

Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

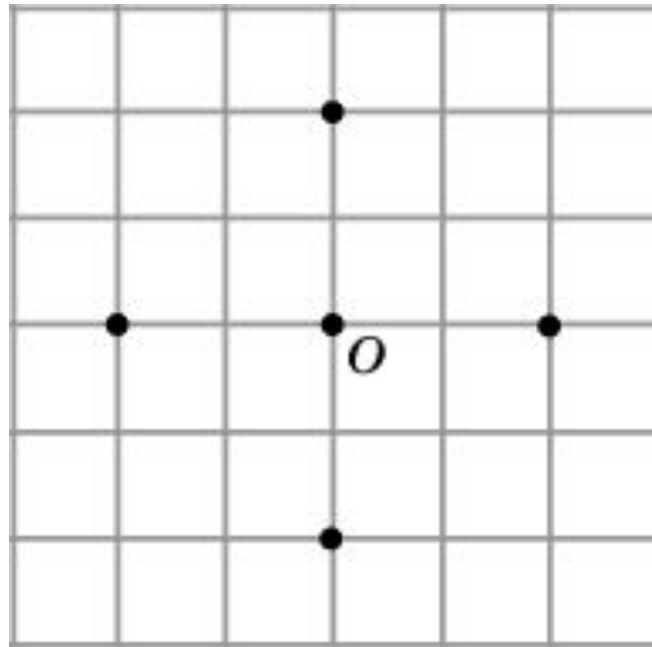
Примерами геометрических мест точек являются:

окружность – ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние;

круг – ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Упражнение 1

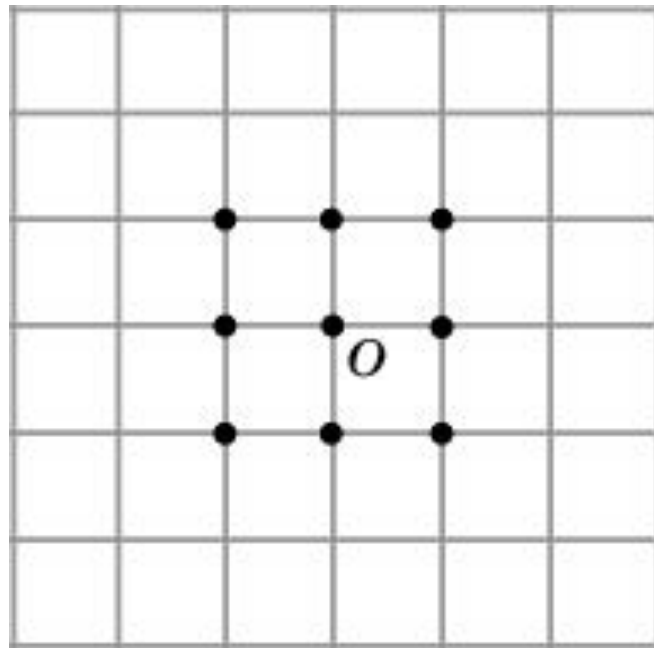
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и удаленные от точки O на расстояние, равное 2. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 2

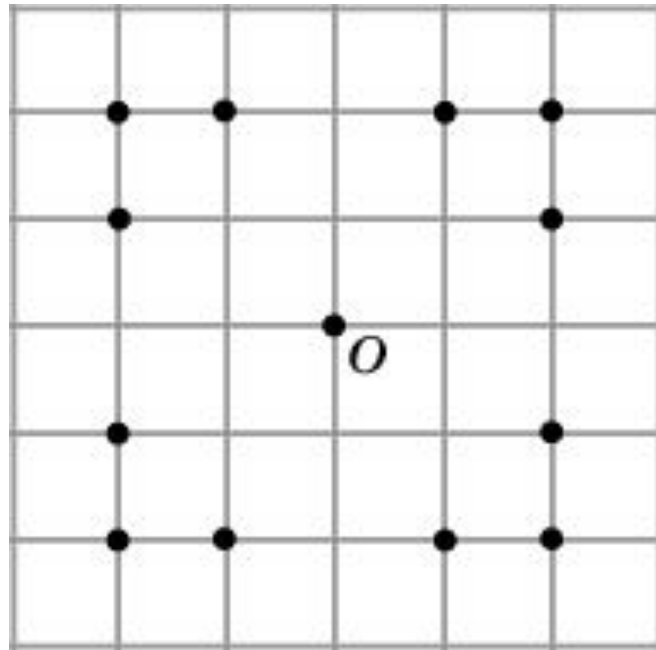
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и удаленные от точки O на расстояние, меньшее 2. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 3

