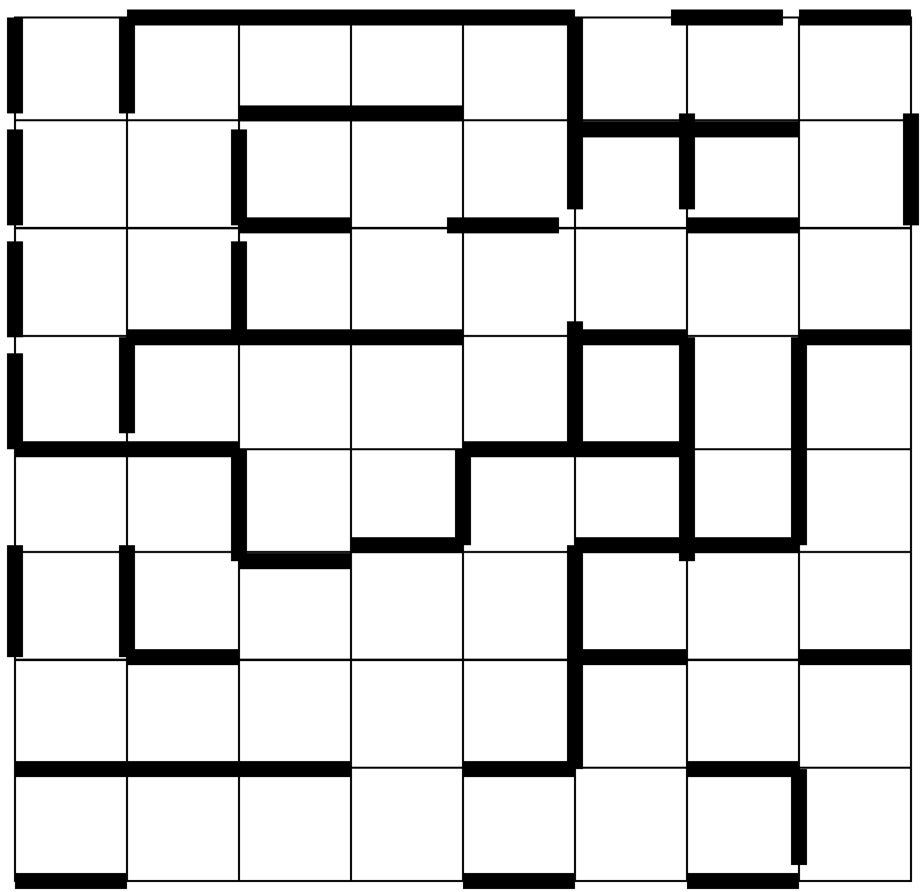
САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ КАТАСТРОФ

