



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ

На примере решения задач С6

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим множество целых чисел \mathbb{Z} . Операция деления выполняется не для всех пар чисел из \mathbb{Z} .

▣ **Определение.** Число $a \in \mathbb{Z}$ делится на число $b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$), если существует такое число $q \in \mathbb{Z}$, что $a = bq$.

▣ **Замечание.** Вместо выражения « a делится на b » очень часто используется фраза «число b делит число a » и при этом применяется запись $a | b$.

Если a делится на b , то b называется **делителем** a , само a называется **кратным** числа b . Число q называется **частным** от деления a на b .

Число 0 делится на любое $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то, очевидно, что множество всех делителей a конечно.

▣ Рассмотрим простейшие **свойства делимости целых чисел.**



- 1. Если $c \mid b$ и $b \mid a$, то $c \mid a$.
- 2. Если $m=a+b$, $d \mid a$ и $d \mid b$ то $d \mid m$.

Замечание. Аналогично доказывается, что если

$m=a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n$ и d делит числа m , a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , то $d \mid a_n$.

Определение. **Общим делителем** чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ называется число $d \in \mathbb{Z}$, являющееся **делителем** каждого из этих чисел. **Общий делитель** данных чисел называется их **наибольшим общим делителем**, если он делится на всякий общий делитель этих чисел.

3. Если $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(a,b)=1$ и $b \mid ac$, то $b \mid c$.

- 4. Если $b \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с каждым из $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, то b взаимно просто с их произведением $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.



Пример 1. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение:

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2+\dots+7)(13+\dots+21)=\left(\frac{2+7}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{13+21}{2}\cdot 9\right)=27\cdot 153=4131$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21)=1\cdot 1=1$$

Ответ: 1 и 4131.



Рассмотрим теперь множество натуральных чисел \mathbb{N} .

Число 1 имеет единственный натуральный делитель. Любое $n \in \mathbb{N}$, и $n > 1$, делится на 1 и n .

Определение. Число $n \in \mathbb{N}$, и $n > 1$, называется простым, если оно не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и n .

Определение. Число $n \in \mathbb{N}$ называется составным, если оно имеет натуральный делитель, отличный от 1 и n .

Замечание. Из последнего определения следует, что каждое составное число представляется в виде $n = a \cdot b$, где $a, b \in \mathbb{N}$, $1 < a < n$, $1 < n < b$.

Замечание. Число 1 не является ни простым, ни составным.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ. Любое число $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, представляется в виде произведения простых чисел, причем единственным образом, если не учитывать порядок следования сомножителей.



Рассмотрим удобный способ выделения простых чисел в данном отрезке натурального ряда, известный еще греческому ученому *Эратосфену* (276–194 г.г. до н.э.). Он состоит в отсеивании составных чисел, находящихся в данном отрезке, и носит название **«решета Эратосфена»**. Напишем одно за другим числа $2, 3, 4, \dots, N$. Число 2, являющееся простым, оставляем и зачеркиваем после него все четные числа. Первое следующее за 2 незачеркнутое число есть 3. Оно не делится на 2. Значит, оно не имеет делителей, отличных от 1 и 3, и поэтому является простым. Оставляем 3 и зачеркиваем после него все числа, кратные 3. Продолжая этот процесс, найдем все простые числа, не превосходящие некоторого простого числа p_k . При этом будут зачеркнуты все составные числа, кратные $2, 3, \dots, p_k$. Первое незачеркнутое после p_k число будет простым числом p_{k+1} , так как оно не делится на $2, 3, \dots, p_k$ и поэтому имеет своими делителями только 1 и p_{k+1} . Если найдено $p_k \geq \sqrt{N}$, то все оставшиеся незачеркнутыми числа будут простыми, поскольку все кратные чисел $2, 3, \dots, p_k$ уже вычеркнуты.



Пример 2. Найдите все тройки натуральных чисел k , m и n , удовлетворяющие уравнению

$$2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n! \quad (1! = 1; 2! = 1 \cdot 2 = 2; n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$$

1. $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, $n < m < k$.

2. $k \leq n$. $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!$,
 $4 \geq n+1$, $k \leq n \leq 3$.

3. $k > n$. $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!$,
 $4 \geq k+1$, $n \leq k \leq 3$.

4. $1 \leq n \leq 3, 1 \leq k \leq 3$ $\hat{a}\tilde{n}\hat{a}\delta\hat{a}\theta\hat{a}\acute{a}\grave{e}\grave{y}$.

