
The background features several large, overlapping, colorful swirls in shades of purple, green, and blue. Interspersed among these swirls are numerous small, yellow, triangular shapes that resemble sun rays or confetti, scattered across the white background.

Решение параметрических уравнений и неравенств с модулями

(схема)



Способы решения

- По определению
 - Исходя из геометрического смысла
 - По общей схеме
 - Использование специальных соотношений и свойств модуля
- 



По определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{cases}$$

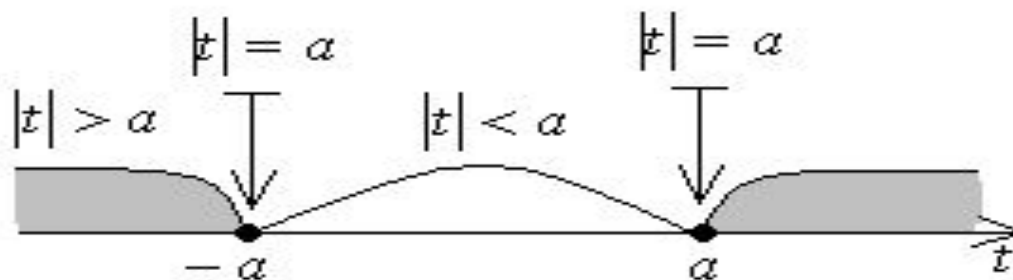
Исходя из геометрического смысла

$|a|$ – расстояние на числовой прямой от точки 0 до точки

$$|f(x)| = a \quad |f(x)| = |g(x)|$$

$$|f(x)| > a \quad |f(x)| < a$$

Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)



$$|f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{cases}$$

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}$$

По общей схеме

1. Найти ОДЗ

2. Найти нули всех подмодульных функций

3. Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на интервалы

4. Найти решение в каждом интервале (и проверить, входит ли решение в этот интервал)

Использование специальных соотношений и свойств модуля

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geq 0$

2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leq 0$

3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2$

4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$

5. $|u + v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$

6. $|u + v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0 \\ v \leq 0 \end{cases}$

7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geq 0$

8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leq 0$

9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leq x \leq b, \text{ где } a < b$

1 СВОЙСТВО: $|u| \geq 0$

2 СВОЙСТВО: $|-u| = |u|$

3 СВОЙСТВО $u \leq |u|$

4 СВОЙСТВО: $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$

5 СВОЙСТВО: $\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|}$

6 СВОЙСТВО:

$$|u^n| = |u|^n$$

7 СВОЙСТВО:

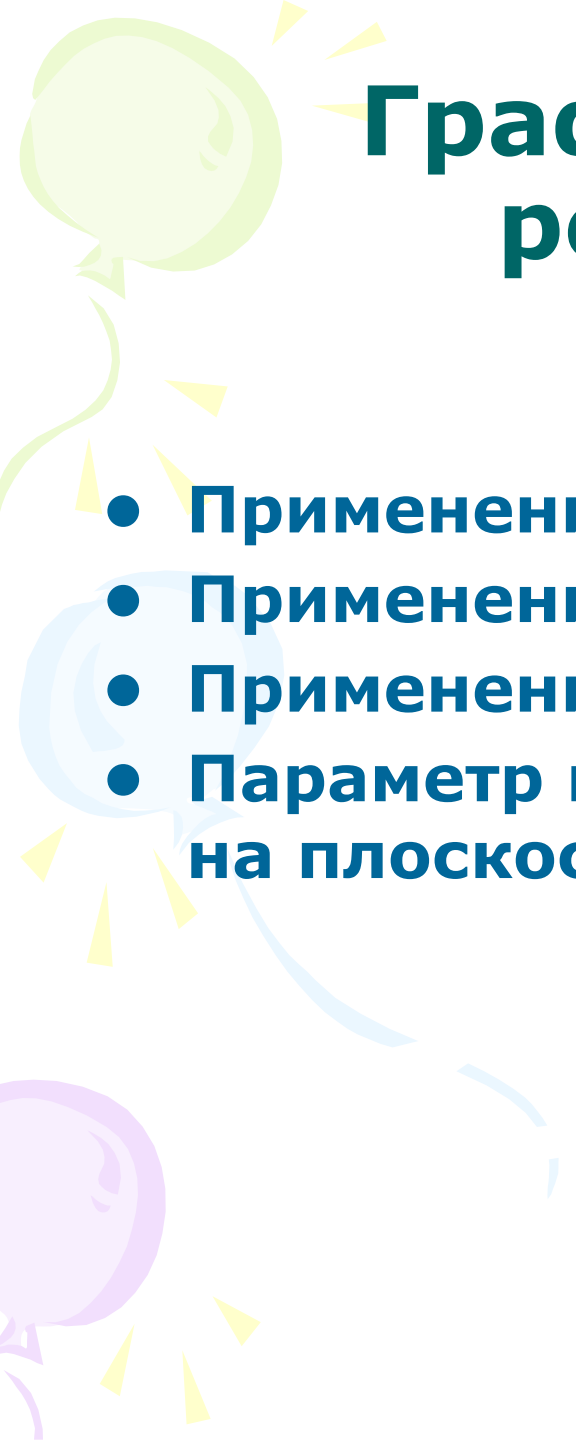
$$|u^{2k}| = |u|^{2k}$$

8 СВОЙСТВО:

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

9 СВОЙСТВО:

$$||u| - |v|| \leq |u \pm v| \leq |u| + |v|$$



Графические приемы решения задач с параметрами

- Применение параллельного переноса
- Применение поворота
- Применение гомотетии и сжатия к прямой
- Параметр как равноправная переменная на плоскости

Применение параллельного переноса

1. Сколько корней имеет уравнение

$$|x^2 - 2x - 3| = a$$

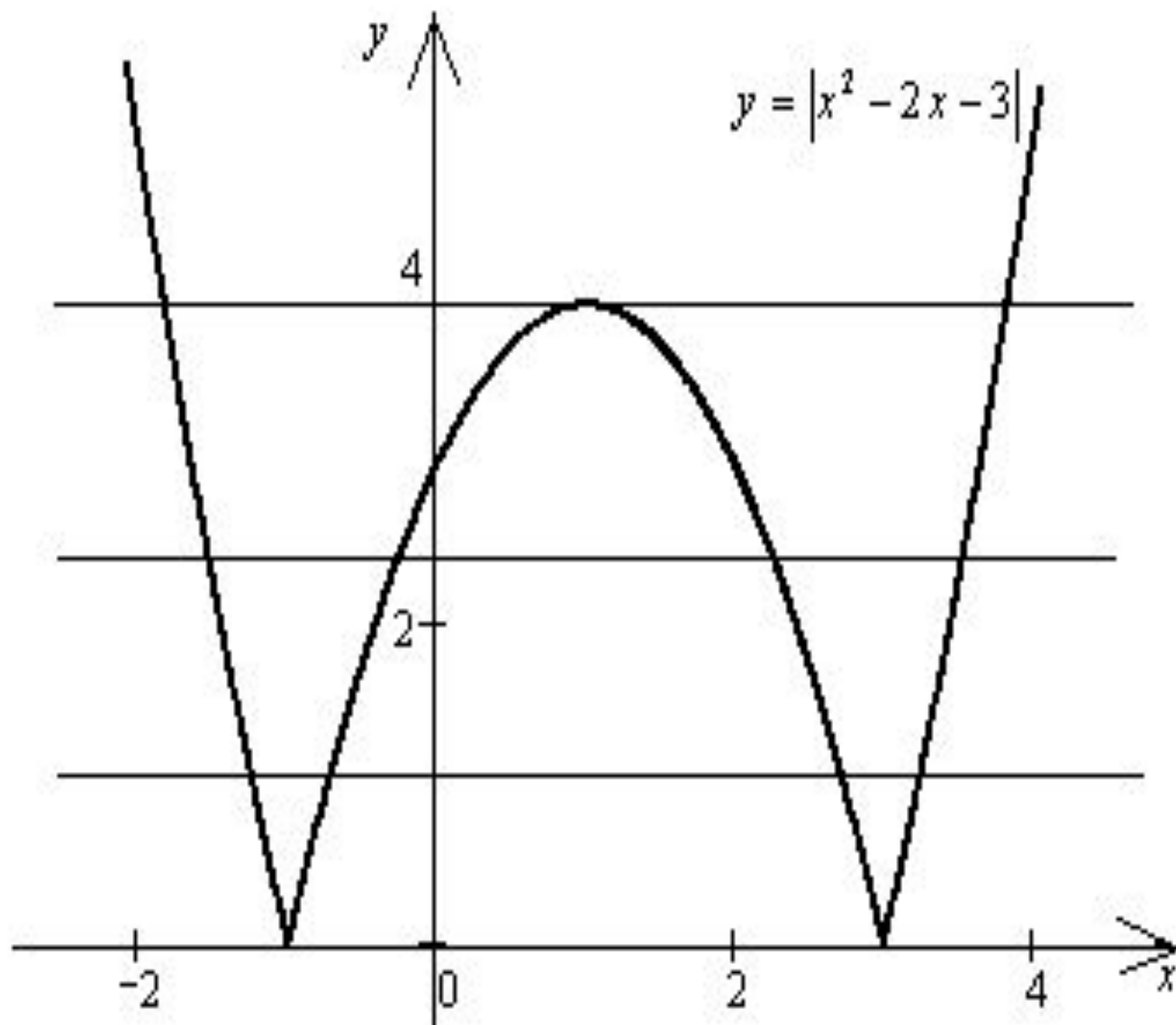
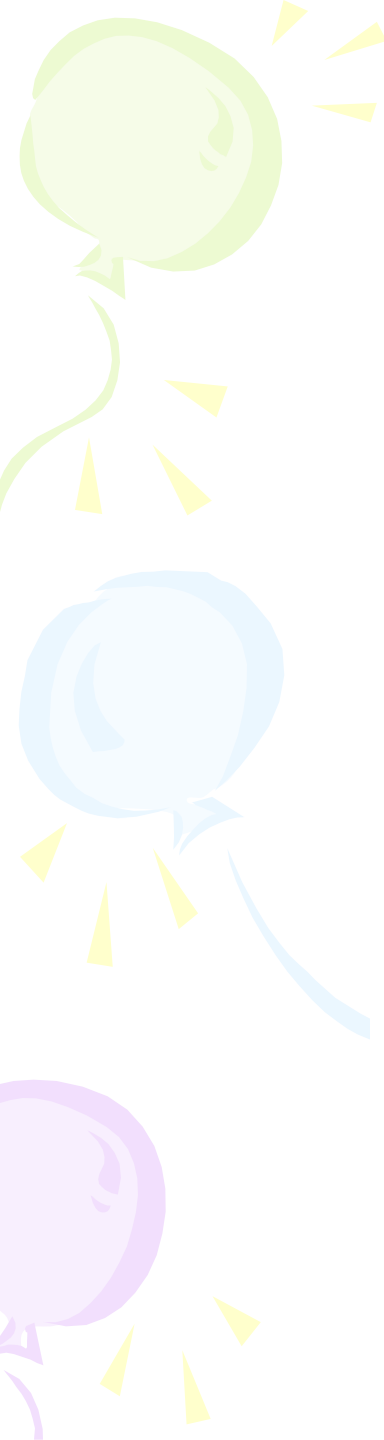
, в зависимости от значений параметра a ?