Выгорание кластеров

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$$



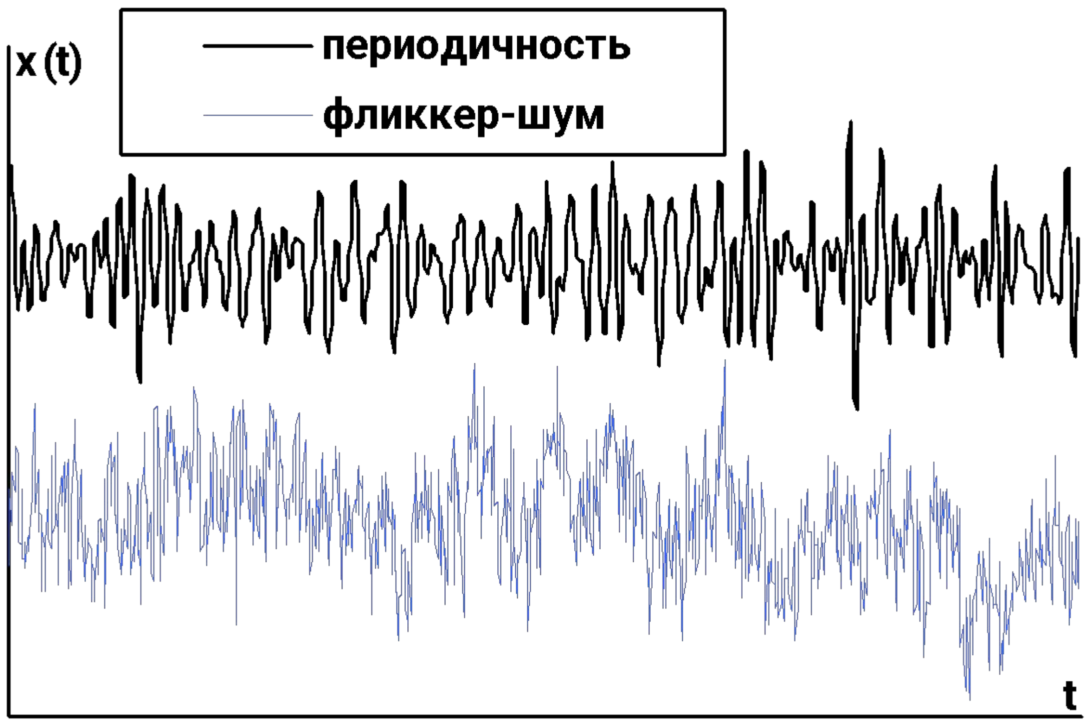
$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$$

Выгорание кластеров

Фликкер-шум

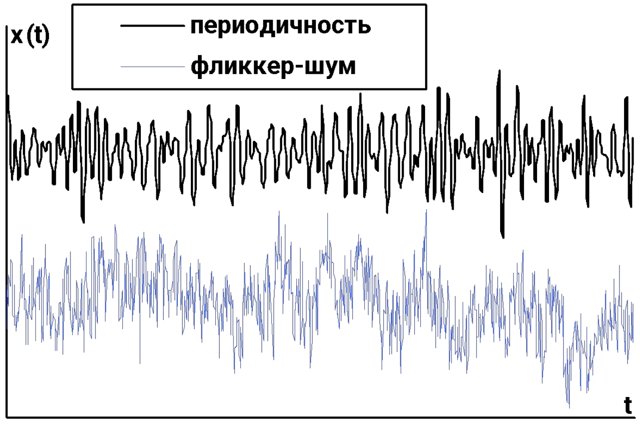
Типичный вид сигнала с периодической составляющей и фликкер-шума

$$S(f) \sim f^{-\beta}$$



Фликкер шум

b ~ 1 – фликкер шум надо отличать от случая 2 – для броуновского движения.



Степенные распределения

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$$

- В качестве классического примера можно привести закон Рихтера–Гутенберга: зависимость количества землетрясений от их энергии определяется формулой (2) с a ≈ 2/3 для землетрясений с магнитудой менее 7,5 и с a ≈ 1 для более сильных].
- Точно так же распределены: относительная смертность[1] в результате землетрясений a ≈ 0,25÷0,45, ураганов a ≈ 0,4÷0,6, а также наводнений и торнадо a ≈ 1,4; число заболевших a ≈ 0,29 при эпидемиях в изолированных популяциях
- площадь лесных пожаров a ≈ 0,59
- [; колебания биржевых индексов a = 1,40.]; масса снежных лавин
- Степенное распределение имеют характеристики и многих других явлений, как связанных с катастрофами и риском, так и не имеющих к ним прямого отношения, например, динамики солнечных вспышек или научной продуктивности исследователей (число публикаций)
-

  [1] Под относительной смертностью понимается количество погибших в результате стихийного бедствия, деленное на численность населения страны на его момент.