Ответ: $k=1, n=2, m=3$; $k=n=3, m=4$; $k=2, n=1, m=3$.



Каноническое разложение натуральных чисел.

Канонические разложения натуральных чисел удобно использовать для выяснения соотношений делимости. Добавляя при необходимости сомножители с нулевыми показателями степени в канонические разложения, всегда можно конечное число любых натуральных чисел представить в виде произведения одних и тех же различных простых чисел с целыми неотрицательными показателями степени.

Теорема 9. Пусть даны натуральные числа:

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}, \quad n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_s^{l_s},$$

где p_1, p_2, \dots, p_s – различные простые числа, а показатели степени k_i и l_i – целые неотрицательные. Для того, чтобы число m делилось на число n , необходимо и достаточно, чтобы $k_i \geq l_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$.



Следствие 2. Пусть натуральные числа m_1, m_2, \dots, m_r представлены в каноническом виде:

$$m_1 = p_1^{k_{11}} \cdot p_2^{k_{12}} \cdot \dots \cdot p_s^{k_{1s}},$$

$$m_2 = p_1^{k_{21}} \cdot p_2^{k_{22}} \cdot \dots \cdot p_s^{k_{2s}},$$

.....

$$m_r = p_1^{k_{r1}} \cdot p_2^{k_{r2}} \cdot \dots \cdot p_s^{k_{rs}},$$

где p_1, p_2, \dots, p_s – различные простые числа, а показатели степени – целые неотрицательные. Тогда:

$$1) \text{НОД}(m_1, m_2, \dots, m_k) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \dots \cdot p_s^{u_s},$$

где $u_i = \min\{k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ri}\}$ для $i = 1, 2, \dots, s$

$$1) \text{НОК}(m_1, m_2, \dots, m_k) = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \dots \cdot p_s^{v_s},$$

где $v_i = \max\{k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ri}\}$ для $i = 1, 2, \dots, s$

В частности, числа m_1, m_2, \dots, m_i взаимно просты тогда и только тогда

когда при любом $i = 1, 2, \dots, s$

одно из чисел $k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{ri}$ равно нулю, т. е. когда у данных чисел

m_1, m_2, \dots, m_r нет общих простых делителей.



Следствие 1. Пусть натуральное число m представлено в каноническом виде:

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s} .$$

Тогда все натуральные делители m представляют собой всевозможные числа вида:

$$p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_s^{l_s} ,$$

где $0 \leq l_i \leq k_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$. При этом всякий натуральный делитель числа m однозначно задается выражением указанного вида.



Пример 3. Найдите все пары пятизначных чисел x , y , такие что число \underline{xy} , полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x , делится на xy .

Решение. По условию задачи число $\underline{xy}=10^5 x+y$ делится на xy , т. е. верно равенство $10^5 x+y=pxy$ (1), где p -натуральное число.

Перепишем равенство (1) в виде $10^5 x=(px-1)y$ (2).

Так как $px-1$ не делится на x , то y делится на x , а есть $y=qx$, где q - натуральное число, меньшее 10 (в противном случае y не пятизначное число).

Заменив в равенстве (1) y на qx и разделив полученное равенство на x , имеем $10^5 +q=prqx$. (3)

Так как $10^5=(px-1)q$, то 10^5 делится на q . Число 10^5 имеет делители, меньшие 10: 1, 2, 4, 5, 8. Рассмотрим случаи $q=1$, $q=2$, $q=4$, $q=5$, $q=8$.

- 1) Если $q=1$, то равенство (3) имеет вид: $px=100001$. Первыми делителями числа 100001 является 1 и 11, но при $p=1$ и при $p \geq 11$ число x не пятизначное.
- 2) Если $q=2$, то $y=2x$. Перепишем равенство (3) в виде $px=50001$. Первыми делителями числа 50001 являются числа 1, 3 и 7.

При $p=1$ имеем: $x=50001$, $y=100002$, число y не пятизначное.

При $p=3$ имеем: $x=16667$, $y=2 \cdot 16667=33334$.

При $p \geq 7$ число x не пятизначное.

Итак, числа $x=16667$, $y=33334$ удовлетворяю условиям задачи.



3) Если $q=4$, то $y=4x$. Перепишем равенство (3) в виде $px=25001$. Первыми делителями 25001 являются 1 и 23.

При $p=1$ имеем: $x=25001$, $y=100004$, число y не пятизначное.

При $p \geq 23$ число x не пятизначное.

