Основы теории делимости чисел

На примере решения задач С6

Делимость целых чисел

Рассмотрим множество целых чисел ***Z*.** Операция деления выполняется не для всех пар чисел из Z.

- ***Определение.*** Число a$\in$ Z делится на число b$\in$Z (b$\neq$0), если существует такое число q$\in$Z, что a=bq.
- ***Замечание.*** Вместо выражения «a делится на b» очень часто используется фраза «число b делит число a» и при этом применяется запись . a | b

Если a делится на b, то b называется ***делителем*** a, само a называется ***кратным*** числа b. Число q называется **частным** от деления a на b.

Число 0 делится на любое b$\neq$0. Если a$\neq$0, то, очевидно, что множество всех делителей a конечно.

- Рассмотрим простейшие ***свойства делимости целых чисел.***

- 1. Если $c \mid b$ и $b \mid a$, то $c \mid a$.
- 2. Если $m=a+b$, $d \mid a$ и $d \mid a$ то $d \mid b$.

Замечание. Аналогично доказывается, что если $m=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$ и d делит числа m, a_1, a_2, … a_{n-1}, то $d \mid a_n$.

Определение. Общим делителем чисел a_1, a_2, … $a_n \in Z$ называется число $d \in Z$, являющееся **делителем** каждого из этих чисел. **Общий делитель** данных чисел называется их **наибольшим общим делителем**, если он делится на всякий общий делитель этих чисел.

3. Если a, b, $c \in Z$, НОД$(a,b)=1$ и $b \mid ac$, то $b \mid c$.

- 4. Если $b \in Z$ взаимно просто с каждым из a_1, a_2, … $a_n \in Z$, то b взаимно просто с их произведением $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$.

Пример 1. Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение:

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2+...+7)(13+...+21)=\left(\frac{2+7}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{13+21}{2}\cdot 9\right)=27\cdot 153=4131$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21)=1\cdot 1=1$$

Ответ:1 и 4131.

Рассмотрим теперь множество натуральных чисел N.
Число 1 имеет единственный натуральный делитель. Любое $n \in N$, и $n>1$, делится на 1 и n.
Определение. Число $n \in N$, и $n>1$, называется простым, если оно не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и n.
Определение. Число $n \in N$ называется составным, если оно имеет натуральный делитель, отличный от 1 и n.
Замечание. Из последнего определения следует, что каждое составное число представляется в виде $n=a \cdot b$, где $a,b \in N$, $1<a<n$, $1<n<b$.
Замечание. Число 1 не является ни простым, ни составным.
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ. Любое число $n \in N$, $n>1$, представляется в виде произведения простых чисел, причем единственным образом, если не учитывать порядок следования сомножителей.

Рассмотрим удобный способ выделения простых чисел в данном отрезке натурального ряда, известный еще греческому ученому *Эратосфену (276–194 г.г. до н.э.). Он состоит в отсеивании составных чисел, находящихся в данном отрезке, и носит название* ***«решета Эратосфена».*** Напишем одно за другим числа 2, 3,4,…,N. Число 2, являющееся простым, оставляем и зачеркиваем после него все четные числа. Первое следующее за 2 незачеркнутое число есть 3. Оно не делится на 2. Значит, оно не имеет делителей, отличных от 1 и 3, и поэтому является простым. Оставляем 3 и зачеркиваем после него все числа, кратные 3. Продолжая этот процесс, найдем все простые числа, не превосходящие некоторого простого числа p_k. При этом будут зачеркнуты все составные числа, кратные 2, 3… p_k. Первое незачеркнутое после p_k число будет простым числом p_{k+1}, так как оно не делится на 2, 3… p_k и поэтому имеет своими делителями только 1 и p_{k+1}. Если найдено $p_k \geq \sqrt{N}$, то все оставшиеся незачеркнутыми числа будут простыми, поскольку все кратные чисел 2, 3… p_k уже вычеркнуты.

Пример 2. Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n , удовлетворяющие уравнению $2\cdot k!=m!-2\cdot n!$ $(1!=1; 2!=1\cdot 2=2; n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)$

1.Òàêêàê $m!=2\cdot k!+2\cdot n!$, âåðíû íåðàâåíñòâ à $n<m$ è $k<m$.

2.Ïóñòü $k\le n$.Òîãäà $4\cdot n!\ge 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\ge (n+1)\cdot n!$, îòêóäà

$4\ge n+1$, è $k\le n\le 3$.