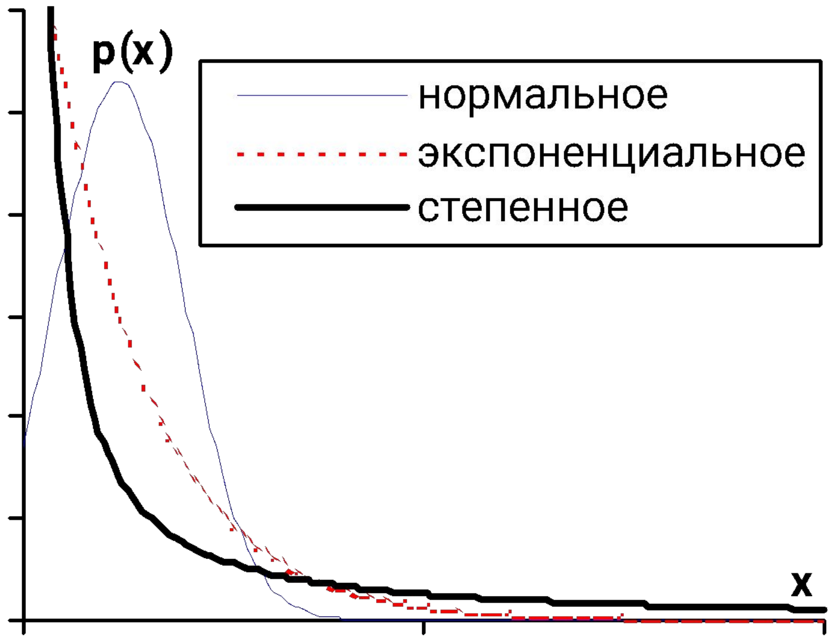
Разница между нормальным и степенным распределениями носит не формальный, а принципиальный характер. Если статистика системы описывается формулой $p(x) \sim e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ (4), то свыше 99,7% событий отклоняется от среднего значения *m* не более чем на 3s (т.н. правило трех сигм), а, скажем, за 5s выбивается и вовсе менее одного события на миллион. При этом появляется возможность "законно" пренебречь очень крупными событиями, считая их практически невероятными, т.е. можно отрезать хвост распределения.
Статистика величин, описываемых распределением $p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$ (2), отличается тем, что крупные события, приходящиеся на хвост распределения, происходят *недостаточно редко*, чтобы ими можно было пренебречь. По этой причине СЗРВ называют также *распределениями с тяжелыми хвостами*. Распределения вида $p(x) \sim e^{-\lambda x}$ (3) или (4), имеющие хвост, спадающий быстрее любой степени *x*, в этой связи уместно именовать *компактными*, подразумевая небольшую протяженность диапазона значений, принимаемых случайной величиной со сколь-нибудь значимой вероятностью.
В терминах оценки безопасности и риска хвост распределения соответствует так называемым *гипотетическим* авариям, возможность которых, как явствует уже из самого названия, на практике не учитывается. Наличие СЗРВ в корне подрывает вошедшие в плоть и кровь представления о надежности и риске. Эти представления базируются на явном, а чаще всего неявном, предположении, что серьезные неприятности происходят исключительно в результате неблагоприятного стечения ряда обстоятельств, т.е. что любое крупное событие возникает как сумма большого числа мелких *независимых* событий, которая в силу центральной предельной теоремы нормально распределена На самом деле события в сложных системах не являются независимыми.

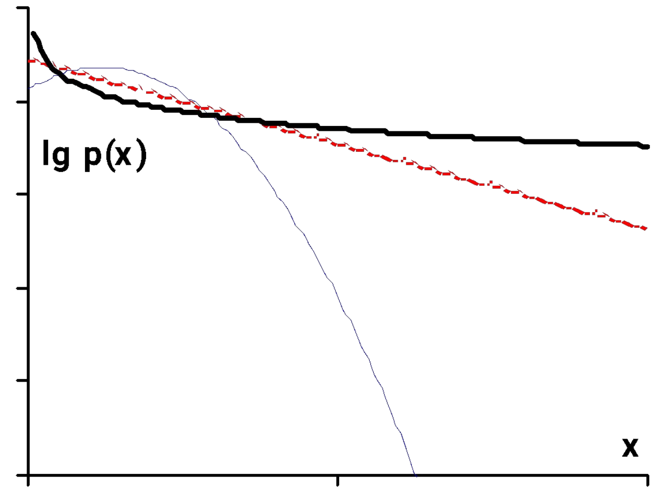
Степенные законы распределения представляют собой одну из отличительных черт сложности. Для простых систем наиболее типичны *экспоненциальное*