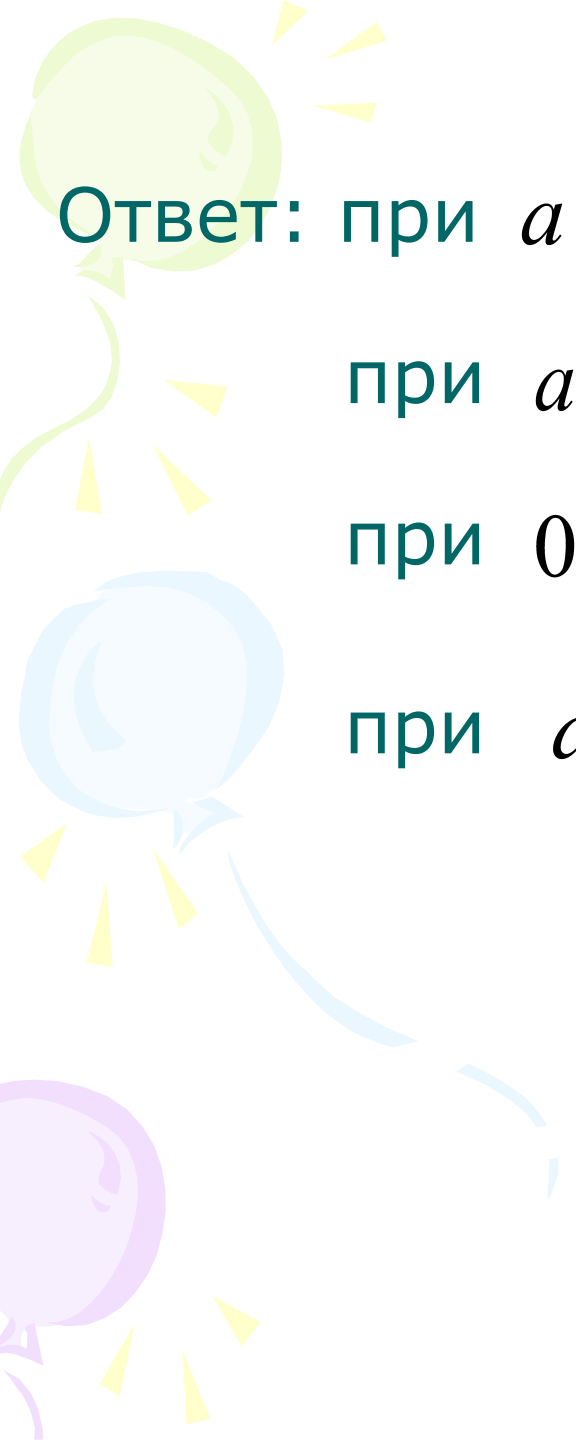


Построим в одной системе координат

графики функций $y = |x^2 - 2x - 3|$

и $y = a$.





Ответ: при $a < 0$ корней нет;

при $a = 0$ или $a > 4$ два корня;

при $0 < a < 4$ четыре корня;

при $a = 4$ три корня.



2. Сколько корней имеет уравнение

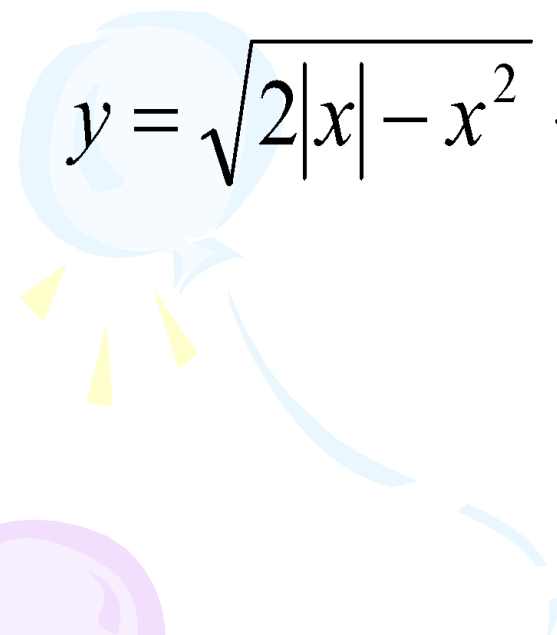
$$\sqrt{2|x| - x^2} = a$$

, в зависимости от значений параметра a ?

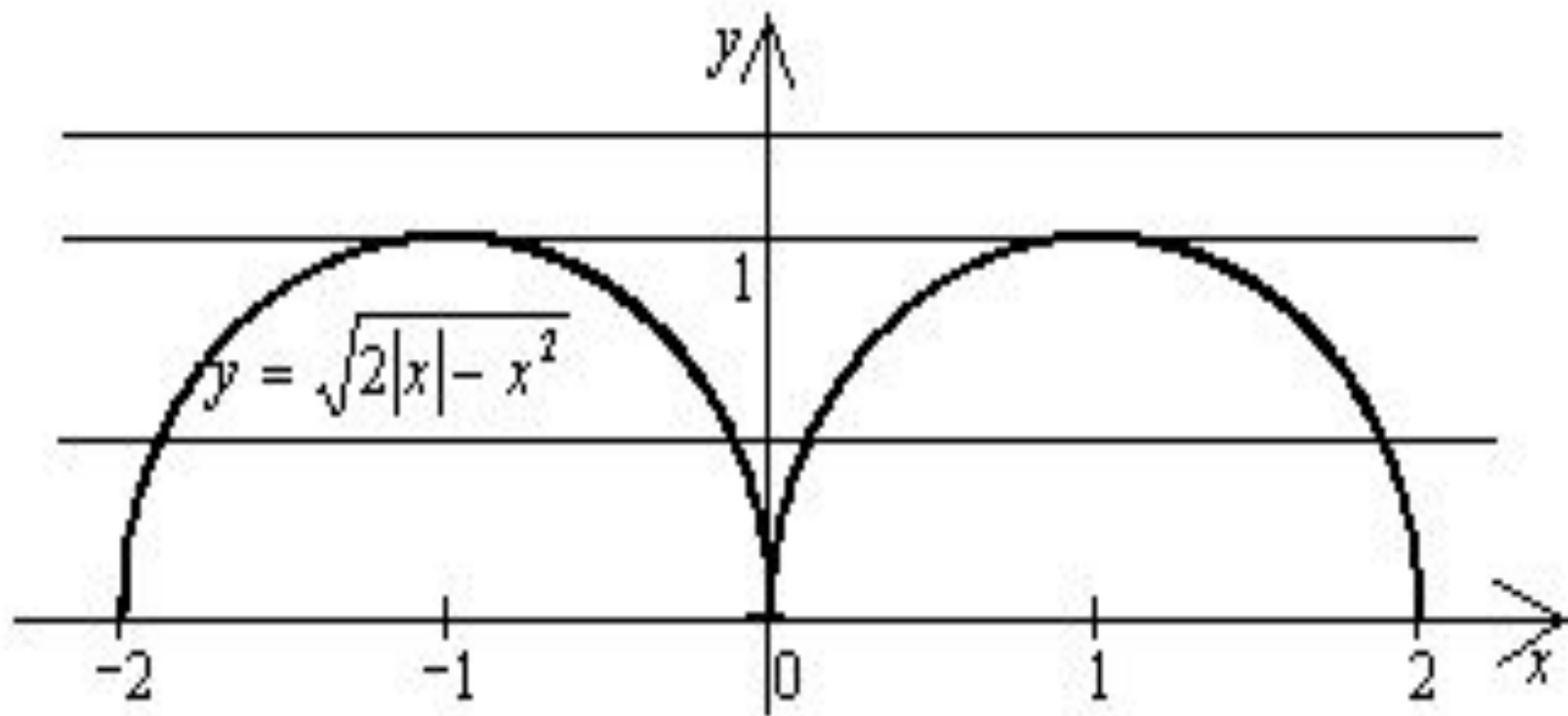


Построим в одной системе координат

графики функций $y = \sqrt{2|x| - x^2}$ и $y = a$.



$$y = \sqrt{2|x| - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2|x| - |x|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (|x| - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



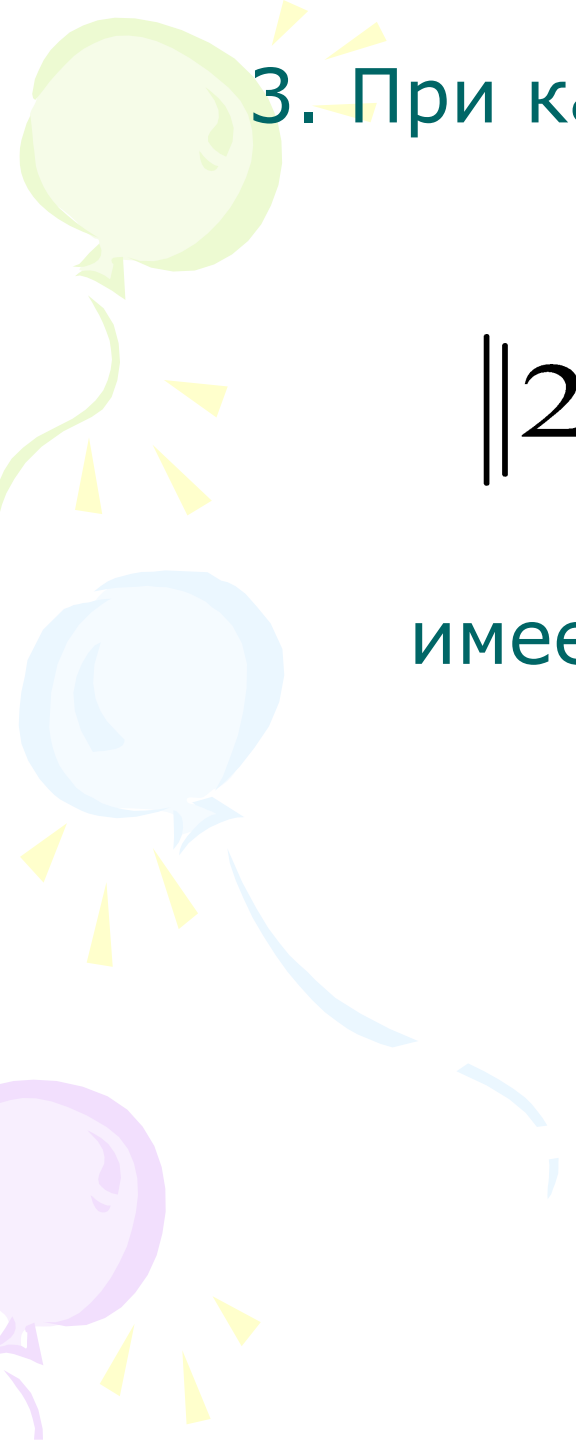


Ответ: при $a < 0$ или $a > 1$ корней нет;

при $a = 1$ два корня;

при $a = 0$ три корня;

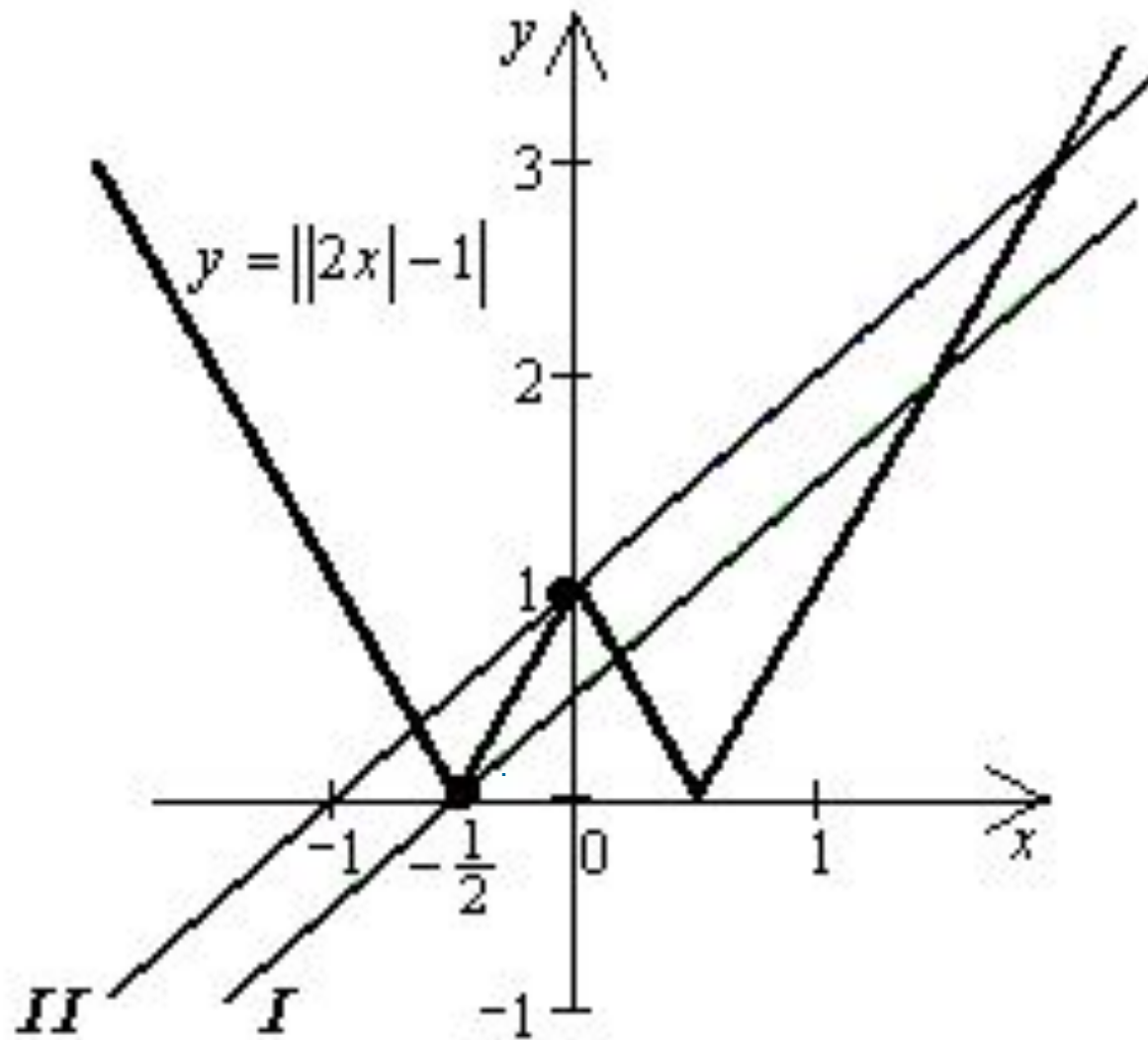
при $0 < a < 1$ четыре корня.