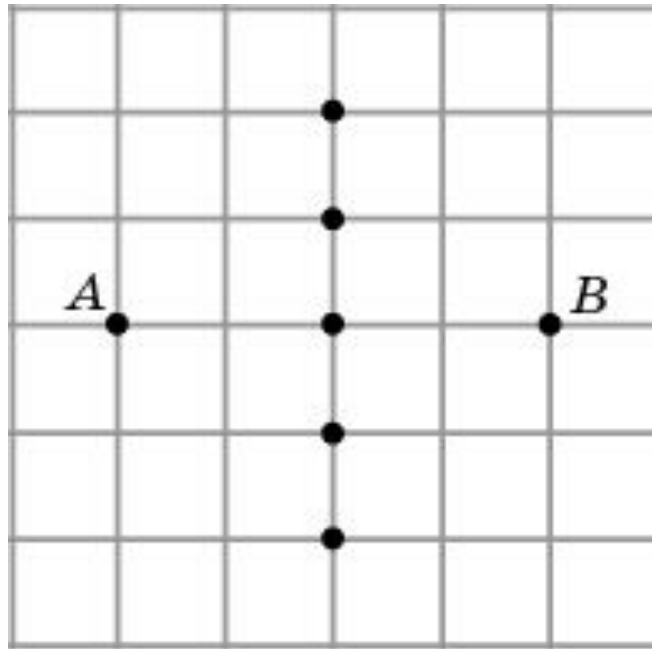
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и удаленные от точки O на расстояние, большее 2 и меньше 3. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 4

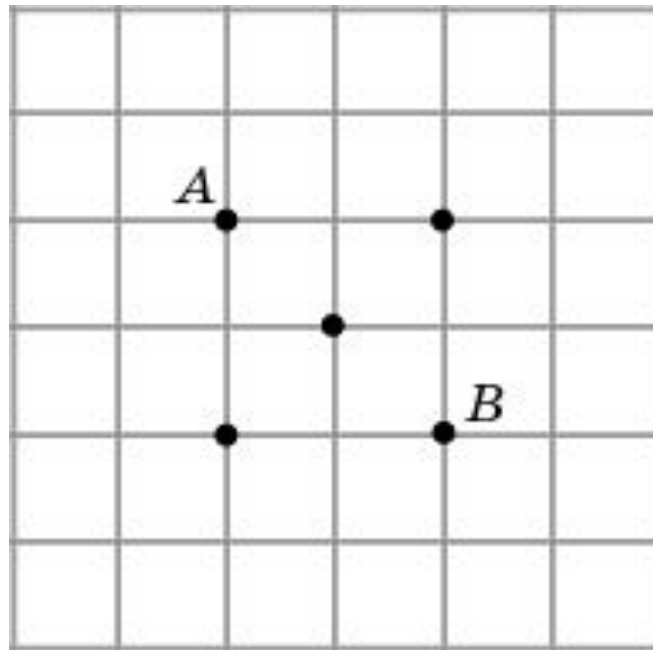
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояния от которых до точек A и B меньше трех. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 5

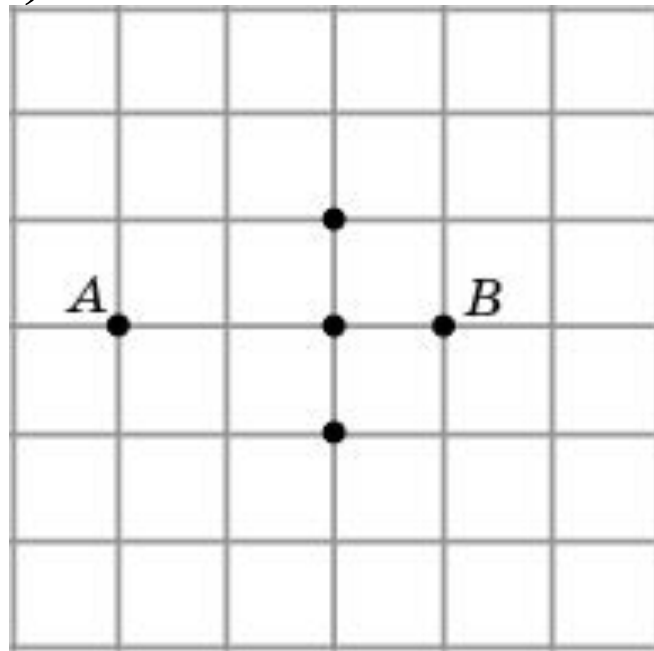
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояния от которых до точек A и B меньше или равны двум. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 6

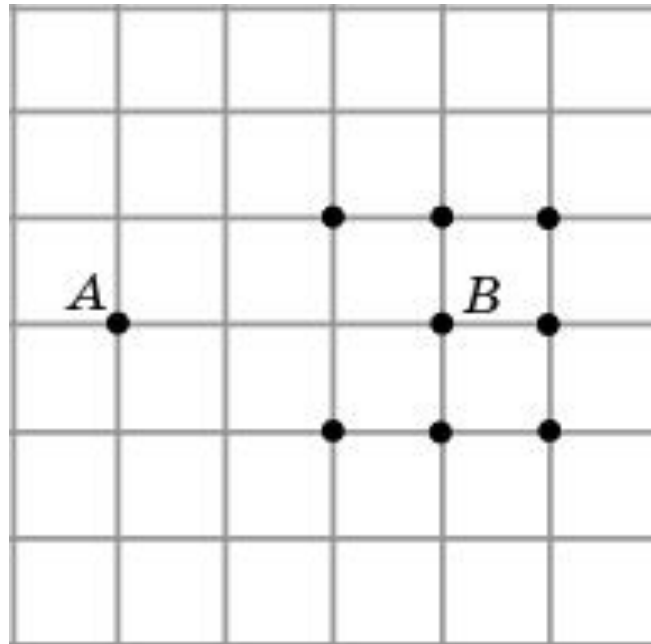
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояние от которых до точки A меньше трех, а расстояние до точки B меньше двух. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 7