4) Если $q=5$, то $y=5x$. Из равенства (3) следует, что $px=20001$.

При $p=1$ имеем: $x=20001$, $y=100005$, число y не пятизначное.

При $p > 1$ число x не пятизначное.

5) Если $q=8$, то $y=8x$. Перепишем равенство (3) в виде $px=12501$.

При $p=1$ имеем: $x=12501$, $y=100008$, число y не пятизначное.

При $p > 8$ число x не пятизначное.

Итак, в случаях 1), 3) - 5) не существует чисел x и y , удовлетворяющих условию задачи. Задача имеет единственное решение: $x=16667$, $y=33334$.

Ответ: $x=16667$, $y=33334$.



Пример 4. Натуральные числа m и n таковы, что и $m^3 + n$, и $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$. Найди те m и n .

Решение. Так как каждое из чисел $m^3 + n$, и $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$, то их разность $m - n$ тоже делится на $m^2 + n^2$, т. е. справедливо равенство

$$m - n = x(m^2 + n^2) \quad (1), \text{ где } x \text{ целое число.}$$

Если $m > n$, то x – натуральное число и справедливы равенство $m^2 > m$, $n^2 > n$. $m^2 + n^2 > m + n$, тогда $m^2 + n^2 > m - n$ и равенство (1) невозможно.

Если $m < n$, то верно равенство

$$n - m = -x(m^2 + n^2) \quad (2), \text{ где } -x \text{ – натуральное число.}$$

Так как для натуральных чисел m и n справедливы равенство $m^2 > m$, $n^2 > n$. $m^2 + n^2 > m + n$, тогда $m^2 + n^2 > m - n$ и равенство (2) невозможно.

Следовательно, $m = n$. Перепишем условие задачи « $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$ », т. е. на $2m^2$ в виде

$$m + m^3 = 2y m^2. \quad (3)$$

Где y – натуральное число.

Разделив равенство (3) на натуральное число m , получим равенство

$$1 + m^2 = 2ym,$$

которое перепишем в виде

$$(2y - m)m = 1. \quad (4)$$

Для натуральных чисел m и $2y - m$ равенство (4) верно лишь при условии $m = 1$ и $y = 1$. Мы получили единственное решение задачи: $m = n = 1$.

Ответ: $m = n = 1$.

При решении заданий вышеуказанного типа очень часто возникает следующая формулировка условия: можно ли найти такие целые положительные числа x , y , z которые удовлетворяли бы условию уравнения $x^n + y^n = z^n$, где показатель n – целое число большее 2?

Французский математик и юрист Пьер Ферма (1601–1665), получивший ряд крупных результатов в области теории чисел, высказал следующее утверждение, которое называют **«проблемой Ферма»** или **«великой теоремой Ферма»**: **всякое уравнение $x^n + y^n = z^n$, при $n > 2$ не имеет решений в области натуральных чисел.**

Свое утверждение Ферма написал на полях книги – сочинения Диофанта (3 в. н.э.) – со следующим комментарием: «Я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на этих полях». В настоящее время все специалисты твердо уверены в том, что Ферма не обладал доказательством этой теоремы и, сверх того, что элементарными методами ее нельзя доказать.



Более трехсот лет проблема Ферма привлекала к себе внимание как крупных специалистов, так и (в связи с исключительной простотой своей постановки) многочисленных любителей математики. Она служила беспрецедентным стимулом для развития математики. При попытках ее доказать были разработаны мощные средства, приведшие к созданию обширного раздела математики – теории алгебраических чисел. С помощью сложнейшей теоретико-числовой техники теорема Ферма была проверена для всех $n \leq 4000000$, но до конца 1994 года в общем случае оставалась недоказанной. Получить ее полное доказательство удалось лишь с помощью теории эллиптических кривых.

23 июня 1993 года математик из Принстона Эндрю Уайлс, выступая на конференции по теории чисел в Кембридже (Великобритания), сделал сообщение, из которого следовало, что им получено доказательство великой теоремы Ферма. Дальнейшие события развивались драматически. В начале декабря 1993 года, за несколько дней до того, как рукопись работы Уайлса должна была пойти в печать, в его доказательстве были обнаружены пробелы. Исправление их заняло свыше года. И только летом 1995 года текст с доказательством, написанный Уайлсом в сотрудничестве с Тейлором, вышел в свет.



Пример 5. У натурального числа n ровно шесть натуральных делителей. Сумма этих делителей равна 3500. Найдите n .

Решение. Рассмотрим возможные ситуации.

