ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 1:

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

1. ПРЕДМЕТ КУРСА

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается **движение** материальных тел **под действием сил**.

В нашем курсе

- Динамика материальной точки
- Динамика материальной системы
- Динамика твердого тела

2. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

Тела, **размерами которых можно пренебрегать**, а положение которых может быть определено как положение геометрической точки называют **материальными точками**.

Вообще говоря, одновременно с изменением положения тело может вращаться и деформироваться. Рассматривая движение материальной точки, **изучают только изменение ее положения в пространстве**, не интересуясь вращением и деформацией.

Представление о материальной точке не лишено смысла и для реальных тел: подобной **материальной точкой**, с точки зрения механики, является **центр тяжести твердого тела**. В дальнейшем будет показано, что центр тяжести твердого тела движется как материальная точка, на которую действуют все силы, приложенные к этому телу.

3. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Основные законы (аксиомы) динамики устанавливают связь между основными понятиями механики: массой, силой, скоростью, ускорением и т.д.
Сформулированы в 1687 г. И. Ньютоном в его труде “Математические начала натуральной философии” и составляют фундамент современной классической (ньютоновской) механики.

4. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

1-й закон динамики = 1-й закон Ньютона = закон инерции

Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние.

Существует такая система отсчета, в которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы. Такая система отсчета называется **инерциальной**.

Свойство тел сохранять состояние покоя или прямолинейное и равномерное движение называется **инертностью**

5. ВТОРОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

2-й закон динамики = 2-й закон Ньютона = основной закон

В инерциальной системе изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

$$\frac{d}{dt}\left(\overbrace{m\mathbf{v}}^{\text{кол-во движения}}\right) = \mathbf{F}$$

сила

масса скорость

$$m = \mathrm{const} \quad \Rightarrow m\mathbf{w} = \mathbf{F}$$

ускорение

радиус-вектор точки

$$\mathbf{w} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} \qquad \mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt}$$

6. СЛЕДСТВИЯ

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$$

1) Из 2-го закона видно, чем больше масса точки, тем меньше её ускорение при одной и той же действующей силе. Поэтому масса тела m выступает как **мера инертности**.

2) Во всех системах отсчёта, движущихся друг относительно друга без ускорения, *2-ой закон записывается одинаково.*

Если система координат $Ox_1y_1z_1$ движется равномерно и прямолинейно со скоростью $V_{пер}$ относительно системы $Oxyz$, то

$$m\mathbf{w}_1 = m\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = m\frac{d\left(\mathbf{v} + \mathbf{V}_{пер}\right)}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

Это *принцип относительности классической механики – принцип Галилея.*

7. ТРЕТИЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

3-й закон динамики = 3-й закон Ньютона =
Закон равенства действия и противодействия

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие

Силы взаимодействия 2-х материальных точек равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия.

Данный закон не содержит кинематических элементов. Следовательно, он верен в любой системе отсчёта.

8. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СИЛ

Сила тяжести. $F = mg$ $\quad g = 9.81$ м./с^2

ускорение свободного падения

Сила трения скольжения $F = f\,N$ ← нормальная реакция.

коэффициент трения

Сила тяготения. $F = f\,m_1 m_2 r^{-2}$ $\quad f = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг с^2).

гравитационная постоянная

Сила упругости $F = c\lambda$ ← удлинение (сжатие) пружины (м)

коэффициент жесткости пружины (Н/м).

Сила вязкого трения.
медленное движение

$F = \mu v$ ← скорость тела

коэффициент сопротивления

Сила гидродинамического сопротивления.
быстрое движение

плотность среды

$$F = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2$$

коэффициент сопротивления

площадь поперечного сечения

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

дифференциальные уравнения движения точки в векторной форме

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t\right) \qquad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t\right)$$

дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах

$$m\ddot{x} = F_x \quad m\ddot{y} = F_y \quad m\ddot{z} = F_z$$

Если пользоваться другими системами координат, то нужно спроектировать основное уравнение на оси рассматриваемой системы координат

<u>Пример 1</u>: полярные координаты (r, φ) $\qquad mw_r = F_r \quad mw_\varphi = F_\varphi$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r \quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = F_\varphi$$

F_r, F_φ - проекции силы на направление радиус-вектора и перпендикулярное ему направление в сторону увеличения полярного угла

<u>Пример 2</u>: оси естественного трехгранника (τ, n, b) $\qquad mw_\tau = F_\tau, mw_n = F_n, mw_b = F_b$

$$m\ddot{\sigma} = F_\tau \quad \frac{m}{\rho}\dot{\sigma}^2 = F_n \quad 0 = F_b$$

F_τ, F_n, F_b - проекции силы на касательную, главную нормаль и бинормаль

10. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

Первая задача динамики: зная закон движения точки, определить действующую на нее силу

Решается простым дифференцированием:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Пример 1: $\underline{x = a\sin(kt+\varepsilon), \quad y = b\sin(kt+\delta)+c}$

Проверить, что траектория - эллипс

$$F_x = -mk^2 a\sin(kt+\varepsilon), \quad F_y = -mk^2 b\sin(kt+\delta)$$

$$F_x = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y + mk^2 c$$

$$\mathbf{F} = -mk^2\mathbf{r} + mk^2 c\mathbf{j}$$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ $\quad$ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$-единичные векторы осей x, y

Движение происходит под действием силы притяжения, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию до него и постоянной силы, параллельной y

11. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

Пример 2: Материальная точка массы m движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью v. Под действием какой силы происходит это движение?

