$\begin{aligned}
 & a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\
 = & b_0x^n + (b_1 - b_0\xi)x^{n-1} + (b_2 - b_1\xi)x^{n-2} + (b_3 - b_2\xi)x^{n-3} + \dots \\
 & \dots + (b_{n-1} - b_{n-2}\xi)x + (b_n - b_{n-1}\xi)
 \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты
при одинаковых степенях получим
равенства

$$a_0 = b_0,$$

$$a_1 = b_1 - b_0\xi,$$

$$a_2 = b_2 - b_1\xi,$$

$$a_3 = b_3 - b_2\xi,$$

$$a_4 = b_4 - b_3\xi,$$

⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠

$$a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}\xi,$$

$$a_n = b_n - b_{n-1}\xi,$$

$$b_0 = a_0,$$

$$b_1 = b_0\xi + a_1,$$

$$b_2 = b_1\xi + a_2,$$

$$b_3 = b_2\xi + a_3,$$

$$b_4 = b_3\xi + a_4,$$

⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠

$$b_{n-1} = b_{n-2}\xi + a_{n-1},$$

$$b_n = b_{n-1}\xi + a_n = r = P_n(\xi).$$

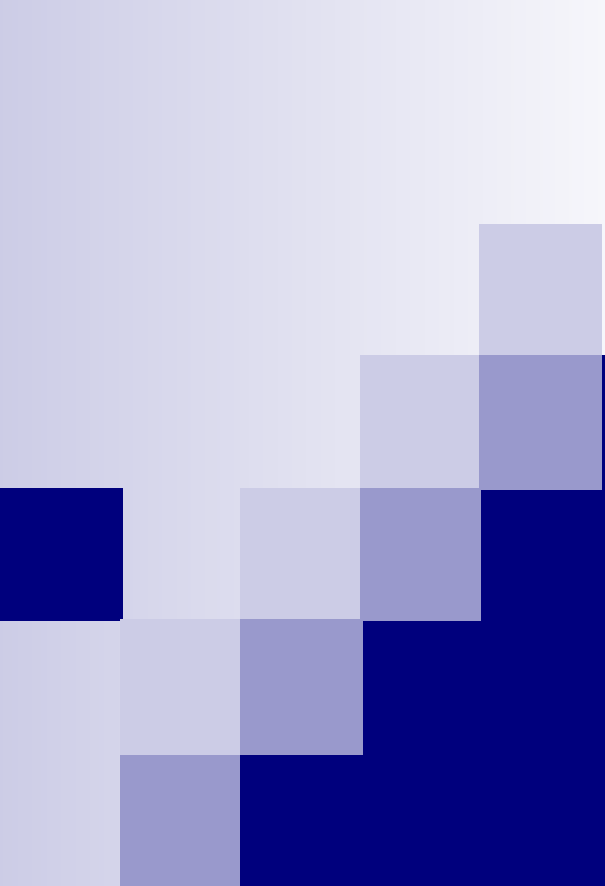
или

Вычисления удобно располагать по следующей
схеме

(называемой схемой Горнера):

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	\dots	a_{n-1}	a_n
ξ		$b_0\xi$	$b_1\xi$	$b_2\xi$	$b_3\xi$	\dots	$b_{n-2}\xi$	$b_{n-1}\xi$
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots	b_{n-1}	b_n

Этот метод требует n умножений и n сложений.



*Вычисление значений
аналитической
функции*

Действительная функция $f(x)$ называется

аналитической в точке ξ

если в некоторой окрестности $|x - \xi| < R$

этой точки функция разлагается в степенной ряд (*ряд Тейлора*):

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \dots$$

При $\xi = 0$ получаем *ряд
Маклорена*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Разность

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k$$

называется остаточным членом
и представляет собой ошибку
при замене функции $f(x)$ полиномом
Тейлора

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k$$

Как

ИЗВЕСТНО,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi + \theta(x - \xi))}{(n+1)!} (x - \xi)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

В частности, для ряда Маклорена
имеем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

Имеются также другие формы остаточных членов.

Вычисление значений показательной функции

Для показательной функции справедливо разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$-\infty < x < +\infty$$

Остаточный член ряда имеет вид

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \theta < 1$$

Приближенное вычисление для малых x удобно вести

,
пользуясь следующей рекуррентной записью:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad u_k = \frac{x}{k} u_{k-1}$$

$$S_k = S_{k-1} + u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $u_0 = 1 \quad S_0 = 1$

Число $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

приближенно дает искомый результат.

Для остатка ряда может быть получена
следующая оценка:

$$|R_n(x)| < |u_n| \quad \text{при} \quad 0 < 2|x| \leq n$$

Поэтому процесс суммирования может быть прекращен,
как только очередной вычисленный член ряда
будет по модулю меньше заданной допустимой погрешности:

$$|u_n| \leq \epsilon \quad \text{если только} \quad |x| \leq \frac{n}{2}$$

Для больших по модулю значений x
этот ряд мало пригоден для вычислений

Вычисление значений логарифмической функции

Пользуемся разложением по степеням $\frac{1-z}{1+z}$

$$\ln z = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{2k-1} \quad (0 < z < +\infty)$$

Пусть x – положительное число.

Представим его в виде

$$x = 2^m z$$

где m – целое число $\frac{1}{2} \leq z < 1$
и

Тогда, полагая $\frac{1-z}{1+z} = \xi$,
получим

$$\ln x = \ln 2_m z = m \ln 2 + \ln z = m \ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \xi^{2k-1}$$

где $0 < \xi \leq \frac{1}{3}$

В Обозначи $u_k = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$

получаем рекуррентную запись

$$\ln x = m \ln 2 - 2 \sum_{k=1}^n u_k + R_n$$

$$u_1 = \xi, \quad u_{k+1} = \frac{(2k-1)\xi^2}{2k+1} u_k$$

Процесс суммирования прекращается, как только выполнится неравенство $|R_n| < 4\varepsilon$

где ε – допустимая погрешность.

Вычисление значений синуса и косинуса.

Для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$

пользуемся степенными разложениями

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

Эти ряды при больших x сходятся медленно,
но, учитывая периодичность функции

$$\sin x \quad \text{и} \quad \cos x$$

и формулы приведения тригонометрических функций,
легко заключить, что достаточно уметь вычислять

$$\sin x \quad \text{и} \quad \cos x$$

для промежутка $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

При этом можно использовать следующие рекуррентные формулы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \sum_{k=1}^n u_k + R_n(x), \\ u_1 = x, \quad u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \sum_{k=1}^n v_k + R_n(x), \\ v_1 = 1, \quad u_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{array} \right.$$

Так как в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ряд

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

знакопеременный с монотонно убывающими по модулю членами, то для его остатка справедлива оценка

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = |u_{n+1}|$$

Аналогично для ряда

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|$$

Следовательно, процесс вычисления

$\sin x$ и $\cos x$

можно прекратить, как только очередной полученный член ряда по модулю будет меньше допустимой погрешности ε