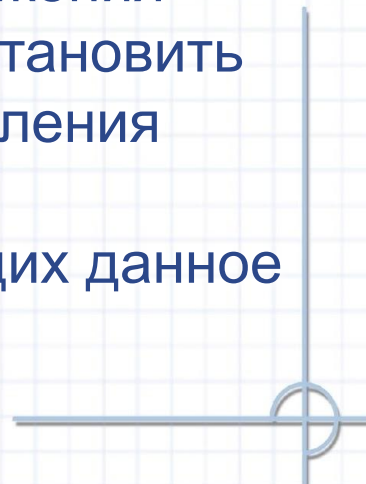


Кинематика – раздел механики, в котором изучают движение материальных тел без учета причин, его вызывающих

- Виды движения:
 - Поступательное
 - Вращательное
 - Плоскопараллельное
 - Сферическое
 - Сложное
- Кинематические характеристики:
 - Положение точки (тела)
 - Траектория
 - Скорость
 - Ускорение
- Основные задачи кинематики:
 - Установление математических способов задания движения точек (тел)
 - Зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех величин, характеризующих данное движение



Глава 1

Кинематика точки

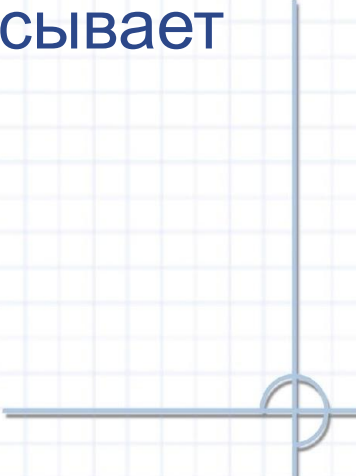
- § 1. Способы задания движения
- § 2. Скорость и ускорение точки
 - 2.1. Скорость при векторном способе задания движения точки
 - 2.2. Ускорение при векторном способе задания движения точки
 - 2.3. Скорость при координатном способе задания движения точки
 - 2.4. Ускорение при координатном способе задания движения точки
 - 2.5. Скорость при естественном способе задания движения точки
 - 2.6. Ускорение при естественном способе задания движения точки
- § 3. Частные случаи движения точки

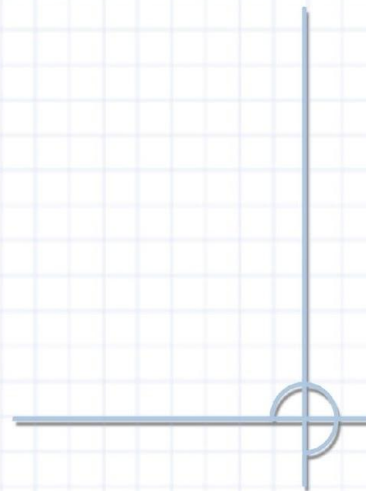
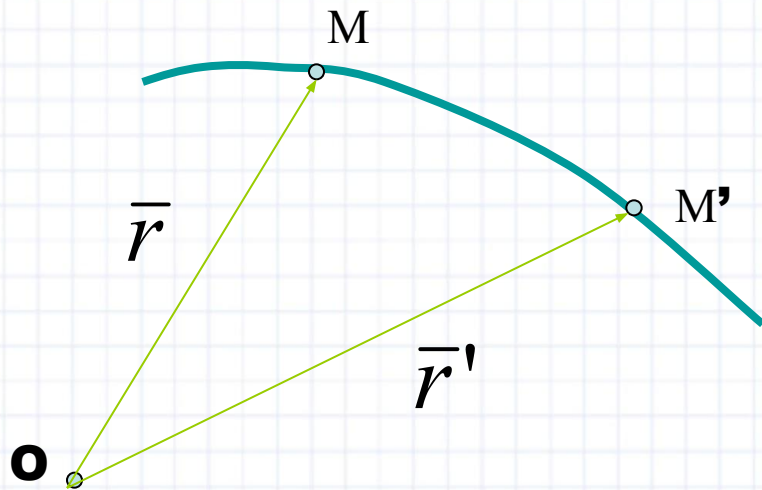
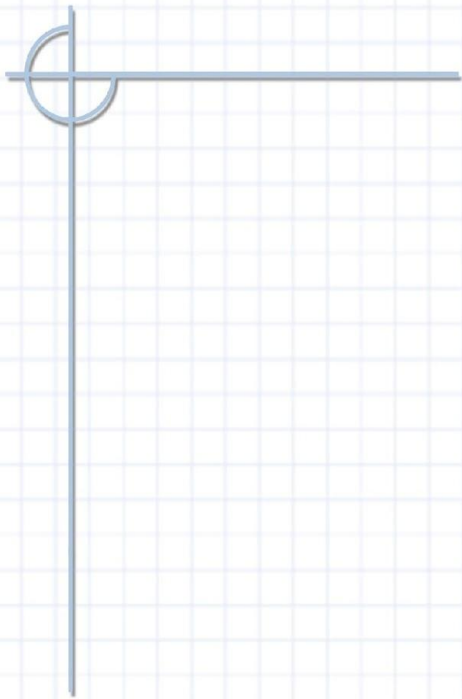