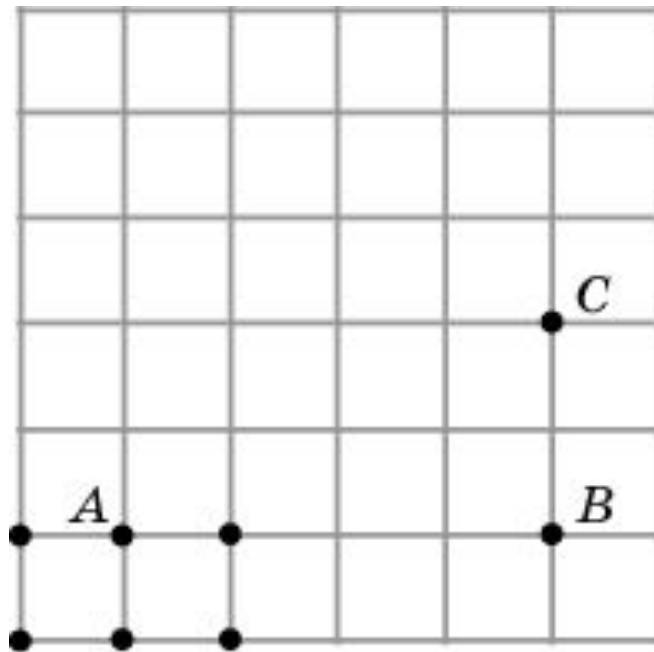
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояние от которых до точки A больше двух, а расстояние до точки B меньше двух. (Стороны клеток равны 1).



Ответ:

Упражнение 8

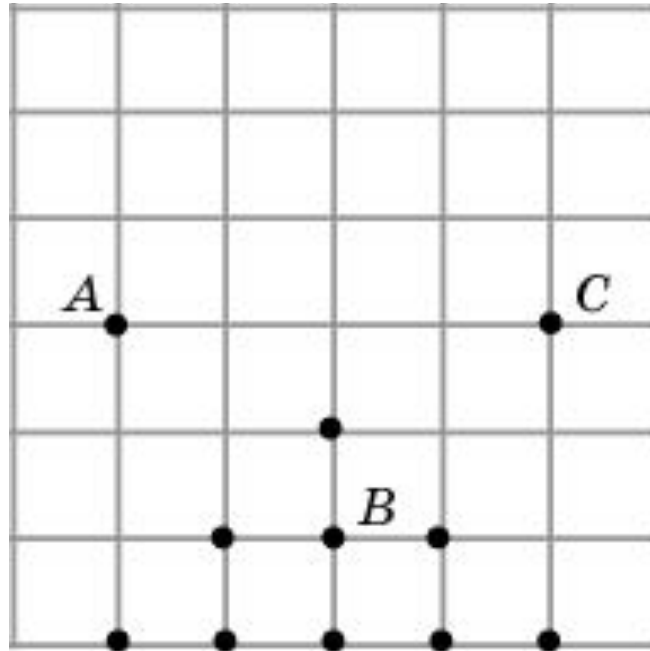
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояние от которых до точки A меньше, чем расстояние до точки B , и расстояние до точки B меньше, чем расстояние до точки C .



Ответ:

Упражнение 9

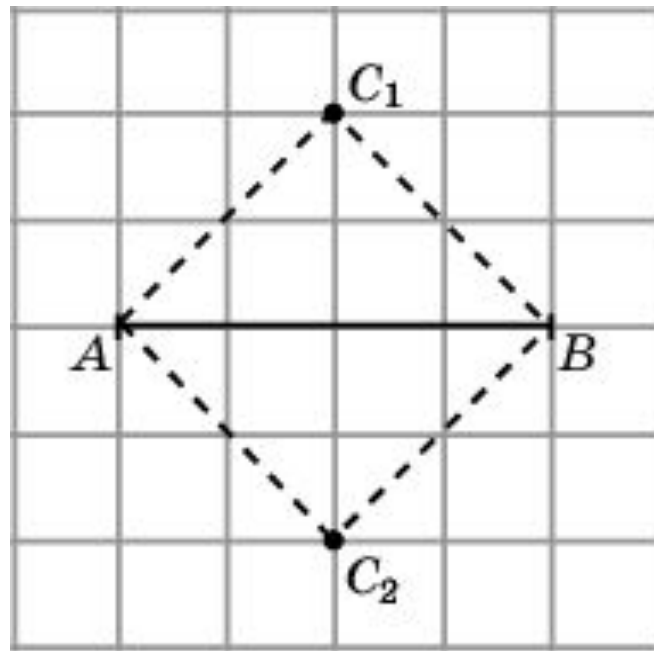
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояние от которых до точки A больше, чем расстояние до точки B , и расстояние до точки B меньше, чем расстояние до точки C .