$$p(x) \sim e^{-\lambda x}$$

и *нормальное* (гауссово)

$$p(x) \sim e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

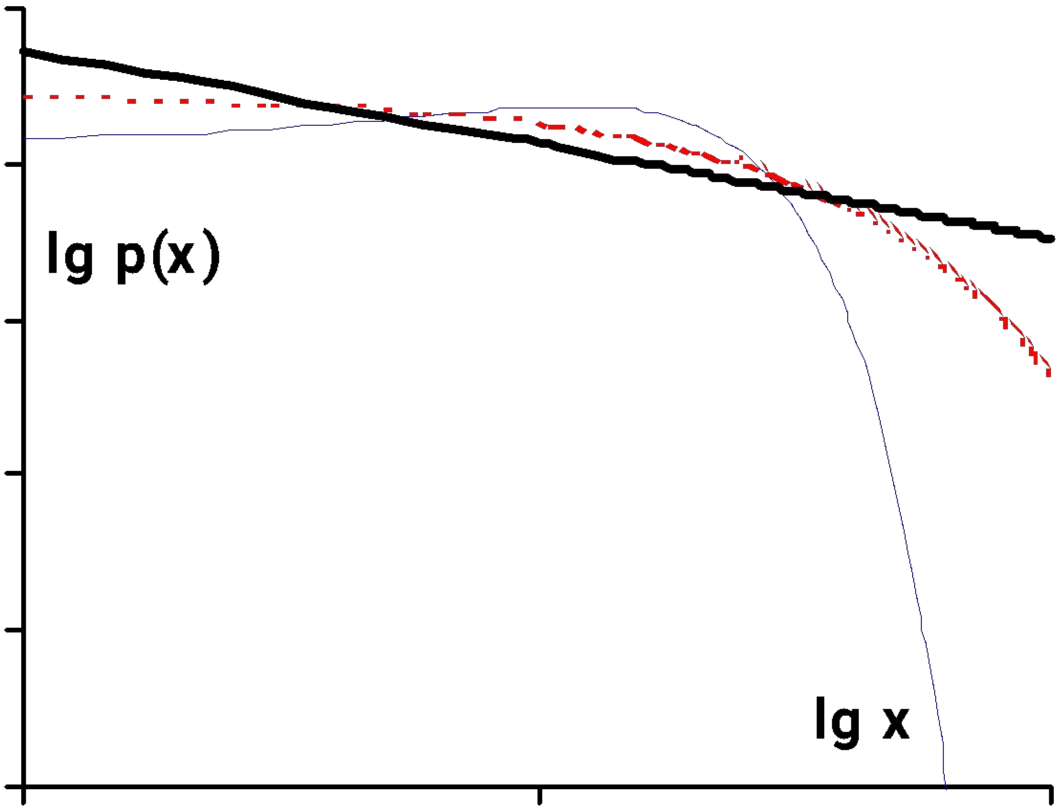




Типичный вид плотности вероятности величин, распределенных в соответствии с нормальным, экспоненциальным и степенным законами, с различным представлением данных по осям. Верхний график позволяет сравнить скорость спадания плотности вероятности для хвостов распределений. На нижнем левом графике (логарифмический масштаб по оси ординат) нормальное и экспоненциальное распределение представляются, соответственно, в виде параболы и прямой.

двойной логарифмический масштаб

вид прямой имеет степенной закон распределения, что говорит о скейлинговом поведении, т.е. об отсутствии выделенных масштабов при СЗРВ.



Процесс смерти и размножения.