3. При каких значениях параметра a
уравнение

$$\left| |2x| - 1 \right| = x - a$$

имеет ровно три решения?



Ответ:
при

$$a = -1$$

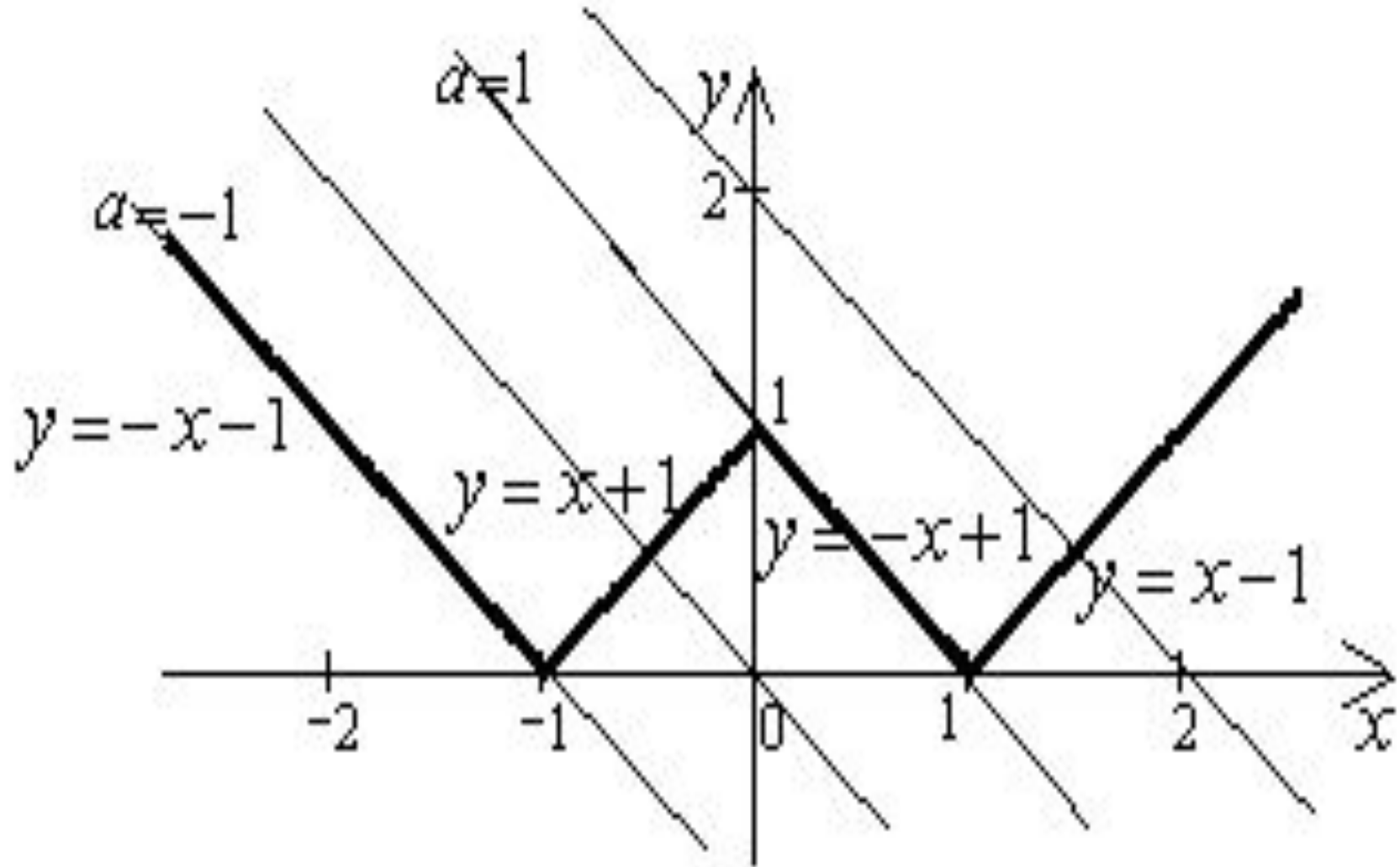
или

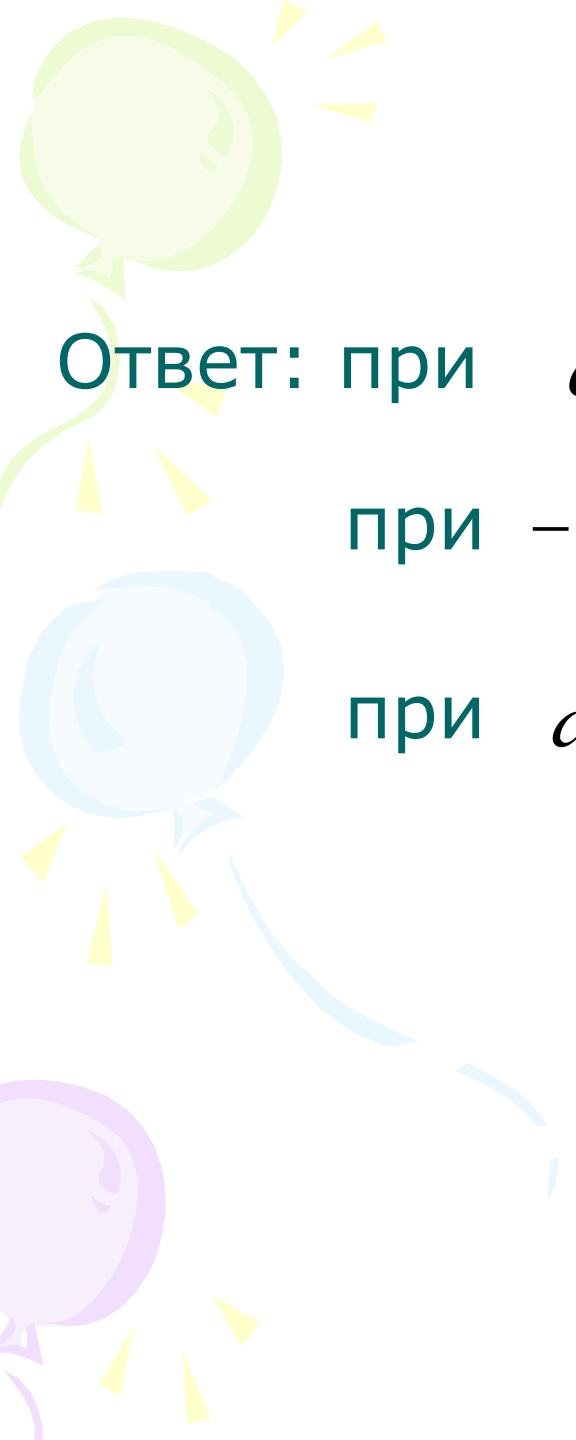
$$a = -\frac{1}{2}$$



4. Решите неравенство

$$|1 - |x|| < a - x.$$

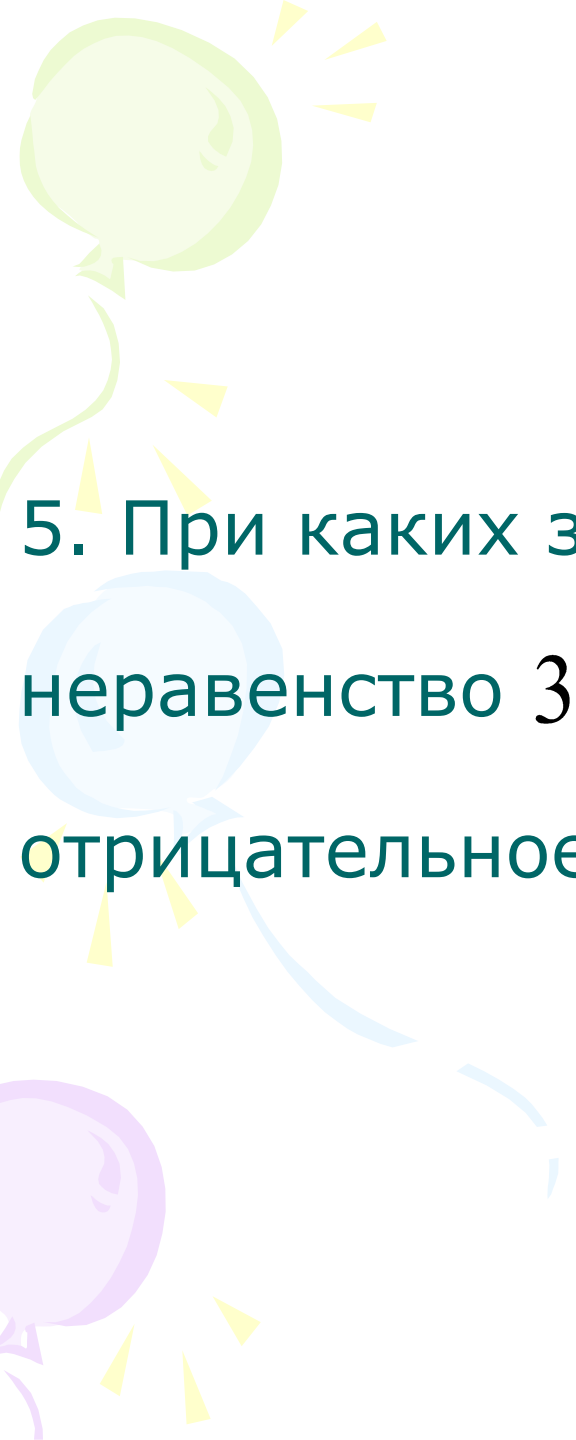




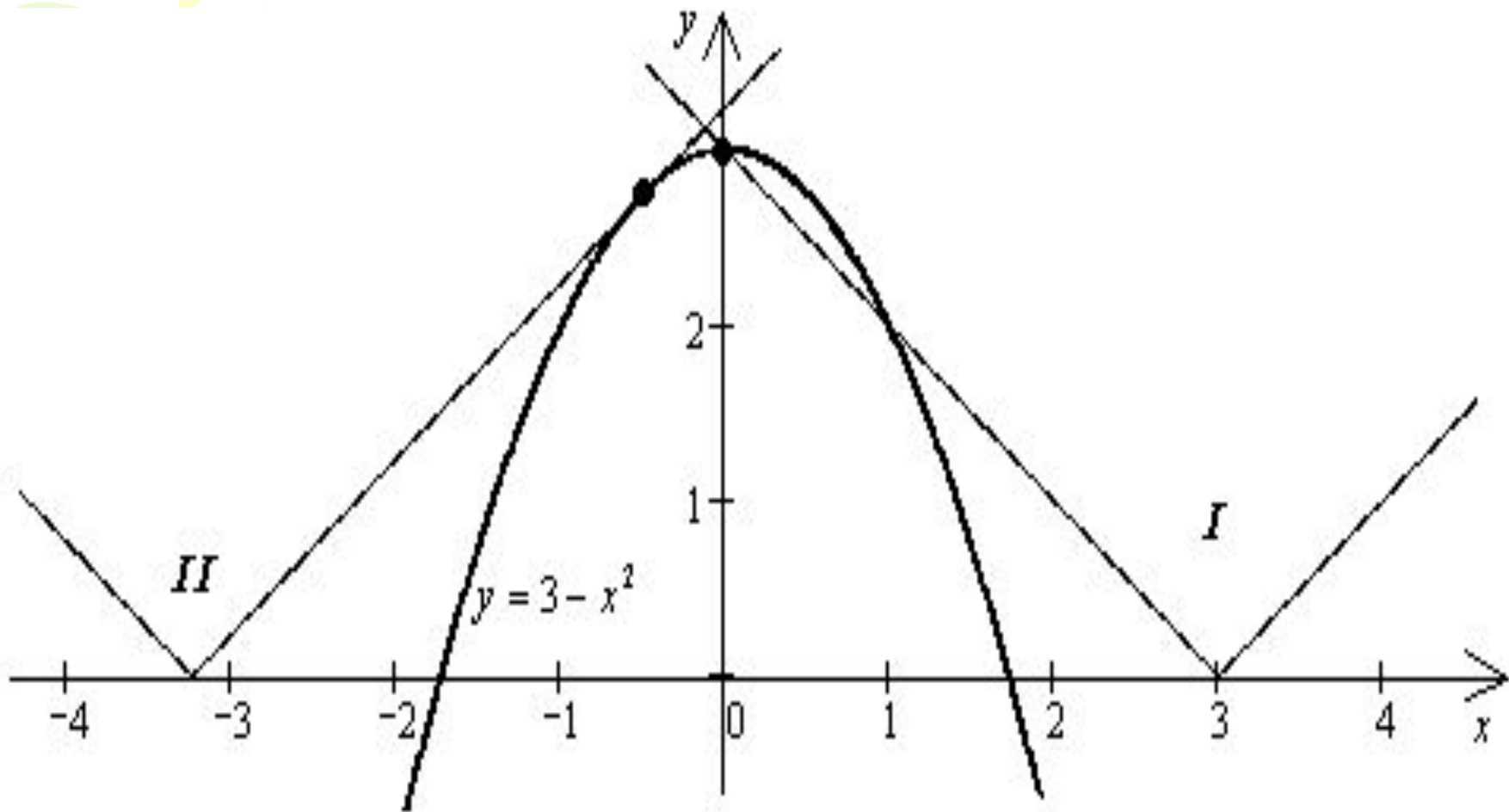
Ответ: при $a \leq -1$ нет решений;

при $-1 < a \leq 1$ $x \in \left(-\infty; \frac{a-1}{2}\right)$;