§ 1. Способы задания движения

Движение точки по отношению к избранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени

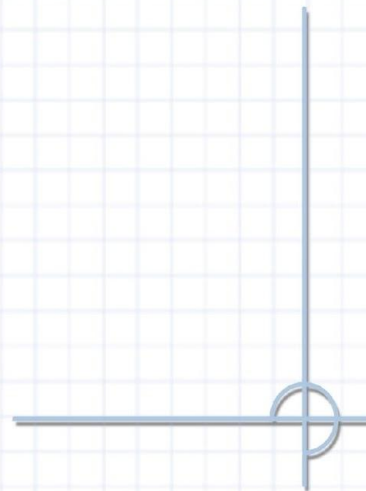
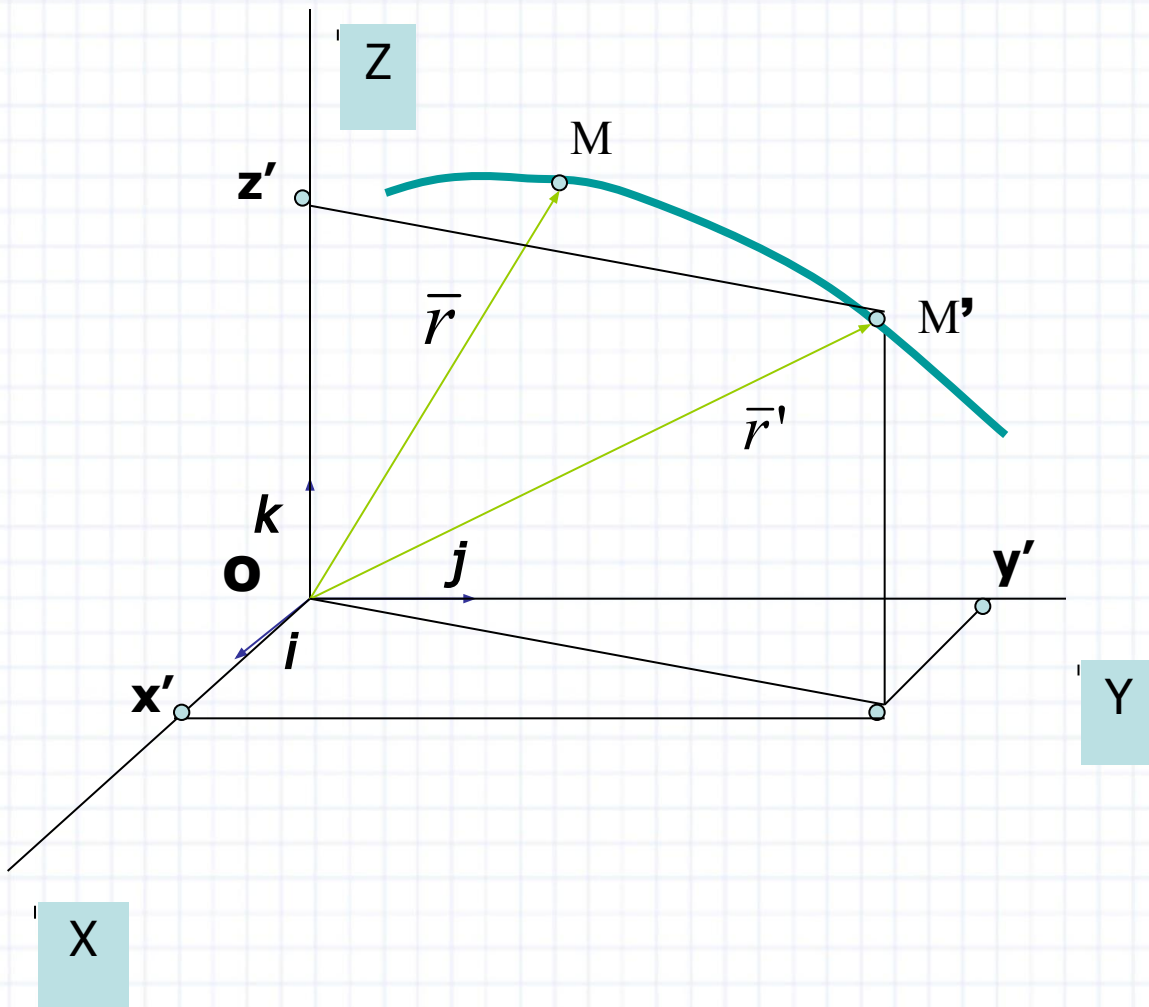
Точка, двигаясь в пространстве, описывает кривую, называемую траекторией