Ответ:

Упражнение 10

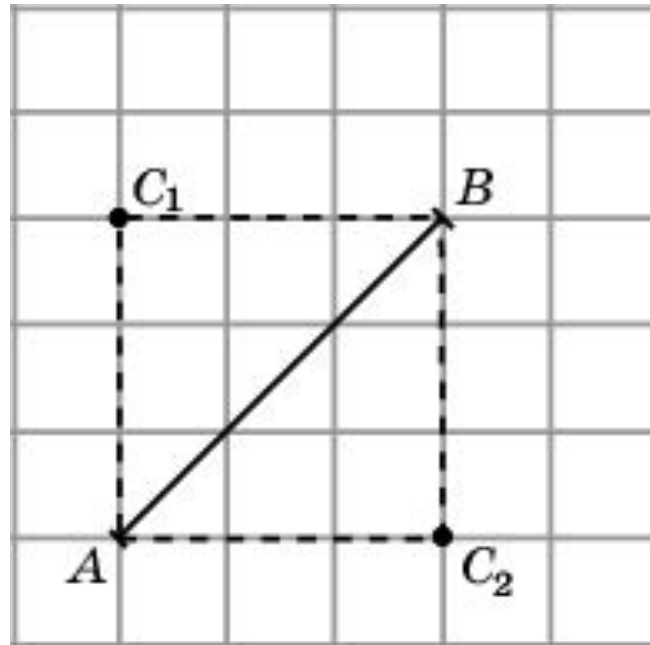
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 90° .



Ответ:

Упражнение 11

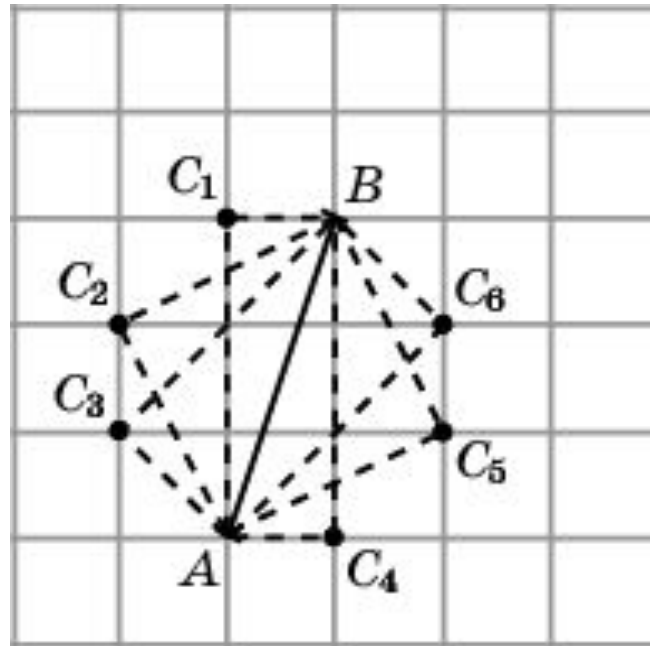
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 90° .



Ответ:

Упражнение 12

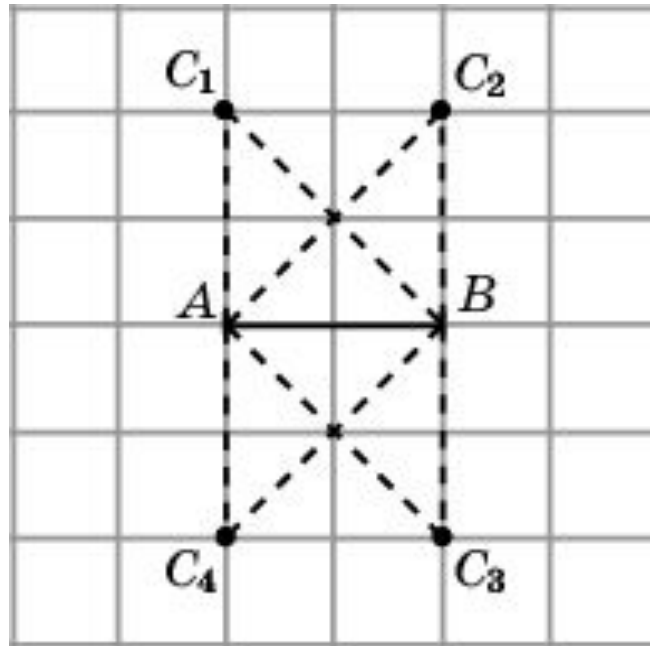
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 90° .



Ответ:

Упражнение 13

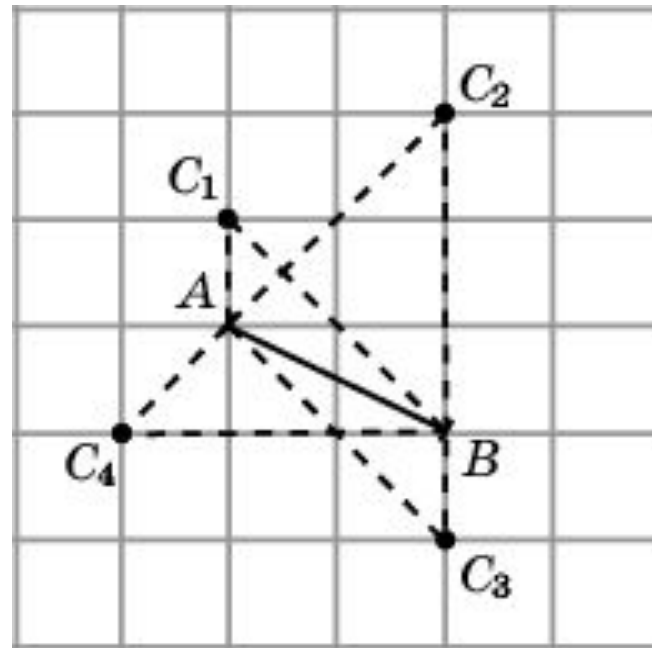
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 45° .