а) предположим, что искомое число имеет один простой делитель кратности k . В этом случае количество делителей числа равно $p=k+1$ и $k=5$. Приняв в качестве простого делителя число 3, мы получим число $3^5=243$, сумма делителей которого равна $1+3+9+27+81+243=364 < 3500$, в случае простого делителя 5 сумма делителей превысит указанную величину. Предположение ошибочно. Для $k=2$ сумма делителей окажется и подавно меньше заданной, для $k=5$ – и подавно больше.

б) при наличии t простых делителей первой кратности, количество делителей числа равно $p=2^t$, что противоречит условию «ровно 6 натуральных делителей».

в) пусть искомое число содержит два простых делителя (по количеству простых делителей числа 6) кратностей a и b . Количество делителей числа равно $p=(a+1)(b+1)=6$. Отсюда, $a=1$, $b=2$ – единственное решение. Обозначим простые делители искомого числа x и y . По условию $1+x+y+xy+y^2+xy^2=3500$, откуда получим, что

$$x(y^2+y+1)+y(y+1)=3499. \quad (1)$$

$3499 \equiv 1 \pmod{3}$ (т. е. целое число 3499 сравнимо с целым числом 1 по модулю натурального числа 3). Соответственно, $x(y^2+y+1)+y(y+1) \equiv 1 \pmod{3}$. Это условие выполняется в случаях:

- 1) $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}$;
- 2) $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}$, т. е. $y=3$.

Вариант 2) ошибочен, при $y=3$ получаем дробное значение x . Рассмотрим вариант 1), ограничив зону поиска. Определим из формулы (1) наибольшее возможное значение y , учитывая, что $x > 3$.

$$4(y^2+y+1)+y(y+1)=3499; 5y^2+5y+4=3499; y^2+y-699=0; y < 26.$$

В группе чисел от 2 до 26 отвечают условию $y \equiv 2 \pmod{3}$ простые числа 2, 5, 11, 17, 23. Начав перебор с меньшего из этих чисел, на нем и завершаем поиск.

Положив $y=2$, находим $x=499$ (простое число). Искомое число равно $xy^2=499 \cdot 4=1996$. Делители этого числа: 1, 2, 4, 499, 998, 1996.

Проверкой убеждаемся, что сумма этих делителей равна 3500.

Ответ: 1996.



Комментарии. Поясним, откуда берутся формулы для подсчета числа делителей в случаях а), б) и в).

а) Если некоторое число имеет один простой делитель m кратности k , то оно делится на каждое из чисел $1, m^1, m^2, \dots, m^k$, т. е. это число имеет $k + 1$ делителей.

б) Если некоторое число имеет t простых делителей первой кратности m_1, m_2, \dots, m_t , то оно делится на

$$1, m_1, m_2, \dots, m_t,$$

$$m_1 m_2, m_1 m_3, \dots, m_1 m_t,$$

$$m_1 m_2 m_3, \dots, m_1 m_2, \dots,$$

$$m_1 m_2 m_3 \dots m_t.$$

в) Если простые делители m и n некоторого числа имеют кратности a и b , то это число делится на каждое из чисел, записанных в следующих двух строках

$$1, m^1, m^2, \dots, m^a,$$

$$1, n^1, n^2, \dots, n^b,$$

а также на все возможные произведения чисел, взятых по одному из каждой строки. Так как в первой строке $a + 1$ число, а во второй — $b + 1$ число, то всего делителей $p = (a + 1)(b + 1)$.

Пример 6. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).

Решение. Искомые числа делятся на 42 и имеют, по крайней мере, простые делители 2, 3 и 7. Обозначив кратности этих делителей (без привязки к ним) m , n и k , найдём эти кратности из уравнения для количества делителей числа:

$$N = (m + 1)(n + 1)(k + 1) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Принимаем $m = 1$, $n = 2$, $k = 6$ (вариант единственный с точностью до привязки к буквам). Искомые числа (их количество равно числу перестановок из трёх элементов $P_3 = 3! = 6$) равны: $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; $2^2 \cdot 3 \cdot 7^6$; $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7$; $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$; $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Ответ. $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; $2^2 \cdot 3 \cdot 7^6$; $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7$; $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$; $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$



Пример 7. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

Решение. Левая часть уравнения при любых натуральных m и n при делении на 3 даёт остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 3 должен быть и у 5^k , откуда следует, что k — чётное. Пусть $k = 2r$, r — натуральное число.