заразившийся человек ("частица" в терминах теории ветвящихся процессов) в течение дня может с вероятностью *p*0 выздороветь (исчезновение частицы) или с вероятностью *pi* заразить еще *i*-1 человека, *i* = 1,2,… (сохранение частицы или ее деление на 2,3,… частицы). Очевидно, что здесь имеется положительная обратная связь, т.е. чем больше людей инфицировано, тем больше их заразится в дальнейшем. Динамика болезни будет определяться коэффициентом размножения ветвящегося процесса *m* = S*i ipi*. Если *m* ≤ 1, то вспышка рано или поздно угаснет

$$\nu_j \sim j^{-3/2} e^{-bj}$$

$$b \sim (1-m)^2$$

$$m \sim 1 \quad \nu_j \sim j^{-3/2} e^{0 \bullet j} \qquad \alpha = 0,5$$

единичное значение коэффициента размножения соответствует *критическому ветвящемуся процессу*, описываемому формулой

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$$

Устойчивые законы распределения

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a_n}{b_n} \overset{d}{=} x_1$$

Устойчивые законы распределения

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a_n}{n^{1/\alpha}} \stackrel{d}{=} x_1$$

$$g\left(x;\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right) = \lambda^{-1/\alpha} g\left(\lambda^{-1/\alpha}\left(x-\gamma'\right);\alpha,\beta,0,1\right)$$

Устойчивые законы распределения

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a_n}{b_n} \stackrel{d}{=} x_1$$

функции *p*(*x*) = *g*(*x*;a,b,g,l) за исключением нескольких частных случаев (см. ниже) не выражаются через элементарные функции. Масштабный параметр l > 0 и параметр неслучайного сдвига g соответствуют линейному преобразованию координат

$$g(x;\alpha,\beta,\gamma,\lambda) = \lambda^{-1/\alpha} g\left(\lambda^{-1/\alpha}(x-\gamma');\alpha,\beta,0,1\right)$$

g' зависит от b, g и a, причем g' = g, если a ≠ 1. Параметр формы b, ограниченный по модулю единицей, задает асимметрию функции распределения (при отрицательных значениях параметра она скошена влево, при положительных – вправо). Параметр a управляет асимптотикой распределения и может принимать значения в интервале 0 < a ≤ 2. При a = 2 (и любых b) получается нормальное распределение

Степенные распределения $p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$

- а управляет асимптотикой распределения и может принимать значения в интервале 0 < а ≤ 2
- при а < 2 (если β ≠ -1) распределение имеет степенную асимптотику при *x* → ∞

$$\boxed{g(x;\alpha,b,\gamma,\lambda) \sim x^{-(1+\alpha)}}$$

$$g(x;2,\beta,\gamma,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} e^{\frac{-(x-\gamma)^2}{4\lambda}}$$

- . При ά = 2 (и любых β) получается нормальное распределение

Таким образом, распределения с тяжелыми хвостами являются не альтернативой нормального распределения, а его естественным дополнением. Если сумма независимых случайных величин после линейной перенормировки **(*x*1 + *x*2 +…+ *xn* – *an*)/*bn*** сходится к какому-либо закону, то он принадлежит к семейству устойчивых законов, причем константы *an* и *bn* определяются однозначно и выполнено соотношение

$$b_n = n^{1/\alpha}$$

При этом нормальному распределению, для которого существуют все статистические моменты, соответствует лишь одно значение а = 2, а все остальные дают распределения, имеющие бесконечный ***второй момент****, а следовательно, и дисперсию. Помимо бесконечной дисперсии степенное распределение имеет* ***при а ≤ 1 бесконечное математическое ожидание E x.***

Случай a < 1 интересен также и тем, что в силу (9) нормировочная постоянная *bn* растет быстрее, чем *n*. Т.е. закон больших чисел становится неприменим. Особенно любопытно эта ситуация выглядит при пограничном значении a = 1, дающем в случае b = 0 распределение Коши

Случай a < 1 интересен также и тем, что в силу (9) нормировочная постоянная *bn* растет быстрее, чем *n*. Т.е. закон больших чисел становится неприменим. Особенно любопытно эта ситуация выглядит при пограничном значении a = 1, дающем в случае b = 0 распределение Коши