Ответ:

Упражнение 14

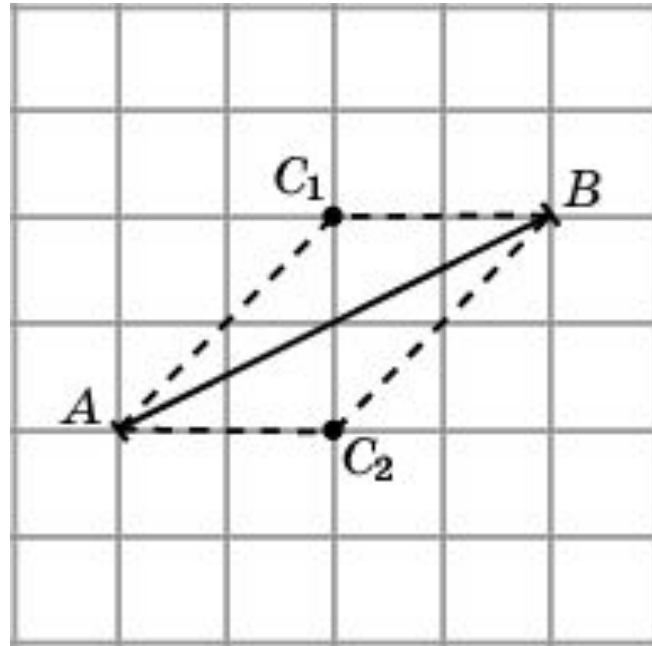
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 45° .



Ответ:

Упражнение 15

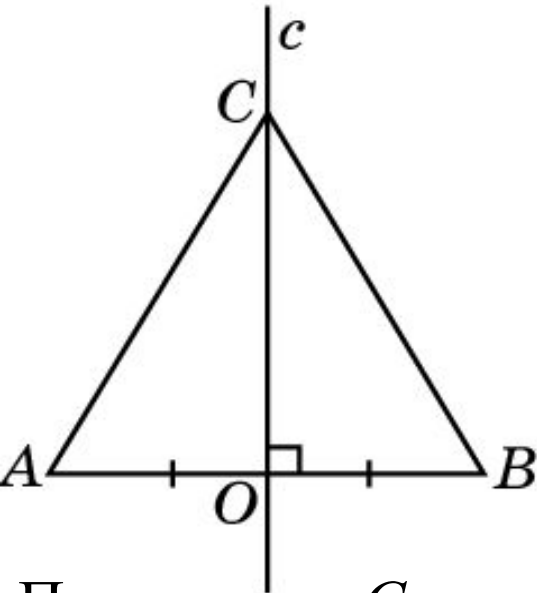
Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 135° .



Ответ:

Серединный перпендикуляр

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.



Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

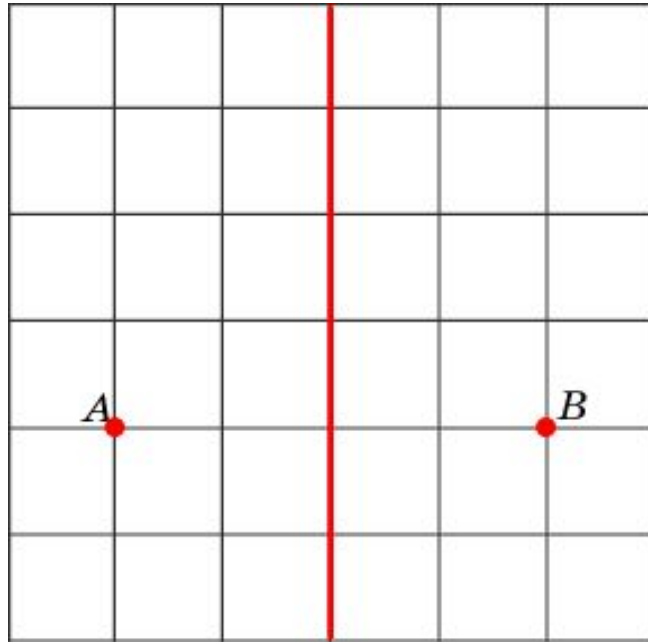
Доказательство. Пусть дан отрезок AB и точка O – его середина. Очевидно, точка O одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру.

Пусть точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O . Тогда треугольник ABC равнобедренный и CO – медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру.

Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с O , тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC=BC$.