Правая часть уравнения при любом натуральном k при делении на 4 даёт остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 4 должен быть и у 3^m , откуда следует, что m — чётное. Пусть $m = 2s$, s — натуральное число.

Перепишем исходное уравнение в виде $3^{2s} + 4^n = 5^{2r}$, или в виде $2^{2n} = (5^r - 3^s)(5^r + 3^s)$. Тогда

$5^r - 3^s = 2^q$ и $5^r + 3^s = 2^l$, где q и l — целые неотрицательные числа и $q + l = 2n$.

Таким образом,

$$5^r = (2^q + 2^l):2, \quad 3^s = (2^l - 2^q):2 = 2^{l-1} - 2^{q-1}.$$

Число 3^s — нечётное, значит, $2^{l-1} - 2^{q-1}$ нечётно, поэтому $q = 1$ и $3^s = 2^{l-1} - 1$.

Следовательно, число $l - 1$ чётно, $l - 1 = 2p$ (иначе левая часть не делится на 3).

Тогда $3^s =$

$= (2^p - 1)(2^p + 1)$ — произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители 1 и 3, тогда $p = 1$, $s = 1$, $m = 2s = 2$. Далее последовательно получаем: $l = 2p + 1 = 3$, $5^r = (2^q + 2^l):2 = 5$, $r = 1$, $k = 2r = 2$, $q + l = 2n = 4$. Итак, $m = n = k = 2$.

Ответ. $m = 2$, $n = 2$, $k = 2$.



Пример 8. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

Решение. Здесь невозможно ограничиться одним простым делителем кратности $k = 15 - 1$, поскольку по условию должны быть, по меньшей мере, два простых делителя — 2 и 5. Если ограничиться выбором только этих двух делителей, их кратности в искомым числах дает формула $p = (m + 1)(n + 1)$, где p — количество делителей числа, равное 15, m и n — кратности простых делителей. $(m + 1)(n + 1) = 15$; $m = 2$, $n = 4$ (единственное решение без привязки к конкретным множителям).

Существуют два числа, удовлетворяющие условию: $N_1 = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$;
 $N_2 = 2^4 \cdot 5^2 = 400$.

Ответ. 2500 и 400.



Пример 9. При каком наибольшем n найдется n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

Решение. Очевидно, решая задачу, следует выполнять требование: первое член прогрессии и её знаменатель должны быть по возможности, минимальны. При этом все члены прогрессии — целые числа. Логичный, на первый взгляд, выбор числа 10^6 в качестве первого члена и знаменателя прогрессии $1,1$ не приводит к успеху. Цепочка чисел заканчивается на 6-м ходу. Верный подход состоит в том, чтобы в качестве первого члена выбрать максимально возможную степень (естественно, основание степени должно быть минимально), а в качестве знаменателя прогрессии — неправильную дробь, знаменатель которой равен основанию степени первого члена, либо ближайшей степенью его, а числитель — знаменателю плюс 1. Выбираем в качестве первого члена прогрессии число $1048576 = 2^{20}$, а в качестве знаменателя прогрессии число $5/4$. Получаем такую цепочку: 1048576, 1310720, 1638400, 2048000, 2560000, 3200000, 4000000, 5000000, 6250000, 7812500, 9765625 — всего 11 членов.

Ответ. 11.



Метод математической индукции при решении задач С6.

Пусть мы имеем бесконечную последовательность утверждений $P^1, P^2, \dots, P^n, \dots$, занумерованных натуральными числами, причём: — утверждение P^1 истинно; — если некоторое утверждение P^k истинно, то следующее утверждение P^{k+1} тоже истинно.

Тогда принцип математической индукции утверждает, что все утверждения последовательности истинны.

Другими словами принцип математической индукции можно сформулировать так: если в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди — женщины.

Способ рассуждений, основанный на принципе математической индукции называется методом математической индукции.



Для решения задач методом математической индукции необходимо:

- 1) сформулировать утверждение задачи в виде последовательности утверждений $P^1, P^2, \dots, P^n, \dots$
- 2) доказать, что утверждение P^1 истинно (этот этап называется базой индукции);
- 3) доказать, что если утверждение P^n истинно при некотором $n = k$, то оно истинно и при $n = k + 1$ (этот этап называется шагом индукции).

Для примера докажем по индукции следующее равенство (которое, конечно, допускает и другие доказательства):

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2.$$

База. При $n = 1$ равенство превращается в тождество $1 = 1 \cdot (1 + 1)/2$.