3.Ïóñòü $k>n$.Òîãäà $4\cdot k!\ge 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\ge (k+1)\cdot k!$, îòêóäà

$4\ge k+1$, è $n\le k\le 3$.

4.Äàëååêîíå÷íûì ïåðåáîðîì çíà÷åíèé $1\le n\le 3, 1\le k\le 3$ íàõîäèì âñåðåøåíèÿ .

Ответ: k=1, n=2, m=3; k=n=3 m=4; k=2, n=1, m=3.

Каноническое разложение натуральных чисел.

Канонические разложения натуральных чисел удобно использовать для выяснения соотношений делимости. Добавляя при необходимости сомножители с нулевыми показателями степени в канонические разложения, всегда можно конечное число любых натуральных чисел представить в виде произведения одних и тех же различных простых чисел с целыми неотрицательными показателями степени.

Теорема 9. Пусть даны натуральные числа:

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}, \; n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые числа, а показатели степени k_i и l_i – целые неотрицательные. Для того, чтобы число m делилось на число n, необходимо и достаточно, чтобы $k_i \geq l_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Следствие 2. Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_r$ представлены в каноническом виде:

$$m_1 = p_1^{k_{11}} \cdot p_2^{k_{12}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{1s}},$$

$$m_2 = p_1^{k_{21}} \cdot p_2^{k_{22}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{2s}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_r = p_1^{k_{r1}} \cdot p_2^{k_{r2}} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_{rs}},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые числа, а показатели степени – целые неотрицательные. Тогда:

1)НОД $(m_1, m_2, \ldots, m_k) = p_1^{u_1} \cdot p_2^{u_2} \cdot \cdots \cdot p_s^{u_s}$,

где $u_i = min\{k_{1i}, k_{2i}, \ldots, k_{ri}\}$ для $i = 1, 2, \ldots, s$

1)НОК $(m_1, m_2, \ldots, m_k) = p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2} \cdot \cdots \cdot p_s^{v_s}$,

где $v_i = min\{k_{1i}, k_{2i}, \ldots, k_{ri}\}$ для $i = 1, 2, \ldots, s$

В частности, числа $m_1, m_2, \ldots, m_i$ взаимно просты тогда и только то

когда при любом $i = 1, 2, \ldots, s$

одно из чисел к$_{1i}, k_{2i}, \ldots, k_{ri}$ равно нулю, т. е. когда у данных чисел

$m_1, m_2, \ldots, m_r$ нет общих простых делителей.

Следствие 1. Пусть натуральное число m представлено в каноническом виде:

$$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s} .$$

Тогда все натуральные делители m представляют собой всевозможные числа вида:

$$p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{l_s} ,$$

где $0 \le l_i \le k_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s$. При этом всякий натуральный делитель числа m однозначно задается выражением указанного вида.

Пример 3. Найдите все пары пятизначных чисел x, y, такие что число xy, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

Решение. По условию задачи число xy$=10^5$ x+y делится на xy, т. Е. верно равенство 10^5 x+y=pxy (1) , где p-натуральное число.

Перепишем равенство (1) в виде 10^5 x=(px-1)y (2).

Так как px-1 не делится на x, то y делится на x, о есть y=qx, где q- натуральное число, меньшее 10 (в противном случае y не пятизначное число).

Заменив в равенстве (1) y на qx и разделив полученное равенство на x, имеем 10^5 +q=pqx. (3)

Так как 10^5 =(px-1)q, то 10^5 делится на q. Число 10^5 имеет делители, меньшие 10: 1, 2, 4, 5, 8. Рассмотрим случаи q=1, q=2, q=4, q=5, q=8.

1) Если q=1, то равенство (3) имеет вид: px=100001. Первыми делителями числа 100001 является 1 и 11, но при p=1 и при p≥11 число x не пятизначное.
2) Если q=2, то y=2x. Перепишем равенство (3) в виде px=50001. Первыми делителями числа 50001 являются числа 1, 3 и 7.

При p=1 имеем: x=50001, y=100002, число y не пятизначное.

При p=3 имеем: x=16667, y=2*16667=33334.

При p≥7 число x не пятизначное.

Итак, числа x=16667, y =33334 удовлетворяю условиям задачи.