Упражнение 1

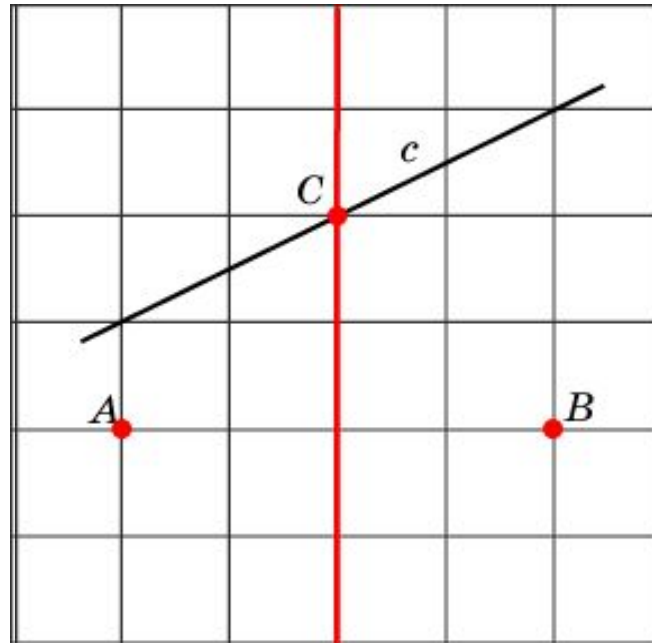
Изобразите ГМТ, равноудаленных от точек A и B .



Ответ:

Упражнение 2

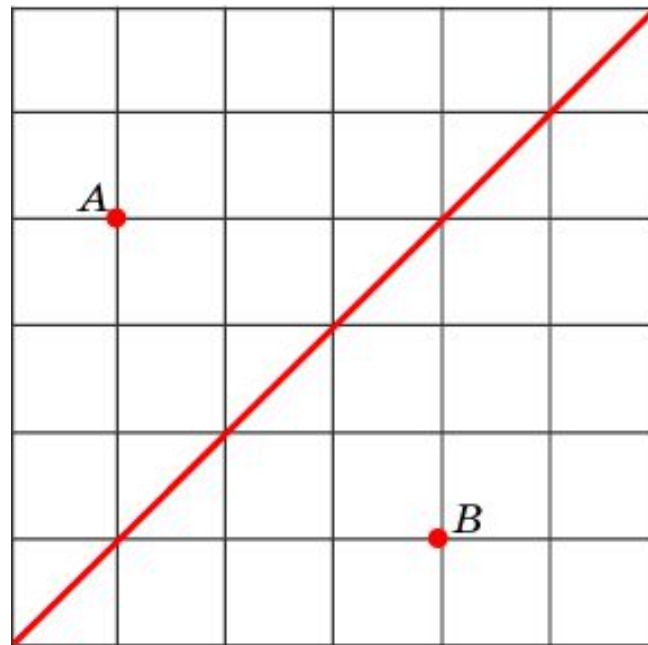
На прямой c изобразите точку C , равноудаленную от точек A и B .



Ответ:

Упражнение 3

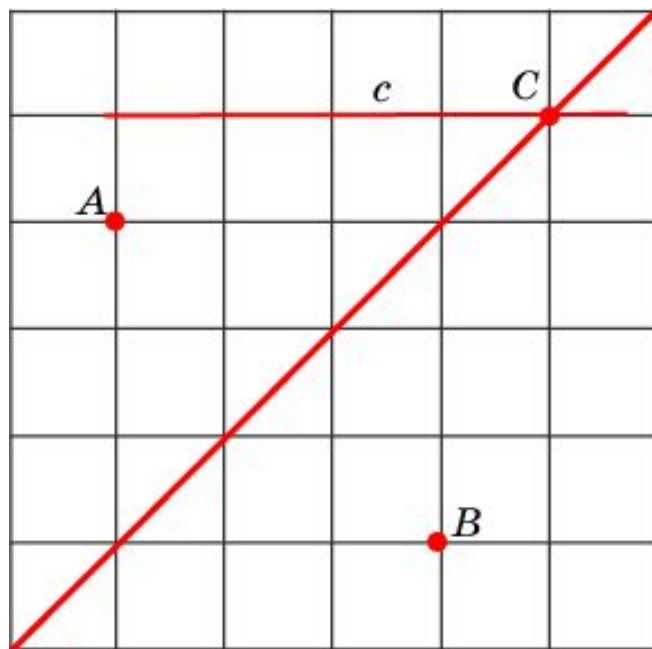
Изобразите ГМТ, равноудаленных от точек A и B .



Ответ:

Упражнение 4

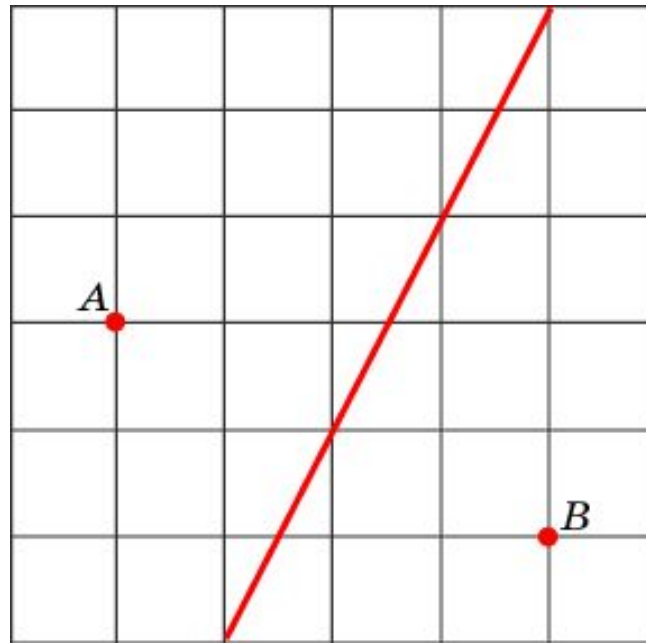
На прямой c изобразите точку C , равноудаленную от точек A и B .