для которого *bn* = *n*, и если выбрать g = 0, то будет *an* = 0 и получится, для которого *bn* = *n*, и если выбрать g = 0, то будет *an* = 0 и получится,

$$\boxed{g\left(x;1,0,\gamma,\lambda\right)=\frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{\lambda^2+\left(x-\gamma\right)^2}}$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\overset{d}{=}x_1$$

это выборочное среднее оказывается распределено в точности так же, как одно слагаемое. Т.е. мы <u>усредняем наблюдаемые величины, чтобы получить какое-то среднее значение, но остаемся с тем же разбросом, что и до усреднения.</u>

Случай a < 1 интересен также и тем, что в силу (9) нормировочная постоянная *bn* растет быстрее, чем *n*. Т.е. закон больших чисел становится неприменим. Особенно любопытно эта ситуация выглядит при пограничном значении a = 1, дающем в случае b = 0 распределение Коши

Случай a < 1 интересен также и тем, что в силу (9) нормировочная постоянная *bn* растет быстрее, чем *n*. Т.е. закон больших чисел становится неприменим. Особенно любопытно эта ситуация выглядит при пограничном значении a = 1, дающем в случае b = 0 распределение Коши

для которого *bn* = *n*, и если выбрать g = 0, то будет *an* = 0 и получится, для которого *bn* = *n*, и если выбрать g = 0, то будет *an* = 0 и получится,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \stackrel{d}{=} x_1$$

$$g(x;1,0,\gamma,\lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda^2 + (x-\gamma)^2}$$

для которого $b_n = n$, и если выбрать $\gamma = 0$, то будет $a_n = 0$ и получится, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \stackrel{d}{=} x_1$$

это выборочное среднее оказывается распределено в точности так же, как одно слагаемое. Т.е. мы <u>усредняем наблюдаемые величины, чтобы получить какое-то среднее значение, но остаемся с тем же разбросом, что и до усреднения.</u>

Очевидно, что нормировка будет еще больше для меньших значений a.

Например, для распределения Леви

$$g(x;1/2,1,\gamma,\lambda)=\theta(x-\gamma)\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}x^{-3/2}e^{-\frac{\lambda^2}{4(x-\gamma)}}$$

***bn = n*2**, т.е. получается, *что сумма* одинаково распределенных слагаемых растет как квадрат их числа

Применительно к описанию катастроф и бедствий это означает, что из-за степенного вида законов распределения должен наблюдаться нелинейный, все более *ускоряющийся* ***рост суммарного ущерба со временем.*** Этот результат производит шокирующее впечатление, и его иногда ошибочно воспринимают как свидетельство нестационарности процесса. Это, конечно же, не так. Просто по мере увеличения числа зарегистрированных событий *n* их **выборочное среднее (*x*1 + *x*2 +…+ *xn*)/*n* стремится к математическому ожиданию**, а оно при ***a* < *1*** бесконечно. Нелинейное и ускоряющееся со временем нарастание суммарного ущерба также перестает казаться парадоксальным, если учесть, что из-за катастрофического поведения **определяющее влияние на его значение оказывает величина ущерба от крупнейшего события**. Можно показать, что при a < 1

$b_n = n^2$, т.е. получается, что сумма одинаково распределенных слагаемых растет как квадрат их числа

Применительно к описанию катастроф и бедствий это означает, что из-за степенного вида законов распределения должен наблюдаться нелинейный, все более *ускоряющийся* рост суммарного ущерба со временем. Этот результат производит шокирующее впечатление, и его иногда ошибочно воспринимают как свидетельство нестационарности процесса. Это, конечно же, не так. Просто по мере увеличения числа зарегистрированных событий n их выборочное среднее $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ стремится к математическому ожиданию, а оно при $a < 1$ бесконечно. Нелинейное и ускоряющееся со временем нарастание суммарного ущерба также перестает казаться парадоксальным, если учесть, что из-за катастрофического поведения определяющее влияние на его значение оказывает величина ущерба от крупнейшего события. Можно показать, что при $a < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} = \frac{1}{1-\alpha},$$