3) Если $q=4$, то $y=4x$. Перепишем равенство (3) в виде $px=25001$. Первыми делителями 25001 являются 1 и 23.
При $p=1$ имеем: $x=25001$, $y=100004$, число y не пятизначное.
При $p\geq 23$ число x не пятизначное.
4) Если $q=5$, то $y=5x$. Из равенства (3) следует, что $px=20001$.
При $p=1$ имеем: $x=20001$, $y=100005$, число y не пятизначное.
При $p>1$ число x не пятизначное.
5) Если $q=8$, то $y=8x$. Перепишем равенство (3) в виде $px=12501$.
При $p=1$ имеем: $x=12501$, $y=100008$, число y не пятизначное.
При $p>8$ число x не пятизначное.
Итак, в случаях 1), 3) -5) не существует чисел x и y, удовлетворяющих условию задачи. Задача имеет единственное решение: $x=16667$, $y=33334$.

Ответ: $x=16667$, $y=33334$.

Пример 4. Натуральные числа m и n таковы, что и m^3+n, и $m+m^3$ делится на m^2+n^2. Найди те m и n.

Решение. Так как каждое из чисел m^3+n, и $m+m^3$ делится на m^2+n^2, то их разность m-n тоже делится на m^2+n^2, т. е. справедливо равенство

$$m-n=x(m^2+n^2) \quad (1),$$ где x целое число.

Если m>n, то x – натуральное число и справедливы равенство $m^2>m$, $n^2>n$. $m^2+n^2>m+n$, тогда $m^2+n^2>m-n$ и равенство (1) невозможно.

Если m<n, то верно равенство

$$n-m= =-x(m^2+n^2) \quad (2),$$ где -x – натуральное число.

Так как для натуральных чисел m и n справедливы равенство $m^2>m$, $n^2>n$. $m^2+n^2>m+n$, тогда $m^2+n^2>m-n$ и равенство (2) невозможно.

Следовательно, m=n. Перепишем условие задачи «$m+m^3$ делится на m^2+n^2», т. е. на $2m^2$ в виде

$$m+m^3=2y\,m^2. \qquad (3)$$

Где y – натуральное число.

Разделив равенство (3) на натуральное число m, получим равенство

$$1+m^2=2ym,$$

которое перепишем в виде

$$(2y-m)m=1. \quad (4)$$

Для натуральных чисел m и 2y-m равенство (4) верно лишь при условии m=1 и y=1. Мы получили единственное решение задачи: m=n=1.

Ответ: m=n=1.

При решении заданий вышеуказанного типа очень часто возникает следующая формулировка условия: можно ли найти такие целые положительные числа x, y, z которые удовлетворяли бы условию уравнения $x^n+y^n=z^n$, где показатель n – целое число большее 2?

Французский математик и юрист Пьер Ферма (1601–1665), получивший ряд крупных результатов в области теории чисел, высказал следующее утверждение, которое называют **«проблемой Ферма» или «великой теоремой Ферма»: всякое уравнение $x^n+y^n=z^n$, при $n> 2$ не имеет решений в области натуральных чисел.**

Свое утверждение Ферма написал на полях книги – сочинения Диофанта (3 в. н.э.) – со следующим комментарием: «Я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на этих полях». В настоящее время все специалисты твердо уверены в том, что Ферма не обладал доказательством этой теоремы и, сверх того, что элементарными методами ее нельзя доказать.

Более трехсот лет проблема Ферма привлекала к себе внимание как крупных специалистов, так и (в связи с исключительной простотой своей постановки) многочисленных любителей математики. Она служила беспрецедентным стимулом для развития математики. При попытках ее доказать были разработаны мощные средства, приведшие к созданию обширного раздела математики – теории алгебраических чисел. С помощью сложнейшей теоретико-числовой техники теорема Ферма была проверена для всех $n \leq 4000000$, но до конца 1994 года в общем случае оставалась недоказанной. Получить ее полное доказательство удалось лишь с помощью теории эллиптических кривых.

23 июня 1993 года математик из Принстона Эндрю Уайлс, выступая на конференции по теории чисел в Кембридже (Великобритания), сделал сообщение, из которого следовало, что им получено доказательство великой теоремы Ферма. Дальнейшие события развивались драматически. В начале декабря 1993 года, за несколько дней до того, как рукопись работы Уайлса должна была пойти в печать, в его доказательстве были обнаружены пробелы. Исправление их заняло свыше года. И только летом 1995 года текст с доказательством, написанный Уайлсом в сотрудничестве с Тейлором, вышел в свет.

Пример 5. У натурального числа n ровно шесть натуральных делителей. Сумма этих делителей равна 3500. Найдите n.

Решение. Рассмотрим возможные ситуации.