при $a > 1$ $x \in \left(-\infty; \frac{a+1}{2}\right)$.



5. При каких значениях параметра a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?



Ответ:
при

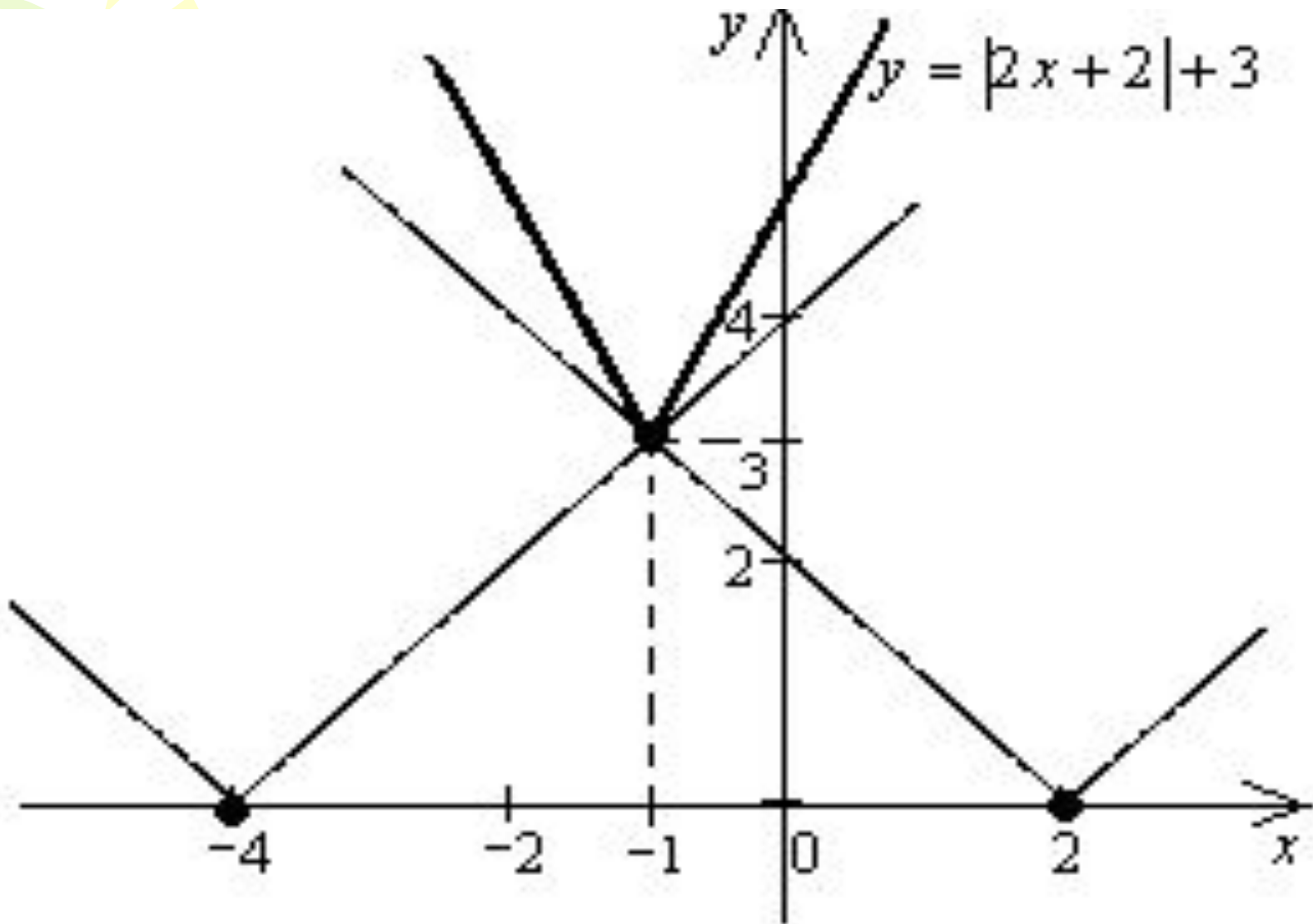
$$-\frac{13}{4} < a < 3.$$



6. При каких значениях параметра a

уравнение $|x - a| - |2x + 2| = 3$

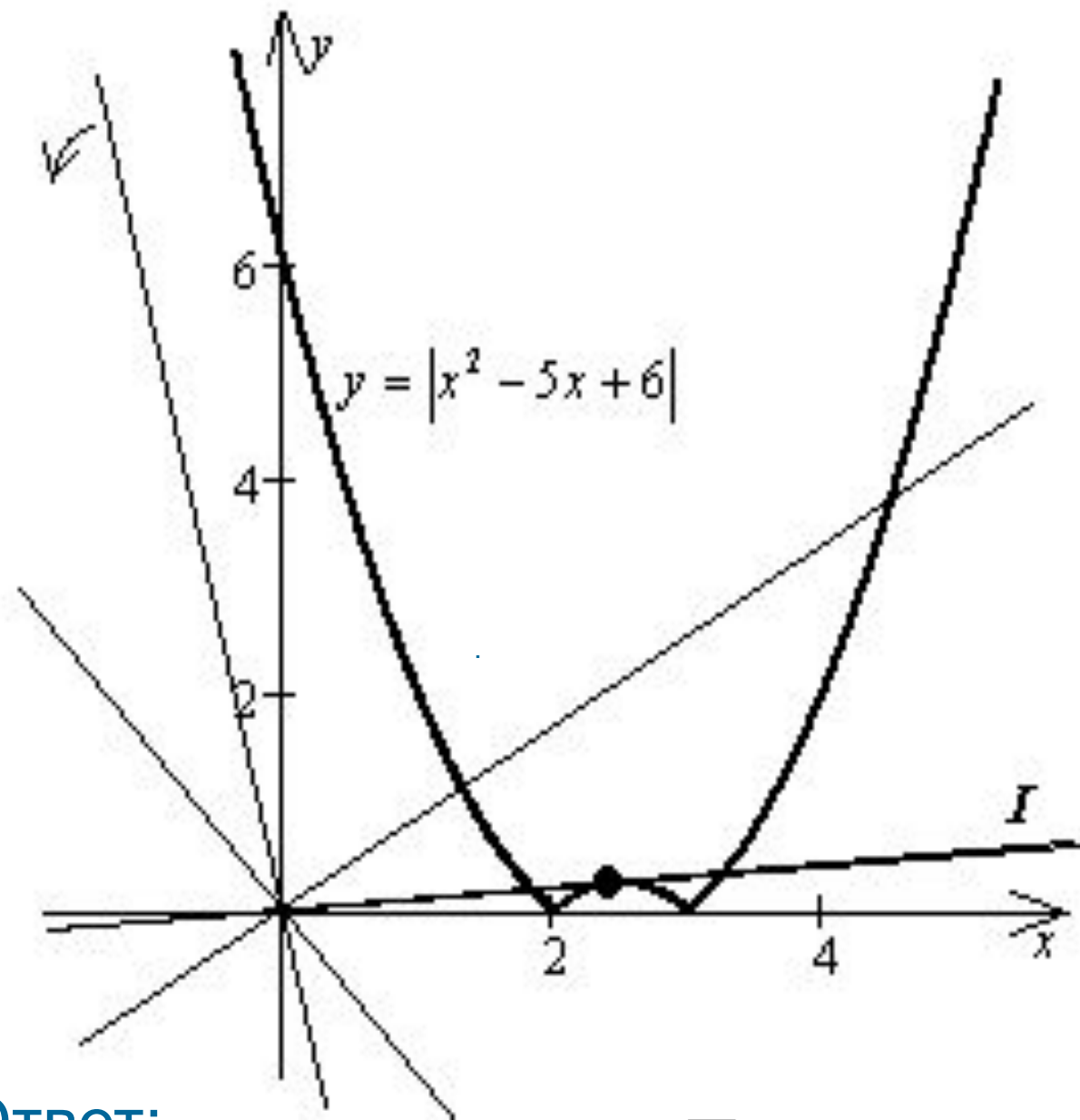
имеет единственное решение?



Ответ: при $a = -4$ или $a = 2$.

Применение поворота

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три решения?