т.е. в сумму случайных величин, распределение которых имеет хвост вида (2) с $a < 1$, с точностью до коэффициента вклад вносит лишь максимальное слагаемое (в то время как для величин с конечным средним вклад любого отдельного слагаемого в сумму стремится к нулю).

$$\left(S/n\right)^{3/2}\left(E_1(1)+E_2(1)+\cdots+E_n(1)\right)\overset{d}{=}S^{3/2}E_1(1)$$

Если **слагаемые имеют конечную дисперсию, то в силу центральной предельной теоремы предельное распределение будет нормальным, что соответствует устойчивому закону с a = 2. А чтобы получить меньшие значения a, необходимо складывать величины с бесконечной дисперсией, т. е. уже имеющие степенной хвост.**

$$E_1(S/n)+E_2(S/n)+\cdots+E_n(S/n)\overset{d}{=}E_1(S)$$

Энергия землетрясения *E* пропорциональна произведению площади разлома *S* и смещения пластов D*L*. Для не очень сильных землетрясений, не достигающих дна земной коры, *S* ~ *L*2, где *L* – линейная протяженность разлома. Кроме того, в силу закона Гука[1] D*L* ~ *L*. [1] Значение D*L*=*F*/*k*, где коэффициент жесткости *k*~1/*L*, а *F* – сила, при которой начинается проскальзывание пластов. Поскольку их "держит" самый слабый участок, *F* можно считать независящим от *L*.

$$E(S)\sim S^{3/2}$$

Малые землетрясения…

$$E_1(S/n)+E_2(S/n)+\cdots+E_n(S/n)\overset{d}{=}E_1(S)$$

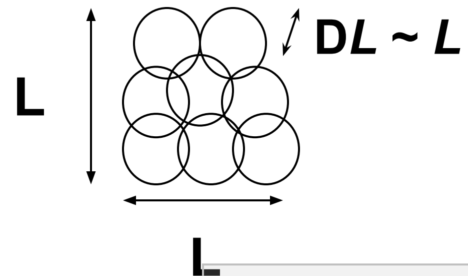
$$E(S)\sim S^{3/2}$$

$$(S/n)^{3/2}\left(E_1(1)+E_2(1)+\cdots+E_n(1)\right)\overset{d}{=}S^{3/2}E_1(1)$$

Энергия землетрясения *E* пропорциональна произведению площади разлома *S* и смещения пластов D*L*. Для не очень сильных землетрясений, не достигающих дна земной коры, *S* ~ L^2, где *L* – линейная протяженность разлома. Кроме того, в силу закона Гука[1] D*L* ~ *L*. [1] Значение D*L*=*F*/*k*, где коэффициент жесткости *k*~1/*L*, а *F* – сила, при которой начинается проскальзывание пластов. Поскольку их "держит" самый слабый участок, *F* можно считать независящим от *L*.

$$E(S)\sim S^{3/2}$$

Малые землетрясения.



кор
а

E=S*ΔL=L^2 ΔL=L^3=S^{1,5}

откуда в силу формул (7) и (9) немедленно получаем для энергии устойчивое распределение с ά = 2/3.

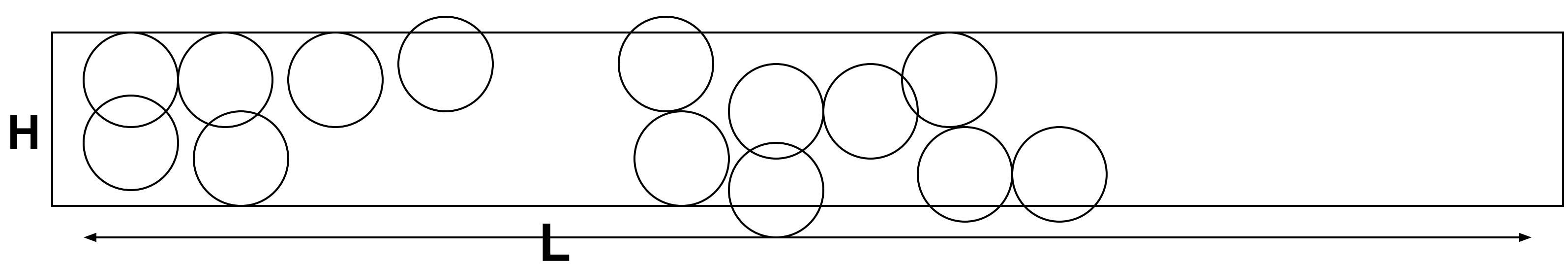
$$\left(\cancel{S}/n\right)^{3/2}\left(E_1(1)+E_2(1)+\dots+E_n(1)\right)\overset{d}{=}\cancel{S}^{3/2}E_1(1)$$