Ответ:

Упражнение 5

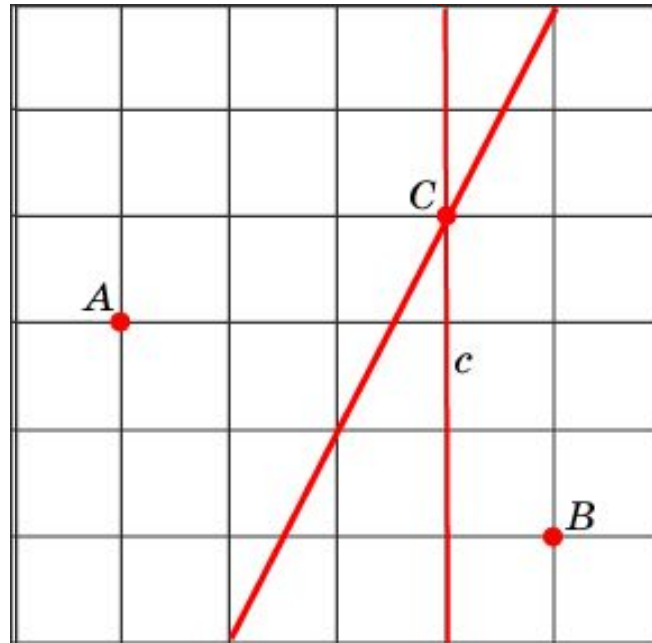
Изобразите ГМТ, равноудаленных от точек A и B .



Ответ:

Упражнение 6

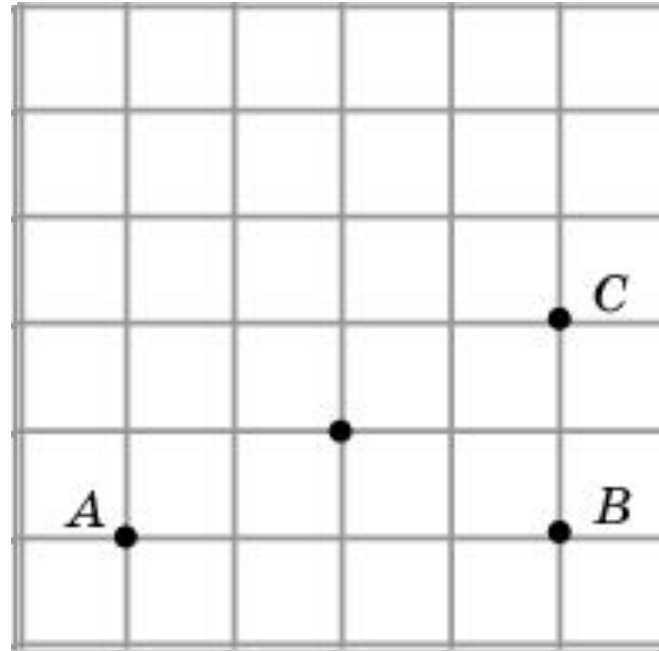
На прямой c изобразите точку C , равноудаленную от точек A и B .



Ответ:

Упражнение 7

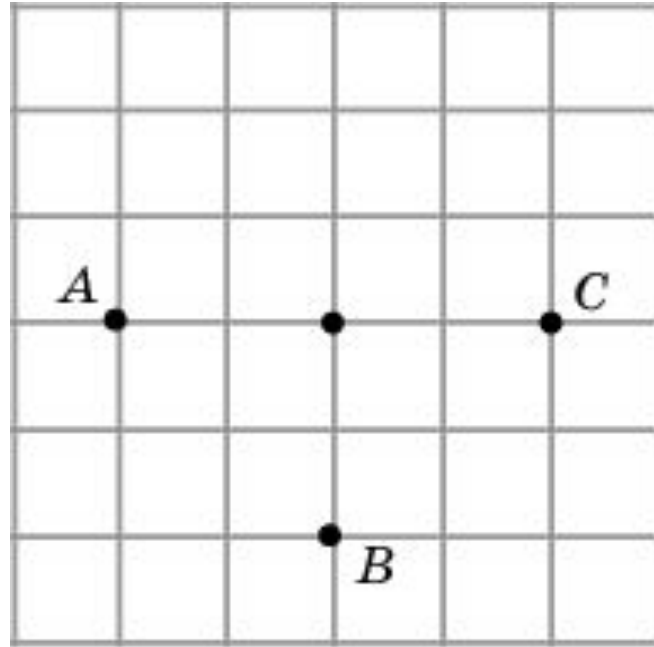
Отметьте точку, равноудаленную от точек A , B и C .