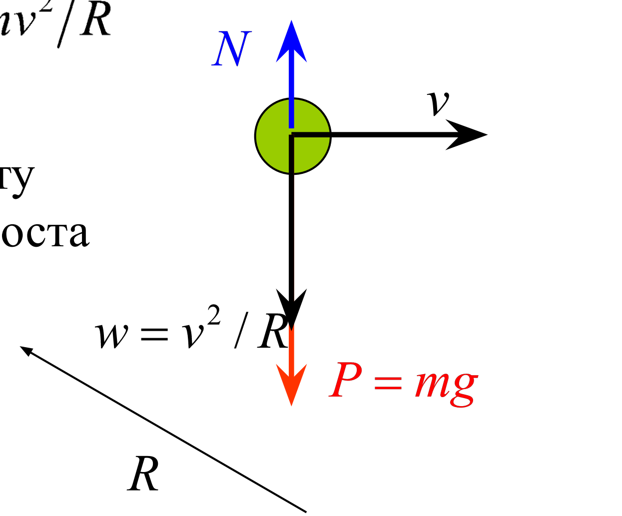
Способ 1. Движение задано естественным способом

$$m\underbrace{\ddot{\sigma}}_{0} = F_\tau \qquad \frac{m}{\rho}\underbrace{\dot{\sigma}^2}_{v^2} = F_n \qquad 0 = F_b \qquad \Rightarrow F_\tau = F_b = 0,\ F_n = mv^2/R$$

Движение происходит под действием силы, постоянной по модулю и направленной по радиусу к центру окружности

Способ 2. Полярные координаты $\quad r = R,\ v = r\dot{\varphi}$

$$m\underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)}_{v^2/R} = F_r \qquad m\frac{d}{dt}\underbrace{\left(r^2\dot{\varphi}\right)}_{Rv} = F_\varphi \qquad \Rightarrow F_\varphi = 0,\ F_r = mv^2/R$$



Автомобиль движется с постоянной скоростью v по мосту радиуса R. Найти силу реакции опоры в верхней точки моста

$$F_r = P - N \qquad N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$$

$$N = 0 \qquad v = 100\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 28\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \qquad r \approx 80\ \text{м}$$

12. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ

Вторая, или основная, задача динамики: зная действующие на точку силы, определить закон движения точки.

1) Если действующие на точку силы заданы, то уравнения движения

$$m\ddot{x} = F_x\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \quad m\ddot{y} = F_y\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \quad m\ddot{z} = F_z\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right)$$

представляют собой **системy трех дифференциальных уравнений второго порядка** относительно неизвестных функций x, y, z .

2) **Общий интеграл** (общее решение) этих уравнений содержит шесть произвольных постоянных

$$x = x\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \quad y = y\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \quad z = z\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right)$$

3) Константы $C_1,\ldots,C_6$ **определяются из начальных условий**, для чего должны быть заданы в начальный момент t=0 начальное положение и начальная скорость точки. Задача определения констант $C_1,\ldots,C_6$ сводится к разрешению системы уравнений

$$x_0 = x\left(0; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \quad y_0 = y\left(0; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \quad z_0 = z\left(0; C_1, C_2, \ldots, C_6\right)$$

$$v_{x0} = \dot{x}\left(0; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \quad v_{y0} = \dot{y}\left(0; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \quad v_{z0} = \dot{z}\left(0; C_1, C_2, \ldots, C_6\right)$$

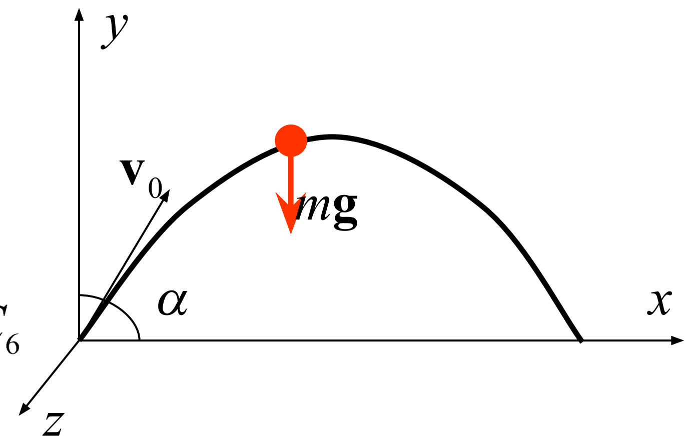
13. ПРИМЕР : ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg, \quad m\ddot{z} = 0$$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0$$

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2, \quad \dot{z} = C_3$$

$$x = C_1 t + C_4, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_5, \quad z = C_3 t + C_6$$



Н.У. при t=0

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha, \quad \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0 \\ C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

14. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вместо отыскания общего решения вида

$$x = X\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \qquad y = Y\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \qquad z = Z\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right)$$

$$\dot{x} = \dot{X}\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \qquad \dot{y} = \dot{Y}\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right) \qquad \dot{z} = \dot{Z}\left(t; C_1, C_2, \ldots, C_6\right)$$

можно искать **первые интегралы** уравнений движения, т. е. соотношения вида

$$\Phi\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, c\right) = 0 \qquad \text{или} \qquad f\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) = C$$

которые в силу уравнения движения имеют место при любых начальных условиях

Если общее решение известно, то разрешая (1) относительно C_i получаем 6 1-х интегралов

Наоборот, если известны 6 независимых 1-х интегралов, то разрешая уравнения

$$f_i\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) = C_i$$

относительно $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ приходим к общему решению.

Отыскание первых интегралов имеет еще то важное значение, что для решения ряда конкретных задач механики оказывается достаточным найти только некоторые из этих интегралов (иногда даже один), что существенно упрощает процесс решения.