Шаг. Пусть равенство выполнено при $n = k$: $1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k + 1)/2$. Прибавим к обеим частям этого равенства $k + 1$. В левой части мы получим сумму $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1)$, а в правой -

$k(k+1)/2 + (k+1) = (k(k+1) + 2(k+1))/2 = ((k+2)(k+1))/2$. Итак, $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$, а это и есть требуемое равенство при $n = k + 1$.

Пример 10. Решить уравнение $2^n = 3^m + 1$, n и m – натуральные.

Решение: Перепишем уравнение в виде $2^n - 1 = 3^m$ (1). Рассмотрим два случая - когда n -нечетное и когда n -четное.

1) n -нечетное, т.е. $n=2k-1$. Докажем, что $2^{2k-1} - 1$ не делится нацело на 3, давая остаток 1, при натуральных k методом математической индукции. **Для доказательства методом математической индукции необходимо выполнить два пункта - доказать утверждение при наименьшем k , и доказать, что есть утверждение выполняется для какого-либо k , то оно выполняется и для $k+1$.** Первый пункт выполняется элементарно: пусть $k=1$, тогда - не делится нацело на три, давая остаток 1.

Второй пункт: пусть $2^{2k-1} - 1$ не делится на 3, давая остаток 1. Это означает, что $2^{2k-1} - 1 = 3t + 1$.

Тогда $2^{2(k+1)-1} - 1 = 2^{2k-1+2} - 1 = 4 * 2^{2k-1} - 1 = 4 * 2^{2k-1} - 4 + 3 = 4(2^{2k-1} - 1) + 3 = 4(3t + 1) + 3 = 12t + 7 = 3(4t + 2) + 1$ - не делится нацело на, давая остаток 1.

Выполнив оба пункта, мы доказали утверждение методом математической индукции. Так как при нечетных n левая часть равенства (1) не делится на 3, а правая делится на 3 всегда, то равенство не выполняется.



2) n -четное, т.е. $n=2k$. Тогда применив формулу разности квадратов к левой части получим равенство $(2^k - 1)(2^k + 1) = 3^m$. Так как правая часть равенства - целая степень числа 3, то левая тоже должна быть целой степенью 3. Значит,

$$2^k - 1 = 3^p, 2^k + 1 = 3^q, \text{ где } p+q=m, q>p. 3^q - 3^p = 2^k + 1 - (2^k - 1) = 2.$$

Вынесем за скобки 3^p . Получаем

$$3^p(3^{q-p} - 1) = 2.$$

как все числа целые, то такое возможно если один из множителей равен 1, а второй 2. Первый множитель не может равняться 2, т.к. является степенью 3. Получаем, что

$$3^p = 1, p = 0.$$

Тогда

$$(3^{q-p} - 1) = 2, 3^{q-p} = 3, q - p = 1, q = 1, m = p + q = 0 + 1 = 1.$$

Подставив в изначальное уравнение, получим

$$2^n = 3^1 + 1, 2^n = 4, n = 2$$

Ответ: $m=1, n=2$



Пример 11. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n+100$ последовательных натуральных чисел.

Типичная олимпиадная задача, связанная с теорией чисел, причем сложная. В таких задачах, когда непонятно, как ее решать, необходимо попытаться решить самый простой случай. Можно, например, принять $n=2$, но в данном случае этого делать нельзя. В задаче сказано, что доказать существование такого n , которое бы удовлетворяло условию. Из этого следует, что возможно не для всякого n можно найти такие последовательности и может оказаться, что при $n=2$ задача не имеет решений и тогда мы просто потеряем время. Будем упрощать с другой стороны - будем считать, что последовательность из $100+n$ чисел начинается с 1. То есть это последовательность $1, 2, 3, \dots, 100+n$.



Для дальнейшего решения необходимо понять идею задачи. В данном случае она заключается в следующем: пусть все элементы кроме последнего последовательности из n элементов совпадают с элементами большей последовательности. То есть это последовательность $101, 102, 103, \dots, 101+n$. Обозначим произведение общих элементов последовательности за k . Тогда произведение элементов последовательности равны $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100 \cdot k$ и $k \cdot (101+n)$. По условию они должны быть равны:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100 \cdot k = k \cdot (101+n),$$

значит

$$101+n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100 = 100!. \quad n = 100! - 101.$$

Нужное число найдено, утверждение доказано.

Зная доказательство этого частного случая, можно доказать точно так же для более общих случаев, когда последовательность начинается не с 1, а с любого другого числа.