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n^{1/\alpha}}\overset{d}{=}x_1$$

Большие землетрясения.

откуда в силу формул (7) и (9) немедленно получаем для энергии устойчивое распределение с a = 1
Для сильных землетрясений соответствующие формулы имеют вид *S ~ LH* и D*L ~ H*, где *H* << *L* – толщина коры, и соотношение (12) запишется как *E ~ S*, откуда получается единичное значение a.

$$(S/n)\,\left(E_1(1)+E_2(1)+\dots+E_n(1)\right)\overset{d}{=}S\;E_1(1)$$



Масштаб системы

$$\mathrm{Sc}\, x = \mu_2 / \mu_1$$

$$\mu_i = \int p(x) x^i dx \qquad \int p(x) dx = 1$$

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)} f(x/x_c)$$

где скейлинговая *f*(*y*) приблизительно постоянна при *y* ~ 1 и быстро убывает при *y* → ∞. При этом "тяжесть хвоста" переносится в область промежуточных значений *x*. Строго говоря, чисто степенная *зависимость нарушается и при x → 0, т.к. иначе распределение (14) не будет нормируемым, однако то, как конкретно это происходит, не существенно при анализе крупных событий*

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)} f(x/x_c)$$

$$\int p(x)\,dx = 1$$

$$\mu_i = \int p(x)\,x^i\,dx$$

$$\mathrm{Sc}\,x = \mu_2/\mu_1$$

Фликкер-шум

- явление фликкер-шума обусловлено отсутствием характерных времен, т.е. степенным распределением временных характеристик процессов. Поясним это рассуждение двумя простыми примерами. Рассмотрим изображенный на рис. процесс, представляющий собой последовательность событий единичной амплитуды, длительность которых описывается СЗРВ с показателем a

$$p(T) \sim T^{-(1+\alpha)}$$

Будем считать, что время, проходящее между последовательными событиями, велико.

Спектр мощности *S*(*f*) любого процесса представляет собой просто преобразование Фурье от его автокорреляции которая дается формулой

$$A(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$$

$$S(f) = \int A(\tau)e^{2\pi i f\tau}d\tau$$

Спектр мощности *S*(*f*) любого процесса представляет собой просто преобразование Фурье от его автокорреляции которая дается формулой

$$A(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$$

Если воспользоваться временной разнесенностью событий рассматриваемого процесса и пренебречь взаимодействием между ними, то для автокорреляции ($A(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$) получим

$$A(\tau) \sim \int_{\tau}^{\infty} p(T)(T-\tau)dT \sim \tau^{1-\alpha}$$

откуда имеем немедленно

$$S(f) \sim f^{\alpha-2}$$

процесс, состоящий из кратковременных событий равной амплитуды, разделенных случайными промежутками времени, которые имеют степенное распределение вероятностей с показателем $\alpha < 1$ (см. рис).
Примем за нулевой момент времени момент одного из событий, тогда на промежуток времени от 0 до t приходится порядка

$$n(t) = \frac{t}{\int_0^t p(T)\,T\,dT} \sim t^{\alpha}$$

событий. Соответственно, вероятность того, что в момент τ происходит событие, равна

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} \sim \tau^{\alpha-1}$$

что с точностью до коэффициента есть автокорреляция $A(\tau)$ рассматриваемого процесса, откуда $S(f) \sim f^{-\alpha}$,