Способы задания движения

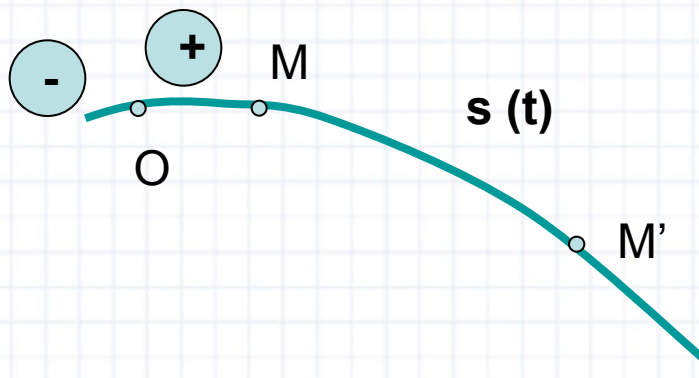
- Векторный способ задания движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$



Способы задания движения

- Векторный способ задания движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- Координатный способ задания движения
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

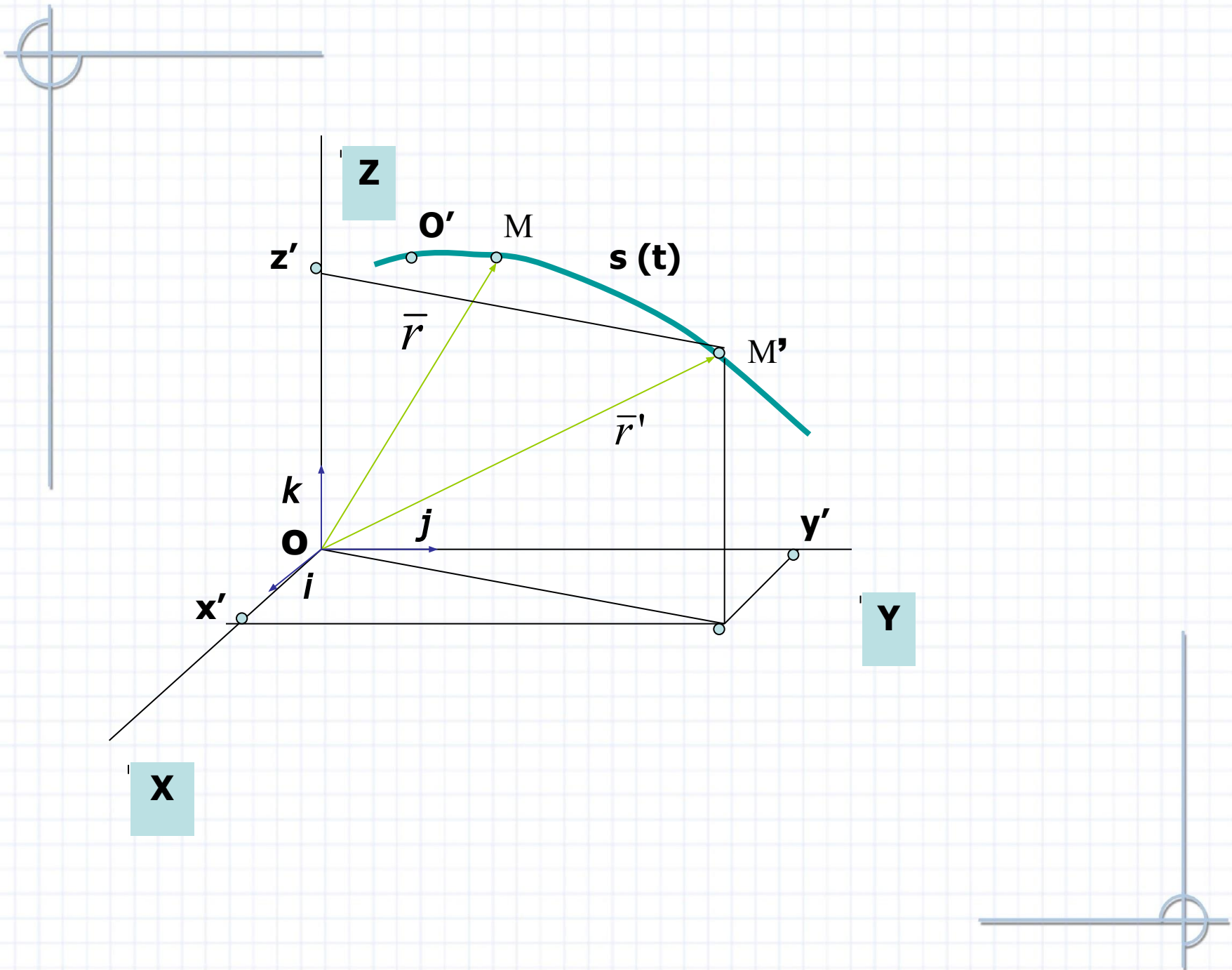
Естественный (траекторный) способ задания движения



- задаем траекторию движения
- начало отсчета
- направление отсчета расстояний
- закон движения точки по траектории $s = s(t)$

Способы задания движения