а) предположим, что искомое число имеет один простой делитель кратности к. В этом случае количество делителей числа равно р=к+1 и к=5. Приняв в качестве простого делителя число 3, мы получим число $3^5=243$, сумма делителей которого равна 1+3+9+27+81+243=364<3500, в случае простого делителя 5 сумма делителей превысит указанную величину. Предположение ошибочно. Для к=2 сумма делителей окажется и подавно меньше заданной, для к=5 – и подавно больше.

б)при наличии t простых делителей первой кратности, количество делителей числа равно $p=2^t$, что противоречит условию «ровно 6 натуральных делителей».

в)пусть искомое число содержит два простых делителя (по количеству простых делителей числа 6) кратностей a и b.Количество делителей числа равно p=(a+1)(b+1)=6. Отсюда, a=1, b=2 – единственное решение. Обозначим простые делители искомого числа x и y. По условию $1+x+y+xy+y^2+xy^2=3500$, откуда получим, что

$$x(y^2+y+1)+y(y+1)=3499. \qquad (1)$$

$3499\equiv1 \pmod 3$ (т. е. целое число 3499 сравнимо с целым число 1 по модулю натурального числа 3). Соответственно, $x(y^2+y+1)+y(y+1)\equiv1 \pmod 3$. Это условие выполняется в случаях:

1) $x \equiv 1 \pmod 3$, $y \equiv 2 \pmod 3$;

2) $x \equiv 1 \pmod 3$, $y \equiv 0 \pmod 3$, т. е. $y=3$.

Вариант 2) ошибочен, при $y=3$ получаем дробное значение x. Рассмотрим вариант 1), ограничив зону поиска. Определим из формулы (1) наибольшее возможное значение y, учитывая, что $x>3$.

$4(y^2+y+1)+y(y+1)=3499$; $5y^2+5y+4=3499$; $y^2+y-699=0$; $y<26$.

В группе чисел от 2 до 26 отвечают условию $y \equiv 2 \pmod 3$ простые числа 2, 5, 11, 17, 23. Начав перебор с меньшего из этих чисел, на нем и завершаем поиск.

Положив $y=2$, находим $x=499$ (простое число). Искомое число равно $xy^2=499*4=1996$. Делители этого числа:1, 2, 4, 499, 998, 1996. Проверкой убеждаемся, что сумма этих делителей равна 3500.

Ответ: 1996.

Комментарии. Поясним, откуда берутся формулы для подсчета числа делителей в случаях а), б) и в).

а) Если некоторое число имеет один простой делитель m кратности k, то оно делится на каждое из чисел 1, m^1, m^2, … , m^k, т. е. это число имеет $k + 1$ делителей.

б) Если некоторое число имеет t простых делителей первой кратности m_1, m_2, ..., m_t, то оно делится на

$1, m_1, m_2, ..., m_t,$
$m_1m_2, m_1m_3, ..., m_1m_t,$
$m_1m_2m_3, ..., m_1m_2, ...,$
$m_1m_2m_3…m_t.$

в) Если простые делители m и n некоторого числа имеют кратности a и b, то это число делится на каждое из чисел, записанных в следующих двух строках

$1, m^1, m^2, … , m^a,$
$1, n^1, n^2, … , n^b,$

а также на все возможные произведения чисел, взятых по одному из каждой строки. Так как в первой строке $a + 1$ число, а во второй — $b + 1$ число, то всего делителей $p = (a + 1)(b + 1)$.

Пример 6. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).

Решение. Искомые числа делятся на 42 и имеют, по крайней мере, простые делители 2, 3 и 7. Обозначив кратности этих делителей (без привязки к ним) m, n и k, найдём эти кратности из уравнения для количества делителей числа:
$N = (m + 1)(n + 1)(k + 1) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$
Принимаем $m = 1$, $n = 2$, $k = 6$ (вариант единственный с точностью до привязки к буквам). Искомые числа (их количество равно числу перестановок из трёх элементов $P_3 = 3! = 6$) равны: $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; $2^2 \cdot 3 \cdot 7^6$; $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7$; $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$; $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Ответ. $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$; $2 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; $2^2 \cdot 3 \cdot 7^6$; $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7$; $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$; $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$