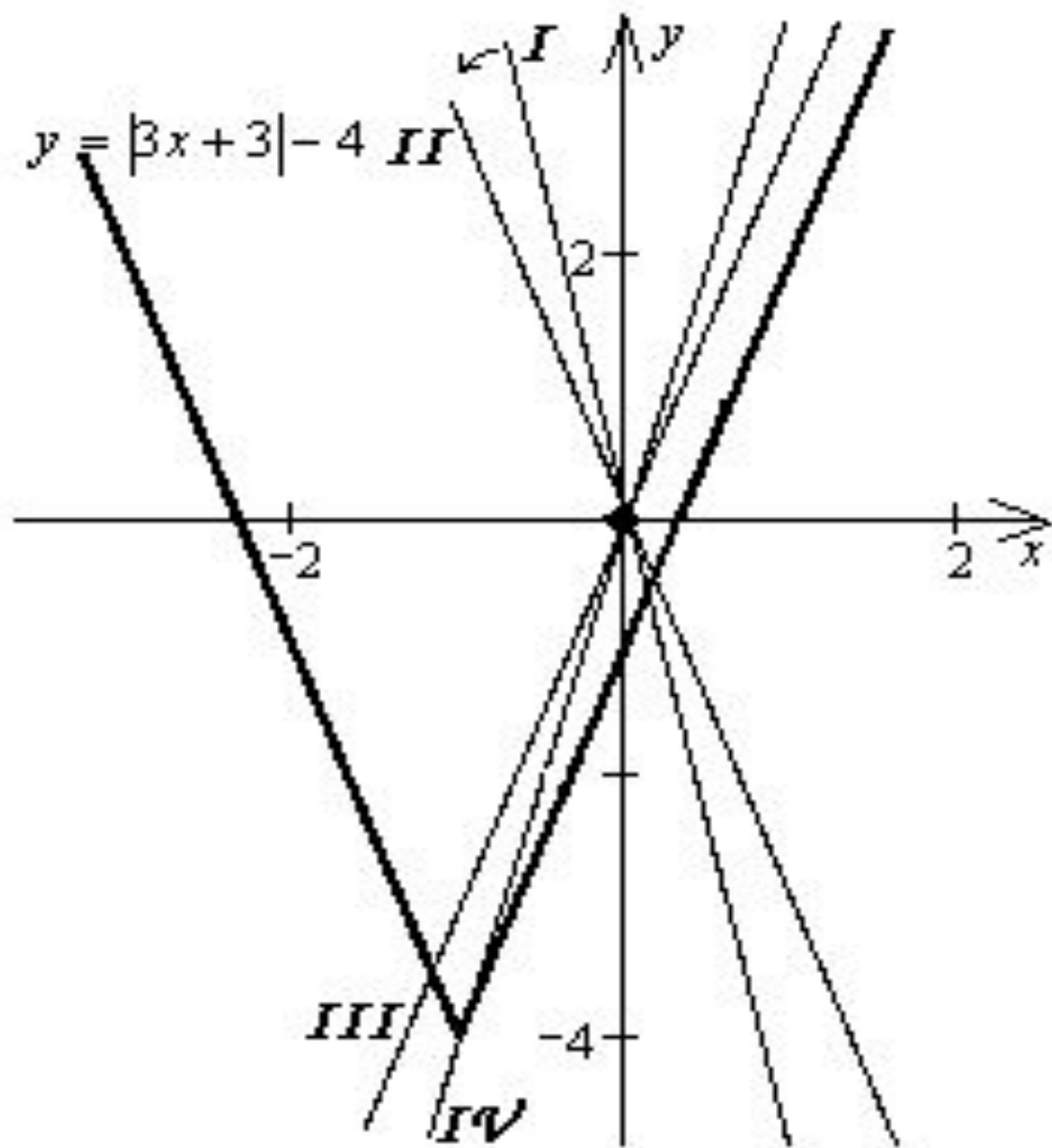
Ответ:
при


$$a = 5 - 2\sqrt{6}$$



2. Решите уравнение

$$|3x + 3| = ax + 4$$





Ответ: при $a \leq -3$ $x = \frac{1}{3-a}$;

при $-3 < a < 3$ $x_1 = \frac{1}{3-a}$; $x_2 = \frac{-7}{a+3}$;

при $3 \leq a \leq 4$ $x = \frac{-7}{a+3}$;

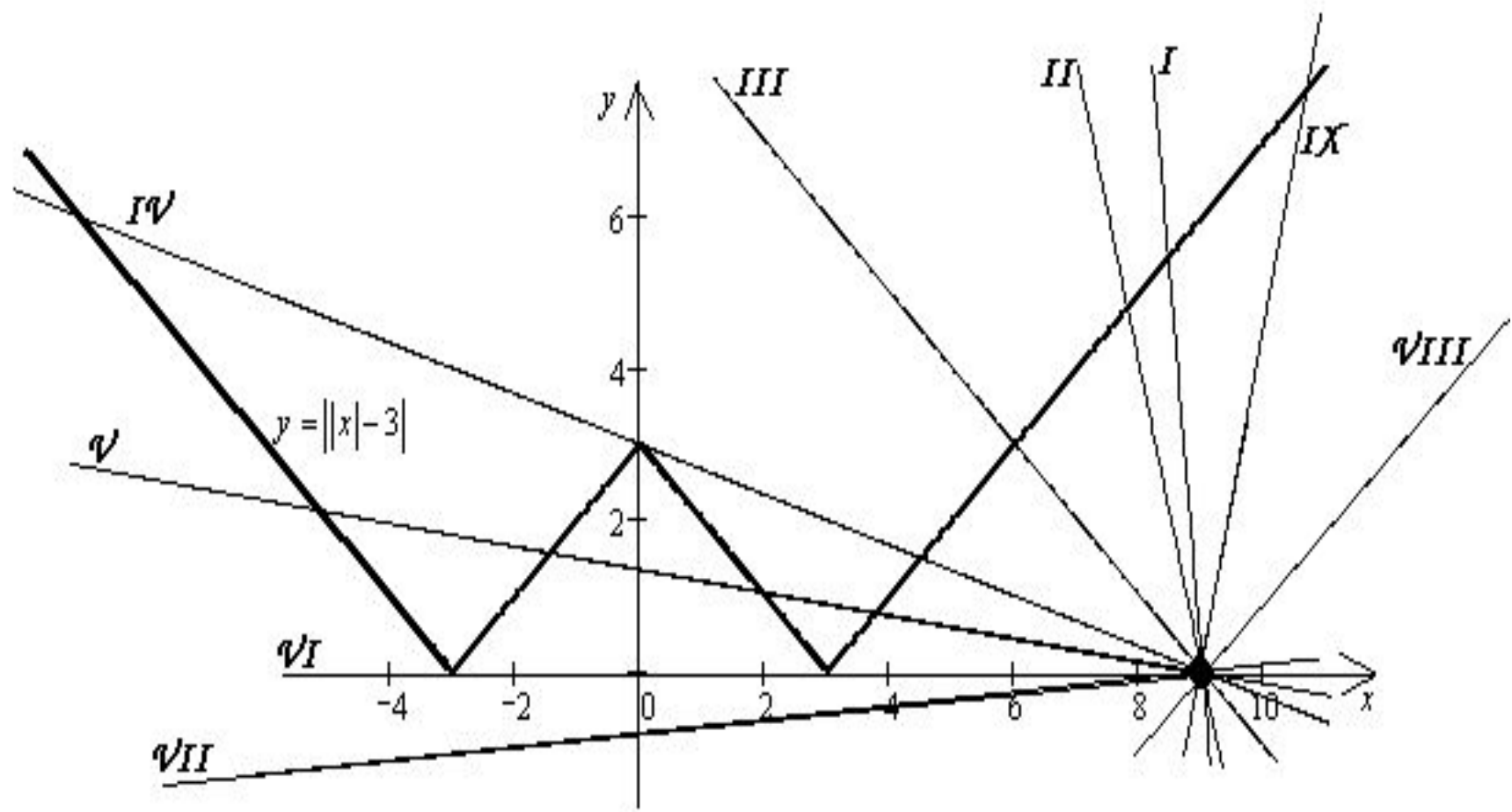
при $a > 4$ $x = \frac{1}{3-a}$.




3. Сколько корней имеет уравнение

$$\left| |x| - 3 \right| = k(x - 9)$$

в зависимости от значений параметра a ?





Ответ: при $k \leq -1$ один корень;

при $-1 < k < -\frac{1}{3}$ два корня;

при $k = -\frac{1}{3}$ три корня;

при $-\frac{1}{3} < k < 0$ четыре корня;

при $k = 0$ два корня;

при $0 < k \leq 1$ корней нет;

при $k > 1$ один корень.

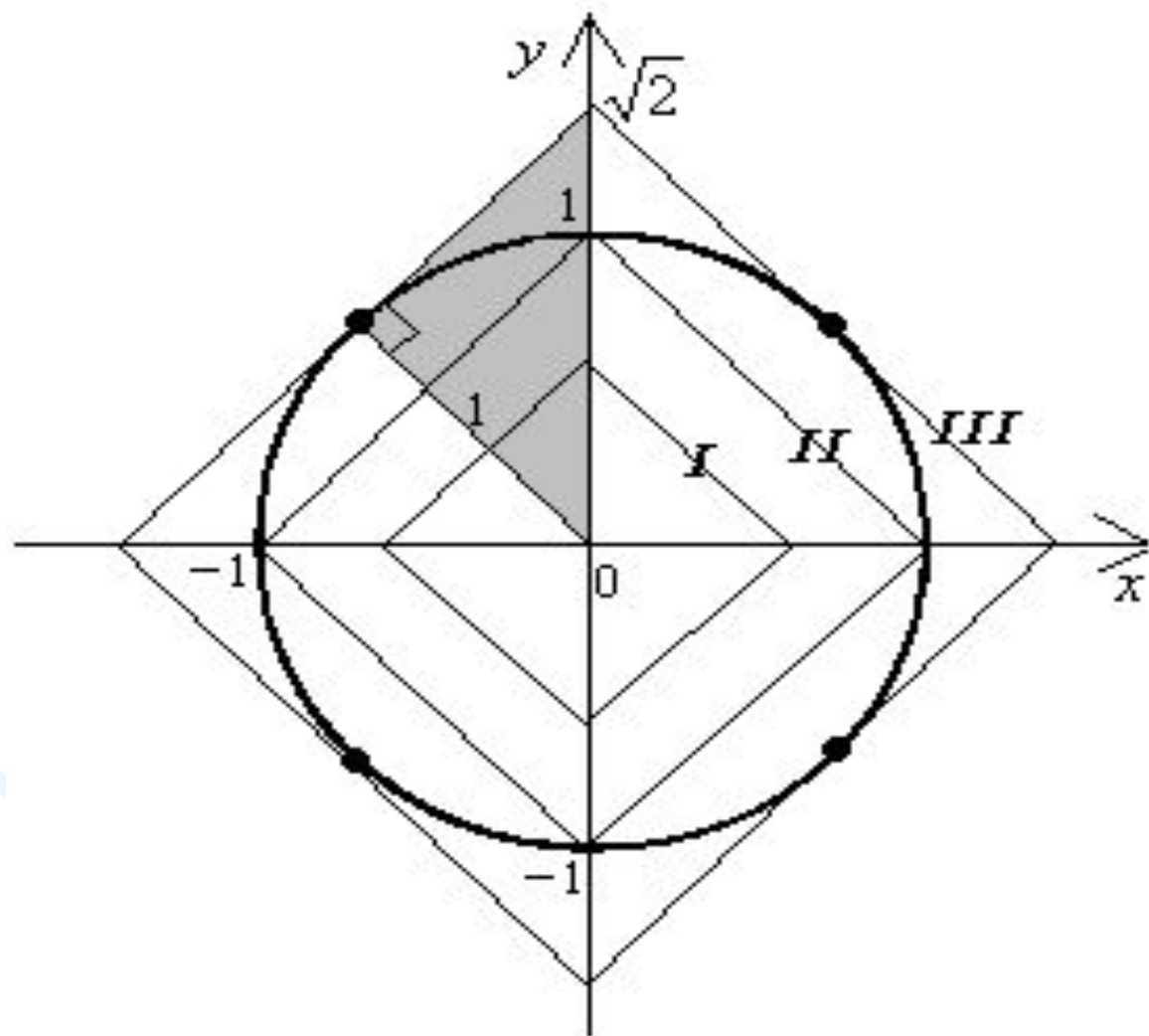
Применение гомотетии и сжатия к прямой

1. Сколько решений имеет система

уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

?