- Векторный способ задания движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- Координатный способ задания движения $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
- Естественный (траекторный) способ задания движения $s = s(t)$



Скорость

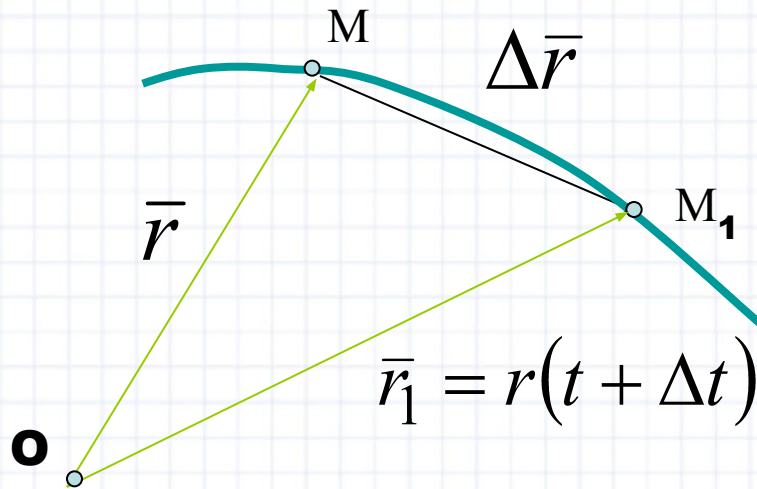
- **Скорость точки** $\overline{\mathbf{V}}$ (векторная величина) одна из основных кинематических характеристик движения точки
- Под **средней скоростью точки** (по модулю и направлению) понимают величину, равную отношению вектора перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло

$$\overline{\mathbf{V}}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

- Скорость точки в данный момент времени называется **мгновенной скоростью точки**

$$\overline{\mathbf{V}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

2.1. Скорость при векторном способе задания движения точки



- В момент времени t

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

- при $t_1 = t + \Delta t$

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(t + \Delta t)$$

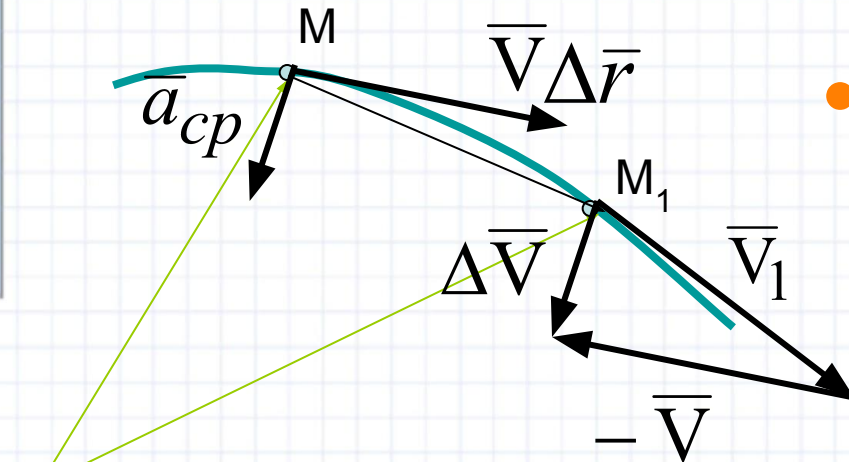
$$\bar{r}_1 = \bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r} + \overline{MM_1}$$

$$\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta \bar{r}$$

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}; \quad \bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

$$[\bar{V}] = \left[\frac{\text{длина}}{\text{время}} \right] = \frac{м}{с}; \frac{км}{час}$$

2.2. Ускорение при векторном способе задания движения точки

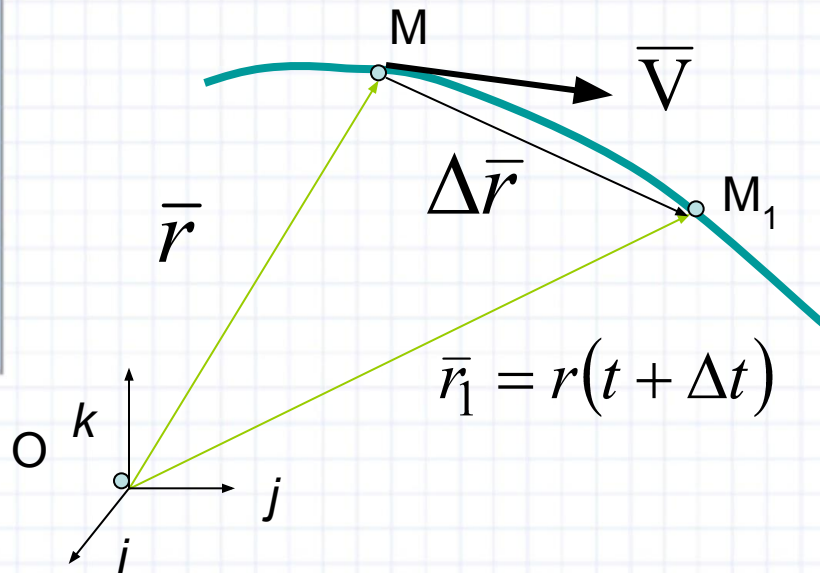


- В момент времени t скорость точки M $\bar{V} = \bar{V}(t)$
 - при $t_1 = t + \Delta t$ в точке M_1 $\bar{V}_1 = \bar{V}_1(t_1) = \bar{V}(t + \Delta t)$
- $$\Delta \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V} = \bar{V}(t + \Delta t) - \bar{V}(t)$$