Пример 7. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

Решение. Левая часть уравнения при любых натуральных m и n при делении на 3 даёт остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 3 должен быть и у 5^k, откуда следует, что k — чётное. Пусть $k = 2r$, r — натуральное число.
Правая часть уравнения при любом натуральном k при делении на 4 даёт остаток 1, следовательно, такой же остаток при делении на 4 должен быть и у 3^m, откуда следует, что m — чётное. Пусть $m = 2s$, s — натуральное число.
Перепишем исходное уравнение в виде $3^{2s} + 4^n = 5^{2r}$, или в виде $2^{2n} = (5^r - 3^s)(5^r + 3^s)$. Тогда
$5^r - 3^s = 2^q$ и $5^r + 3^s = 2^l$, где q и l — целые неотрицательные числа и $q + l = 2n$.
Таким образом,
$5^r = (2^q + 2^l):2$, $3^s = (2^l - 2^q):2 = 2^{l-1} - 2^{q-1}$.
Число 3^s — нечётное, значит, $2^{l-1} - 2^{q-1}$ нечётно, поэтому $q = 1$ и $3^s = 2^{l-1} - 1$.
Следовательно, число $l - 1$ чётно, $l - 1 = 2p$ (иначе левая часть не делится на 3).
Тогда $3^s =$
$= (2^p - 1)(2^p + 1)$ — произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители 1 и 3, тогда $p = 1$, $s = 1$, $m = 2s = 2$. Далее последовательно получаем: $l = 2p + 1 = 3$, $5^r = (2^q + 2^l):2 = 5$, $r = 1$, $k = 2r = 2$, $q + l = 2n = 4$. Итак, $m = n = k = 2$.

Ответ. $m = 2$, $n = 2$, $k = 2$.

Пример 8. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

Решение. Здесь невозможно ограничиться одним простым делителем кратности $k = 15 — 1$, поскольку по условию должны быть, по меньшей мере, два простых делителя — 2 и 5. Если ограничиться выбором только этих двух делителей, их кратности в искомых числах дает формула $p = (m + 1)(n + 1)$, где p — количество делителей числа, равное 15, m и n — кратности простых делителей. $(m + 1)(n + 1) = 15$; $m = 2$, $n = 4$ (единственное решение без привязки к конкретным множителям). Существуют два числа, удовлетворяющие условию: $N_1 = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$; $N_2 = 2^4 \cdot 5^2 = 400$.

Ответ. 2500 и 400.

Пример 9. При каком наибольшем *n* найдется *n* семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

Решение. Очевидно, решая задачу, следует выполнять требование: первое член прогрессии и её знаменатель должны быть по возможности, минимальны. При этом все члены прогрессии — целые числа. Логичный, на первый взгляд, выбор числа 10^6 в качестве первого члена и знаменателя прогрессии 1,1 не приводит к успеху. Цепочка чисел заканчивается на 6-м ходу. Верный подход состоит в том, чтобы в качестве первого члена выбрать максимально возможную степень (естественно, основание степени должно быть минимально), а в качестве знаменателя прогрессии — неправильную дробь, знаменатель которой равен основанию степени первого члена, либо ближайшей степенью его, а числитель – знаменателю плюс 1. Выбираем в качестве первого члена прогрессии число $1048576 = 2^{20}$, а в качестве знаменателя прогрессии число 5/4. Получаем такую цепочку: 1048576, 1310720, 1638400, 2048000, 2560000, 3200000, 4000000, 5000000, 6250000, 7812500, 9765625 — всего 11 членов.

Ответ. 11.

Метод математической индукции при решении задач С6.

Пусть мы имеем бесконечную последовательность утверждений P^1, P^2, ..., P^n, ..., занумерованных натуральными числами, причём: — утверждение P^1 истинно; — если некоторое утверждение P^k истинно, то следующее утверждение P^{k+1} тоже истинно.

Тогда принцип математической индукции утверждает, что все утверждения последовательности истинны.

Другими словами принцип математической индукции можно сформулировать так: если в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди – женщины.

Способ рассуждений, основанный на принципе математической индукции называется методом математической индукции.

Для решения задач методом математической индукции необходимо:

1) сформулировать утверждение задачи в виде последовательности утверждений P^1, P^2, ..., P^n, ...
2) доказать, что утверждение P^1 истинно (этот этап называется базой индукции);
3) доказать, что если утверждение P^n истинно при некотором $n = k$, то оно истинно и при $n = k + 1$ (этот этап называется шагом индукции).

Для примера докажем по индукции следующее равенство (которое, конечно, допускает и другие доказательства):

$1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$.

База. При $n = 1$ равенство превращается в тождество $1 = 1 \cdot (1 + 1)/2$.