Ответ:
при

$a < 1$ решений нет; при $a = 1$

четыре решения;

при
восемь решений;

при
четыре решения;

при
решений

нет.

$$1 < a < \sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$a > \sqrt{2}$$



2. Сколько решений имеет уравнение

$$x^2 + a \cdot |x - 2| = 0?$$

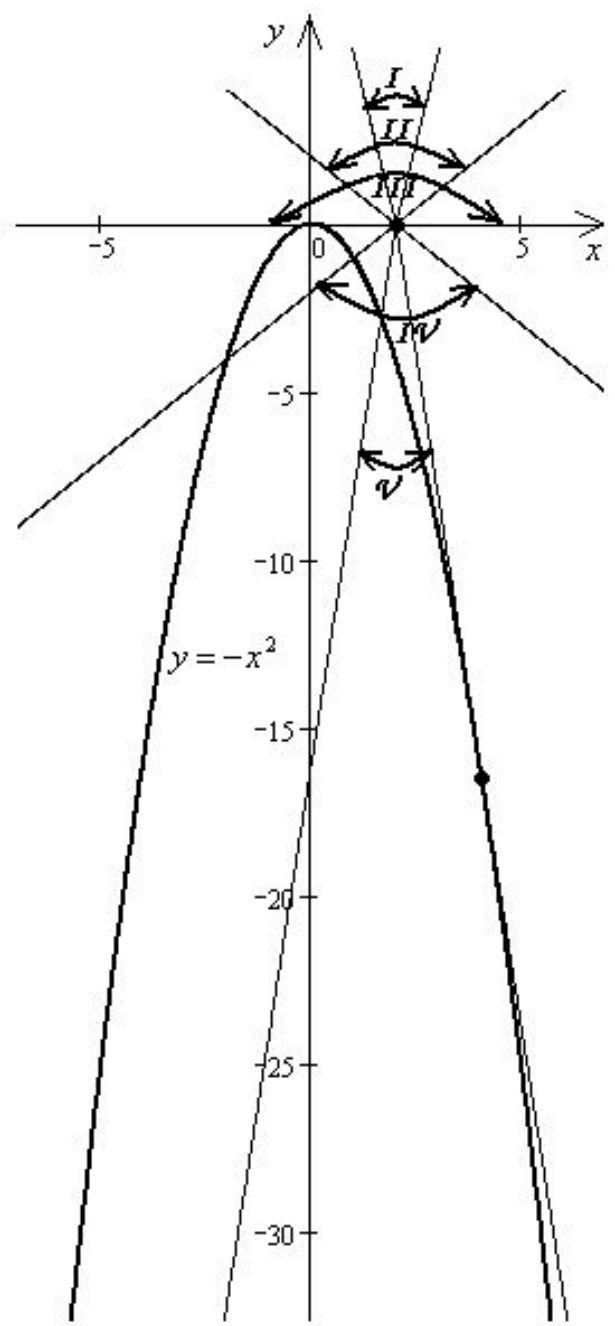
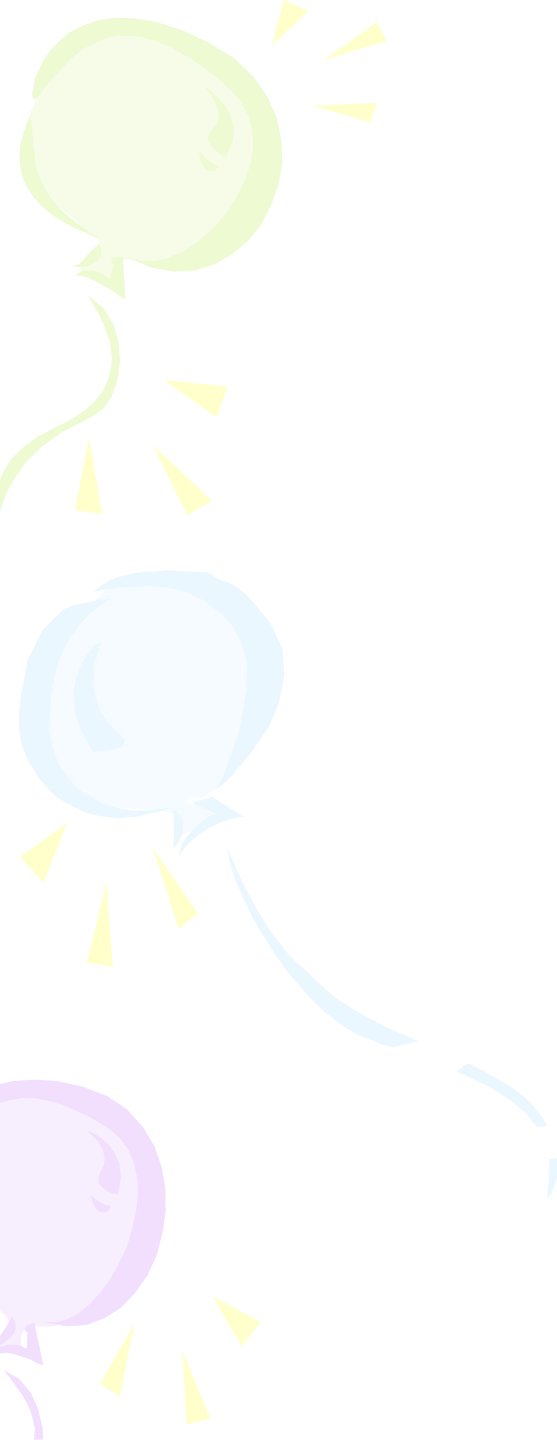


Построим в одной системе координат графики

функций $y = -x^2$

и $y = a \cdot |x - 2|$. Вторая функция задает на

плоскости семейство «уголков» с вершиной в
точке $(2; 0)$.





Ответ: при $a > 0$ нет решений; при $a = 0$

один корень; при $-8 < a < 0$

два корня; при $a = -8$ три корня;
при

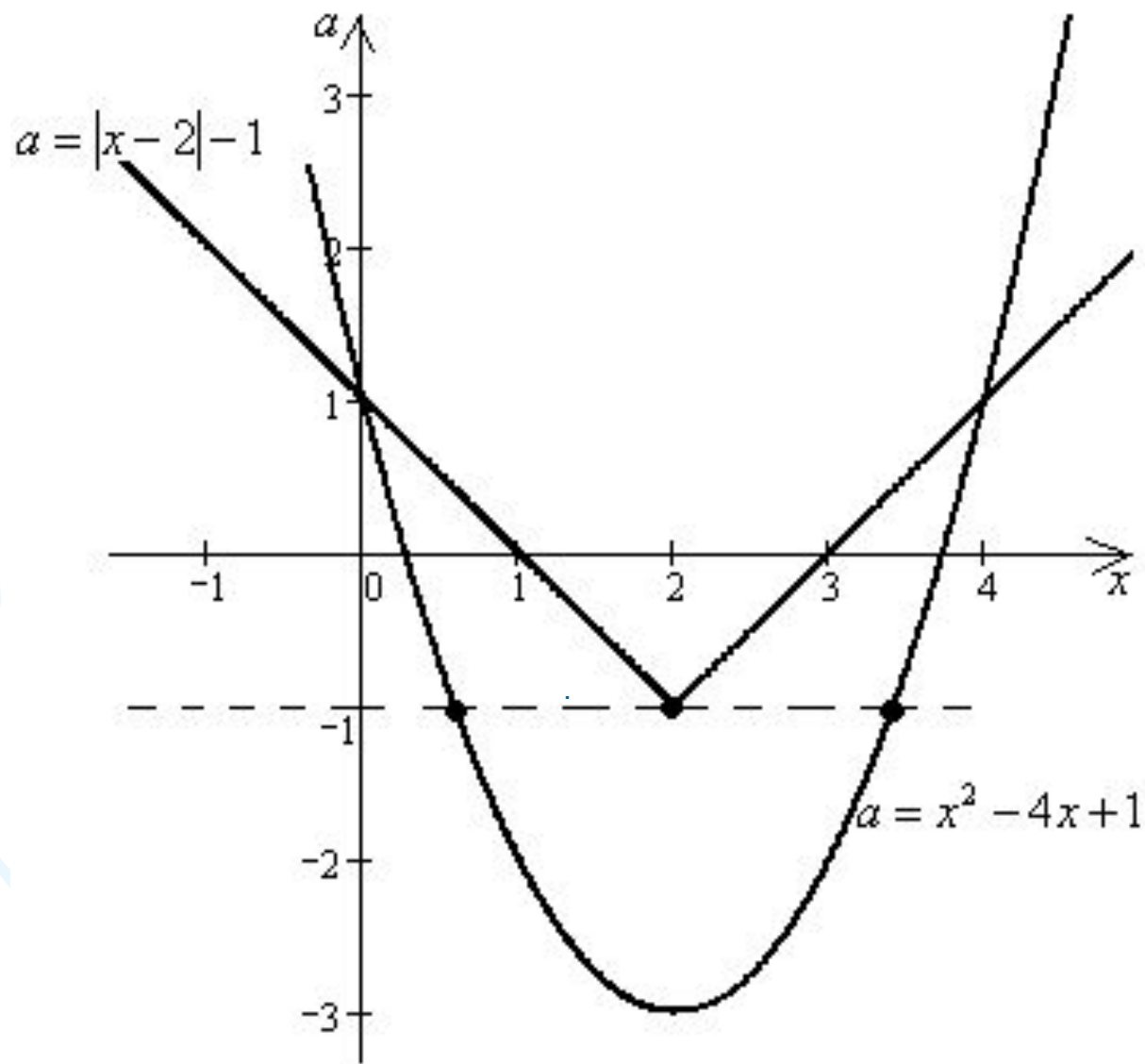
$a < -8$ четыре
корня.

Параметр как равноправная переменная на плоскости $(x; a)$

1. При каких значениях параметра a
уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x + 2|) = 0$
имеет ровно три решения?

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} a = x^2 - 4x + 1 \\ a = |x - 2| - 1 \end{cases}$$



Ответ:
при

$$a = -1$$



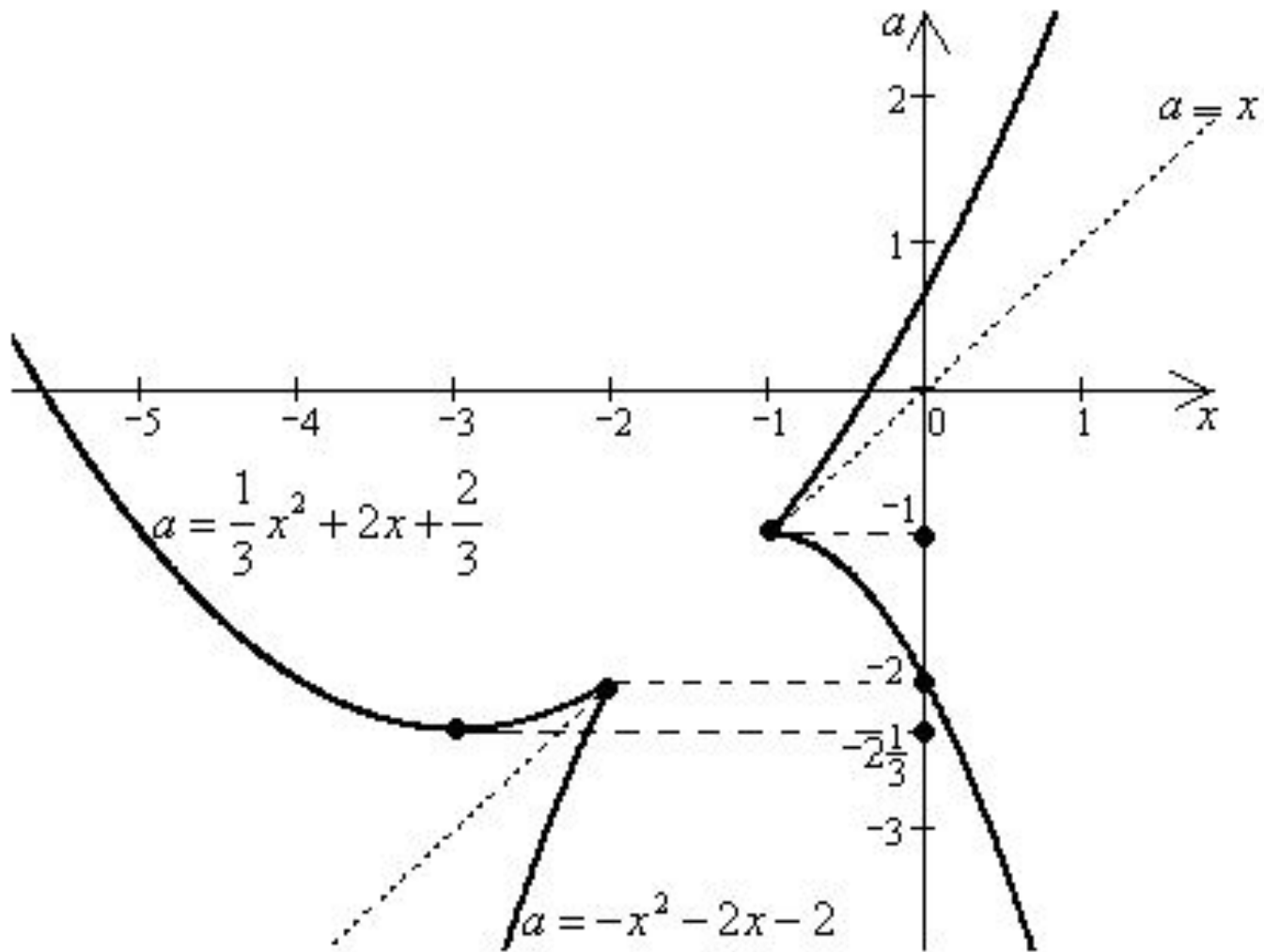
2. При каких значениях параметра a

уравнение $x^2 + 4x - 2 \cdot |x - a| + 2 - a = 0$

имеет ровно два решения?

Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} x - a \geq 0 \\ x^2 + 4x - 2(x - a) + 2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \\ a = -x^2 - 2x - 2 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x - a < 0 \\ x^2 + 4x + 2(x - a) + 2 - a = 0 \end{cases} \right. \begin{cases} a > x \\ a = \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{2}{3} \end{cases} \right. .$$



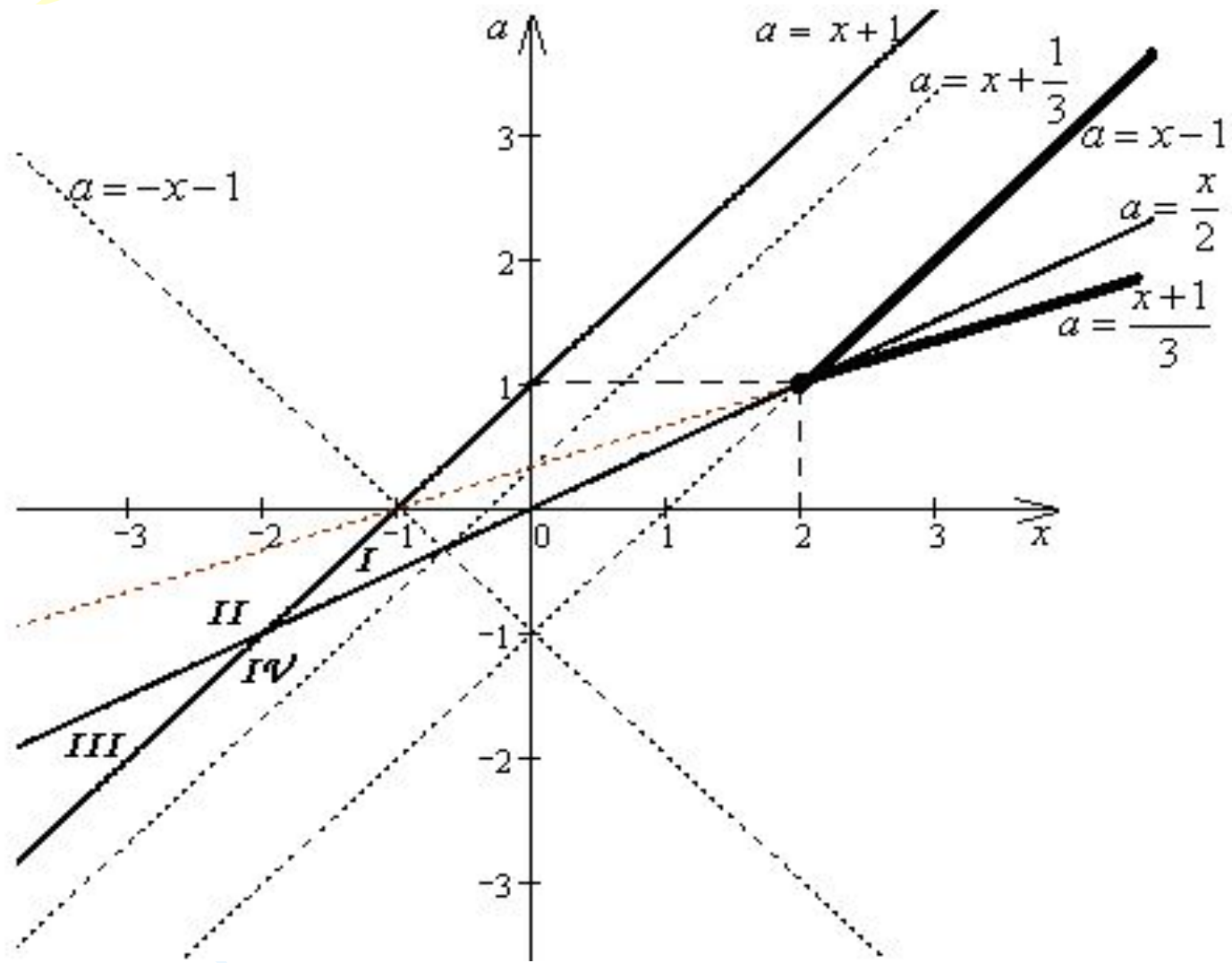
Ответ:
при

$$a < -2\frac{1}{3} \quad \text{или} \quad a > -2.$$



3. Решить уравнение

$$|x - a + 1| + |x - 2a| = x.$$



Ответ: при $a < 1$ нет решений;
 при

$a = 1$ $x = 2$; при $a > 1$ $x_1 = a + 1; x_2 = 3a - 1$.



4. При каких значениях параметра a

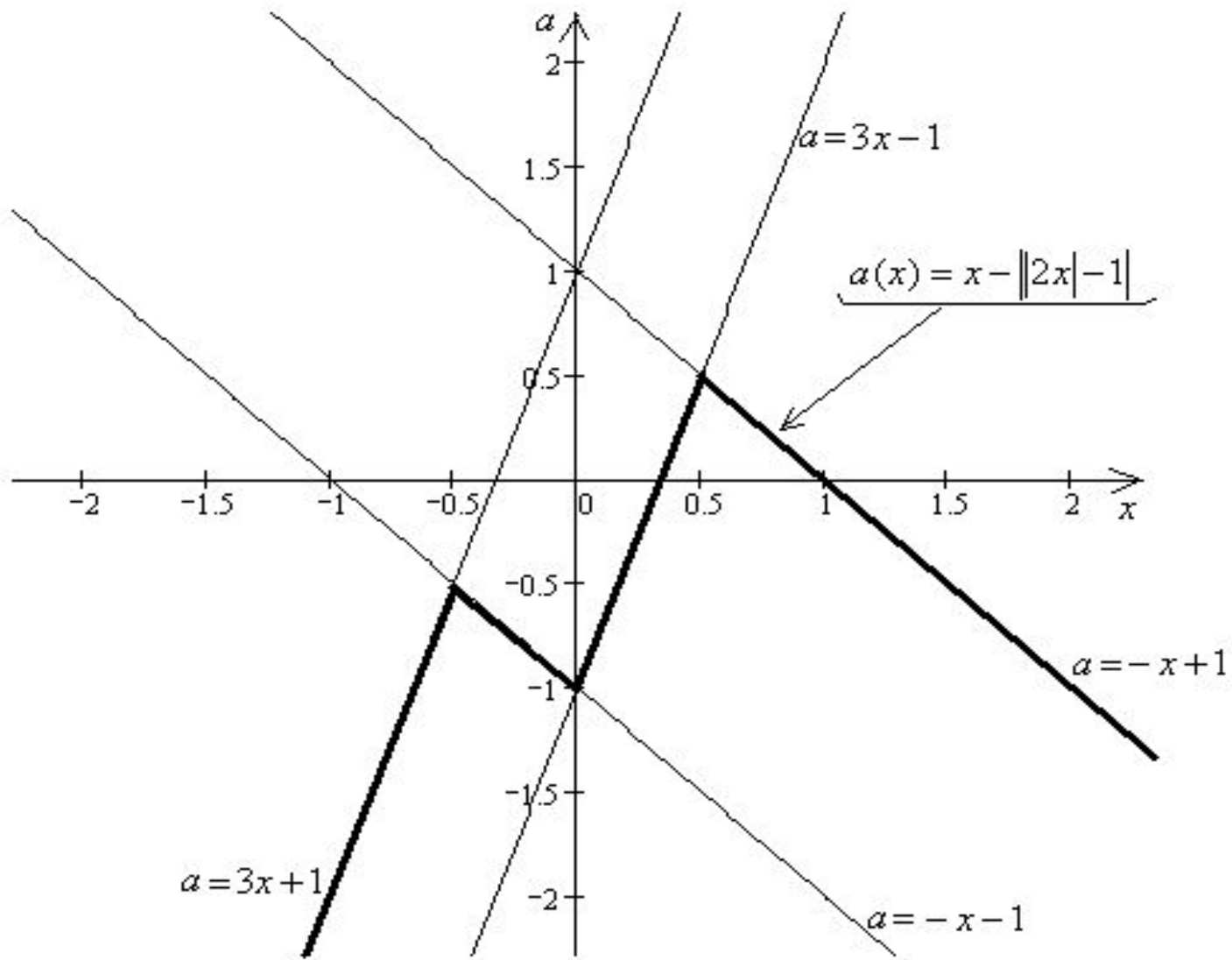
уравнение $||2x| - 1| = x - a$

имеет ровно три решения?



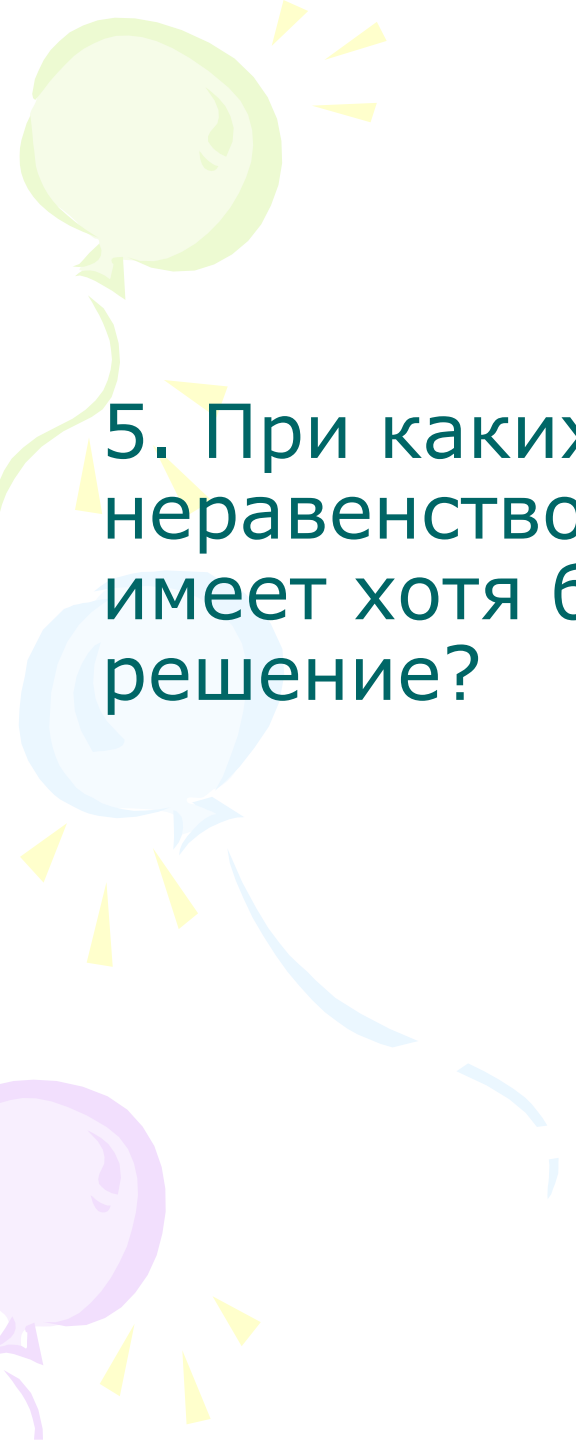
Выражая a через x получаем

$$a(x) = x - \left| |2x| - 1 \right| = \begin{cases} 3x + 1, & x < -\frac{1}{2} \\ -x - 1, & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 3x - 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -x + 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Ответ:
 при