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}; \quad \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}$$

$$[\bar{a}] = \left[\frac{\text{длина}}{\text{время}^2} \right] = \frac{м}{с^2}$$

2.3. Скорость при координатном способе задания движения точки



$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$$

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{MM_1}$$

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}$$

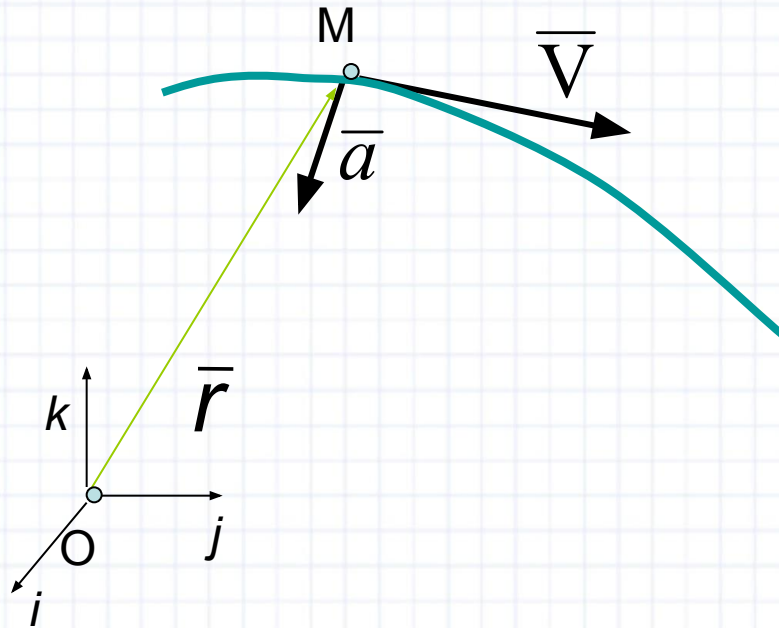
$$\bar{V} = \dot{x} \bar{i} + \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k}$$

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}$$

$$|\bar{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\hat{\bar{V}}, \bar{x}) &= \frac{V_x}{V} \\ \cos(\hat{\bar{V}}, \bar{y}) &= \frac{V_y}{V} \\ \cos(\hat{\bar{V}}, \bar{z}) &= \frac{V_z}{V} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{направляющие} \\ \text{косинусы} \end{array}$$