Шаг. Пусть равенство выполнено при $n = k$: $1 + 2 + 3 + ... + k = k(k + 1)/2$. Прибавим к обеим частям этого равенства $k + 1$. В левой части мы получим сумму $1 + 2+ 3 + ... + k + (k + 1)$, а в правой - $k(k+1)/2+(k+1)=(k(k+1)+2(k+1))/2=((k+2)(k+1))/2$. Итак, $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$, а это и есть требуемое равенство при $n = k + 1$.

Пример 10. Решить уравнение $2^n = 3^m + 1$, n и m – натуральные.

Решение: Перепишем уравнение в виде $2^n - 1 = 3^m$ (1). Рассмотрим два случая - когда n-нечетное и когда n-четное.
1) n-нечетное, т.е. n=2k-1. Докажем, что $2^{2k-1} - 1$ не делится нацело на 3, давая остаток 1, при натуральных k методом математической индукции. **Для доказательства методом математической индукции необходимо выполнить два пункта - доказать утверждение при наименьшем k, и доказать, что есть утверждение выполняется для какого-либо k, то оно выполняется и для k+1.**
Первый пункт выполняется элементарно: пусть k=1, тогда
- не делится нацело на три, давая остаток 1.
Второй пункт: пусть $2^{2k-1} - 1$ не делится на 3, давая остаток 1. Это означает, что $2^{2k-1} - 1 = 3t + 1$.
Тогда $2^{2(k+1)-1} - 1 = 2^{2k-1+2} - 1 = 4 * 2^{2k-1} - 1 = 4 * 2^{2k-1} - 4 + 3 = 4(2^{2k-1} - 1) + 3 = 4(3t + 1) + 3 = 12t + 7 = 3(4t + 2) + 1$ - не делится нацело на, давая остаток 1.
Выполнив оба пункта, мы доказали утверждение методом математической индукции. Так как при нечентых n левая часть равенства (1) не делится на 3, а правая делится на 3 всегда, то равенство не выполняется.

2) n-четное, т.е. n=2k. Тогда применив формулу разности квадратов к левой части получим равенство $(2^k-1)(2^k+1)=3^m$. Так как правая часть равенства - целая степень числа 3, то левая тоже должна быть целой степенью 3. Значит,

$2^k-1=3^p, 2^k+1=3^q$, где p+q=m, q>p. $3^q-3^p=2^k+1-(2^k-1)=2$. Вынесем за скобки 3^p. Получаем

$$3^p(3^{q-p}-1)=2.$$

как все числа целые, то такое возможно если один из множителей равен 1, а второй 2. Первый множитель не может равняться 2, т.к. является степенью 3. Получаем, что

$$3^p=1,\ p=0.$$

Тогда

$(3^{q-p}-1)=2,\ \ 3^{q-p}=3,\ \ q-p=1,\ \ q=1,\ \ m=p+q=0+1=1.$

Подставив в изначальное уравнение, получим

$$2^n=3^1+1,\ 2^n=4,\ n=2$$

Ответ: m=1, n=2

Пример 11. Докажите, что найдется такое натуральное число $n>1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n+100$ последовательных натуральных чисел.

Типичная олимпиадная задача, связанная с теорией чисел, причем сложная. В таких задачах, когда непонятно, как ее решать, необходимо попытаться решить самый простой случай. Можно, например, принять $n=2$, но в данном случае этого делать нельзя. В задаче сказано, что доказать существование такого n, которое бы удовлетворяло условию. Из этого следует, что возможно не для всякого n можно найти такие последовательности и может оказать, что при $n=2$ задача не имеет решений и тогда мы просто потеряем время. Будем упрощать с другой стороны - будем считать, что последовательность из $100+n$ чисел начинается с 1. То есть это последовательность $1,2,3\ldots100+n$.

Для дальнейшего решения необходимо понять идею задачи. В данном случае она заключается в следующем: пусть все элементы кроме последнего последовательности из n элементов совпадают с элементами большей последовательности. То есть это последовательность 101, 102, 103... 101+n. Обозначим произведение общих элементов последовательности за k. Тогда произведение элементов последовательность равны 1*2*3...*99*100*k и k*(101+n). По условию они должны быть равны:

$$1*2*3...*99*100*k=k*(101+n),$$

значит

101+n=1*2*3...*99*100=100!. n=100!-101.

Нужное число найдено, утверждение доказано.

Зная доказательство этого частного случая, можно доказать точно так же для более общих случаев, когда последовательность начинается не с 1, а с любого другого числа.