$$a = -1 \quad \text{или} \quad a = -\frac{1}{2}.$$

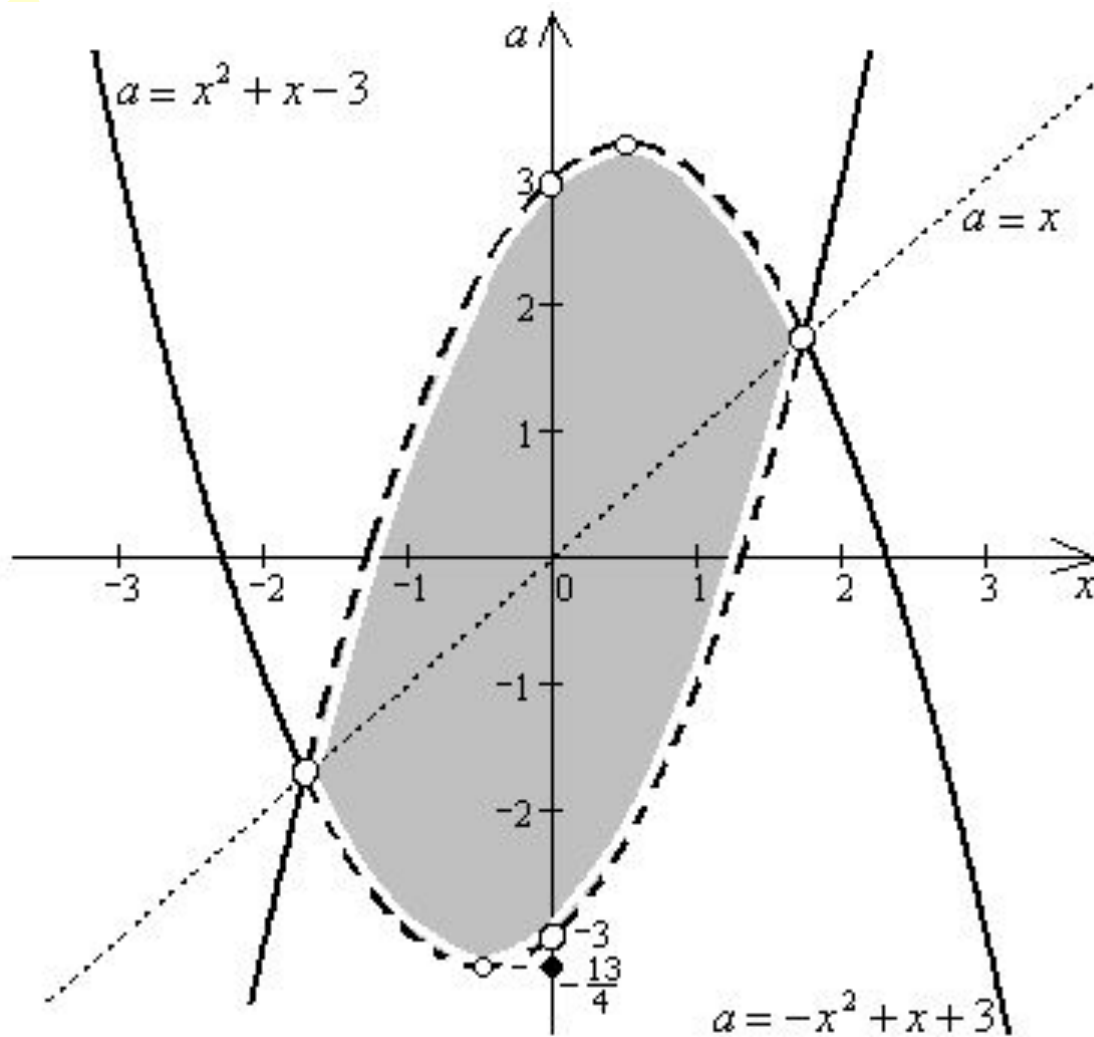


5. При каких значениях параметра a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} a \geq x \\ a < -x^2 + x + 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a < x \\ a > x^2 + x - 3 \end{cases} \right].$$

Данное неравенство равносильно совокупности



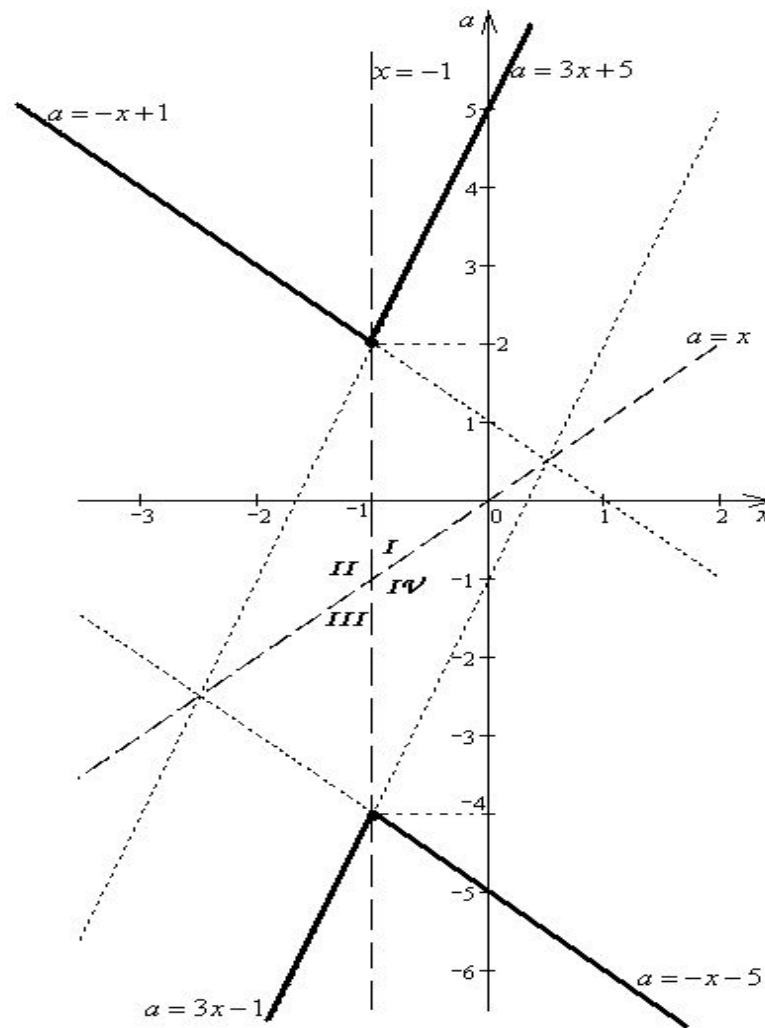
Ответ: при $-\frac{13}{4} < a < 3$.



5. При каких значениях параметра a

уравнение $|x - a| - |2x + 2| = 3$

имеет единственное решение?



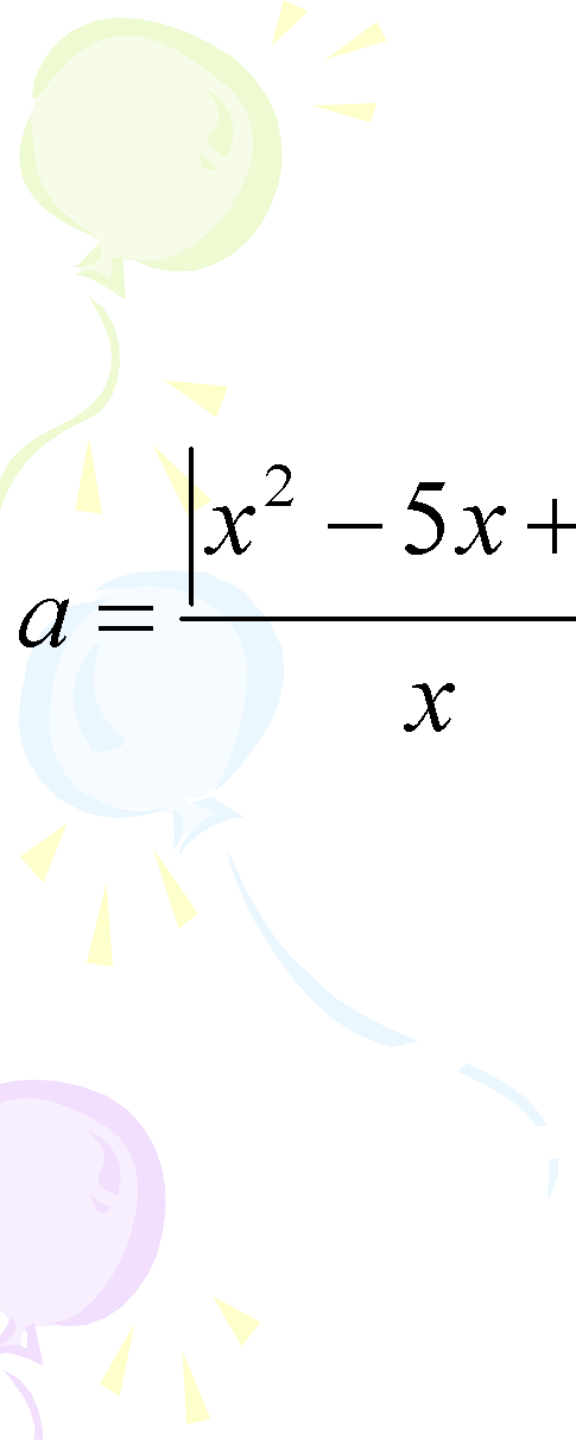
Ответ: $a = -4$ или $a = 2$.

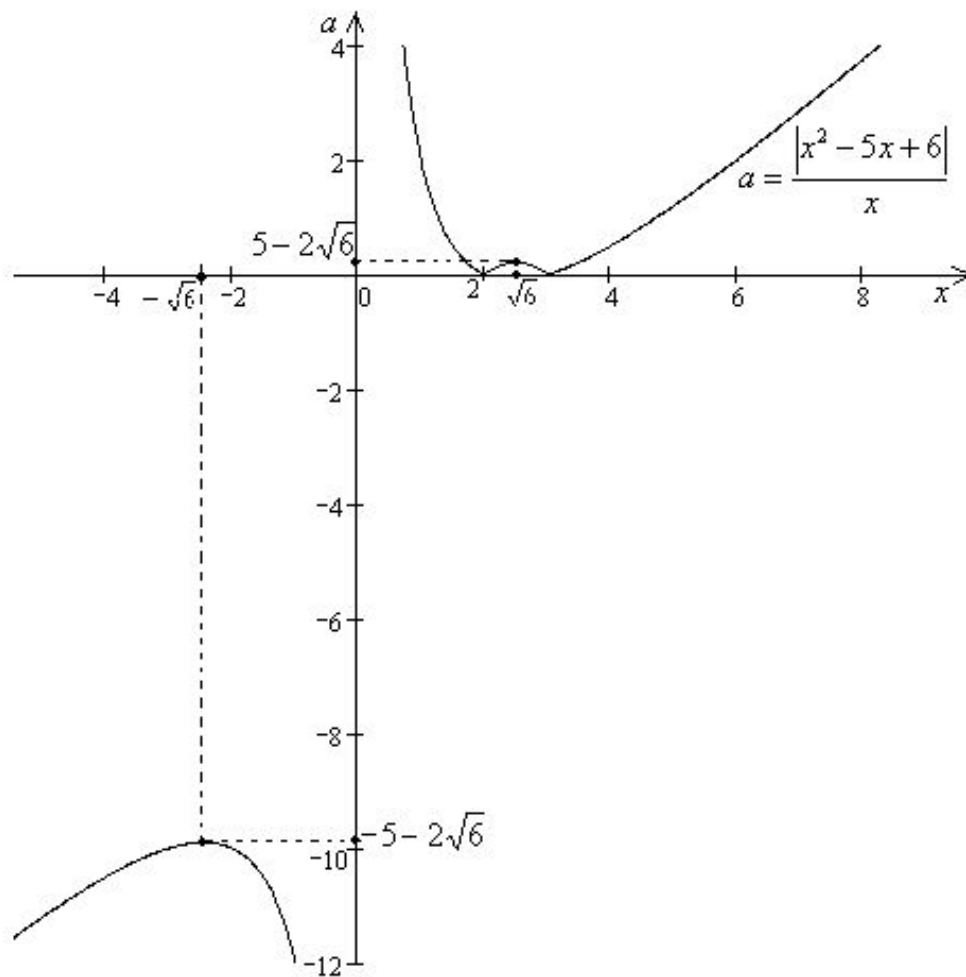


6. При каких значениях параметра a

уравнение $|x^2 - 5x + 6| = ax$

имеет ровно три решения?


$$a = \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x} = \begin{cases} x - 5 + \frac{6}{x}, & x < 2 \\ -x + 5 - \frac{6}{x}, & 2 \leq x \leq 3. \\ x - 5 + \frac{6}{x}, & x > 3 \end{cases}$$



Ответ:
при

$$a = 5 - 2\sqrt{6}.$$