2.4. Ускорение при координатном способе задания движения точки



$$|\bar{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \right)$$

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

$$\bar{a} = \dot{v}_x \bar{i} + \dot{v}_y \bar{j} + \dot{v}_z \bar{k}$$

$$\bar{a} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k}$$

$$\cos(\hat{\bar{a}, \bar{x}}) = \frac{a_x}{a}$$

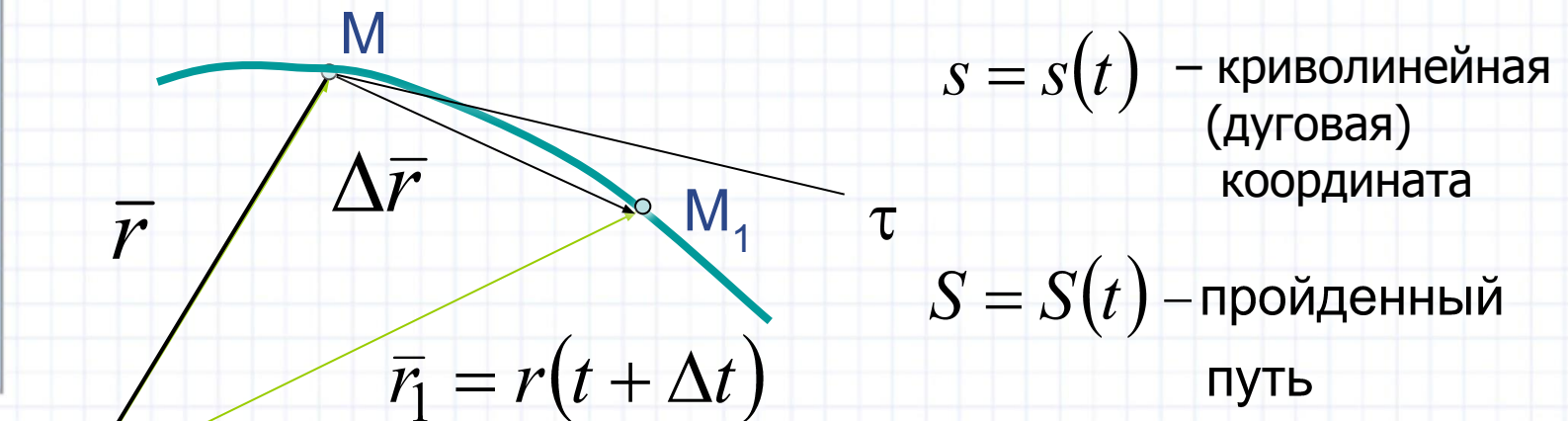
$$\cos(\hat{\bar{a}, \bar{y}}) = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos(\hat{\bar{a}, \bar{z}}) = \frac{a_z}{a}$$

направляющие

косинусы

2.5. Скорость при естественном способе задания движения точки

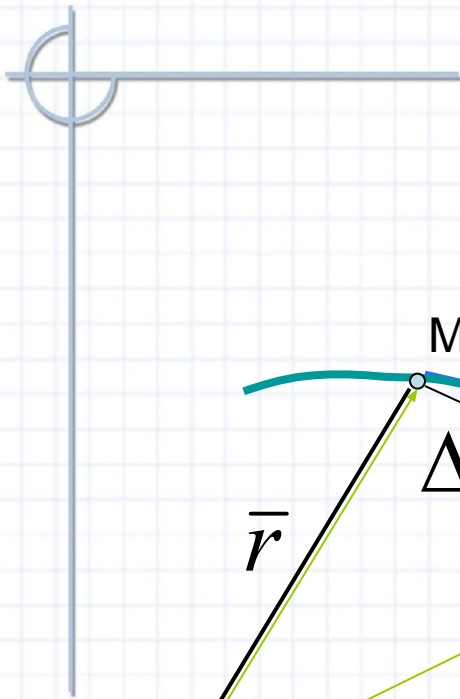


Оси естественного трехгранника

$M\tau$ - касательная к траектории, направленная в сторону движения

Mn - нормаль к траектории лежит в соприкасающейся плоскости и направлена в сторону вогнутости траектории

Mb - перпендикулярна к первым двум, так чтобы образовывала правую тройку векторов



$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{по определению или}$$

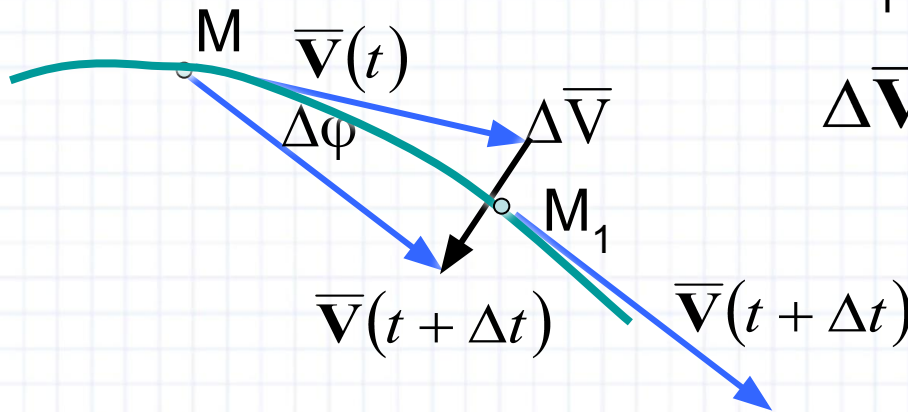
$$\bar{\mathbf{V}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}; \quad \mathbf{V}_\tau = \frac{ds}{dt}; \quad |\bar{\mathbf{V}}| = |\mathbf{V}_\tau|;$$

2.6. Ускорение при естественном способе задания движения точки



$\Delta\varphi$ – угол смежности

$$\Delta\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(t + \Delta t) - \bar{\mathbf{V}}(t)$$

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\bar{\mathbf{V}}}{\Delta t}; \bar{a}_{cp} \perp |\Delta\bar{\mathbf{V}}|$$

\bar{a}_{cp} лежит в

соприкасающейся

плоскости

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\mathbf{V}}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = a_n \bar{n} + a_\tau \bar{\tau} + a_b \bar{b};$$

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}_{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \frac{V_1 \cos \Delta \varphi - V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_1 - V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt};$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}_n}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \frac{V_1 \sin \Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \left[\frac{V_1 \sin \Delta \varphi}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi} \right] =$$

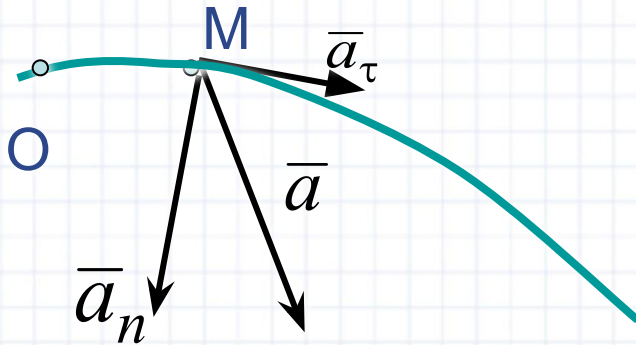
$$= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \left[V_1 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] \cdot \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\substack{\Delta \varphi \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = V^2 \cdot k = \frac{V^2}{\rho};$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|} = \frac{d\varphi}{ds} \equiv k \quad \text{- кривизна кривой в точке M}$$

$$\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1$$

$$a_b \equiv 0$$

$\rho = \frac{1}{k}$ – радиус кривизны траектории



$$\bar{a} = \frac{dV}{dt} \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \bar{n}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

a_n всегда положительное, т.к. всегда направлено в сторону вогнутости траектории

a_τ показывает изменение скорости по величине

a_n показывает изменение скорости по направлению

§ 3. Частные случаи движения точки

Равномерное движение, если всегда $a_\tau = 0$

в случае $\bar{V} \neq 0$ имеем $\bar{V} = const$

- Равномерное прямолинейное движение, когда $a_n = 0$
и значит $\frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$
- Равномерное криволинейное движение, когда
либо если $\bar{V} = 0$, то мгновенная остановка, т.е.
скорость меняет направление – точка перегиба

$$a_n = a$$

В этом случае уравнение движения $s(t) = s_0 + Vt$

Если $a_\tau = 0$ в какой-нибудь момент времени
имеем экстремум, т.е. \overline{V}_{\max} или \overline{V}_{\min}

Если $a_\tau \neq 0$, то движение с ускорением

- движение ускоренное, когда $a_\tau > 0$
- движение замедленное, когда $a_\tau < 0$

Равноускоренное движение, если всегда

$$a_{\tau} = \text{const}$$

В этом случае уравнение движения

$$a_{\tau} = \text{const} \quad d\mathbf{V} = a_{\tau} dt \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + a_{\tau} t$$

$$ds = (\mathbf{V}_0 + a_{\tau} t) dt \quad s(t) = s_0 + \mathbf{V}t + \frac{a_{\tau} t^2}{2}$$