Ответ:

Упражнение 8

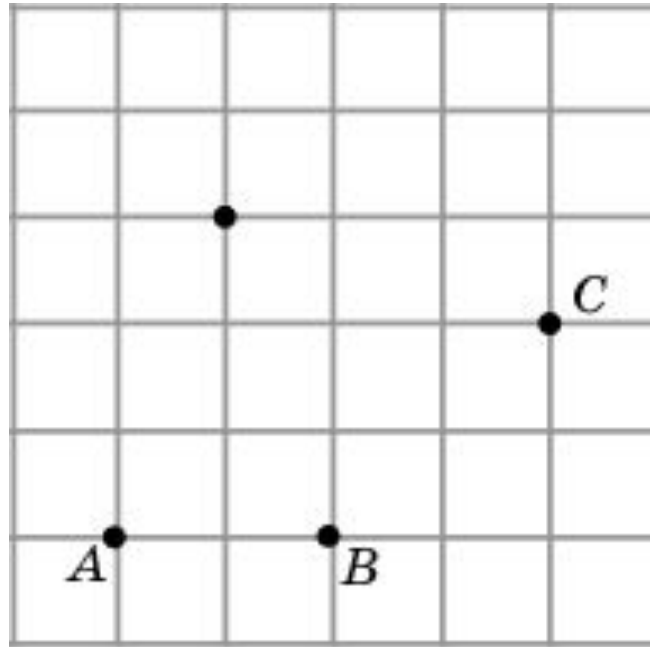
Отметьте точку, равноудаленную от точек A , B и C .



Ответ:

Упражнение 9

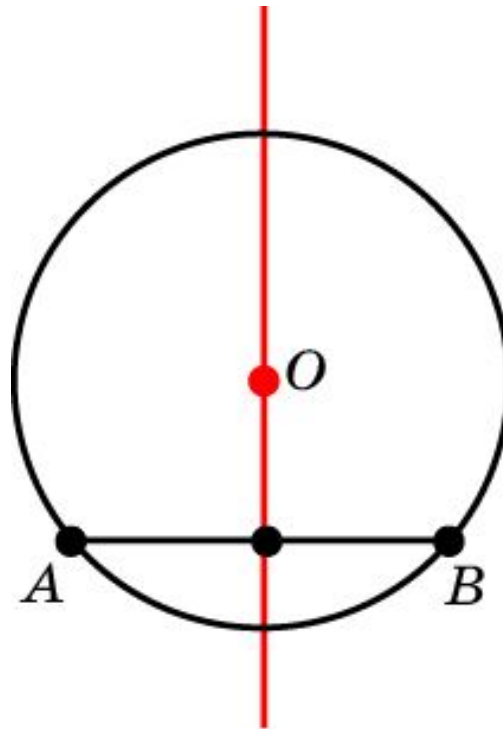
Отметьте точку, равноудаленную от точек A , B и C .



Ответ:

Упражнение 10

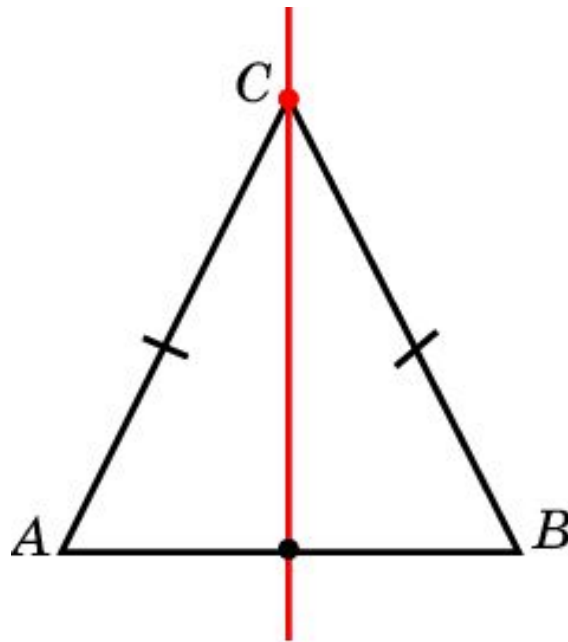
Изобразите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.



Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две данные точки.

Упражнение 11

Изобразите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB .

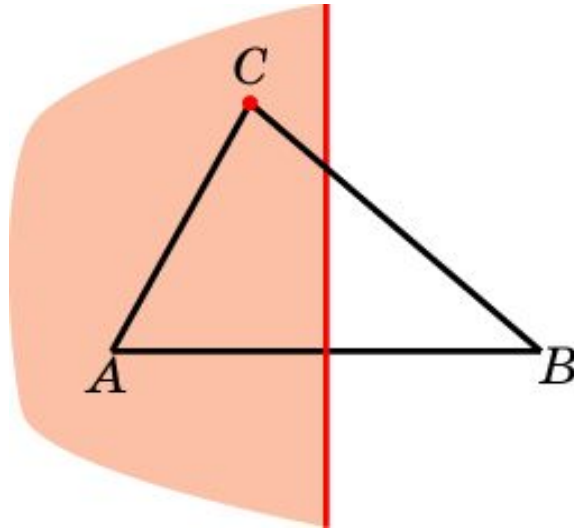


Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку AB без середины этого отрезка.

Упражнение 12

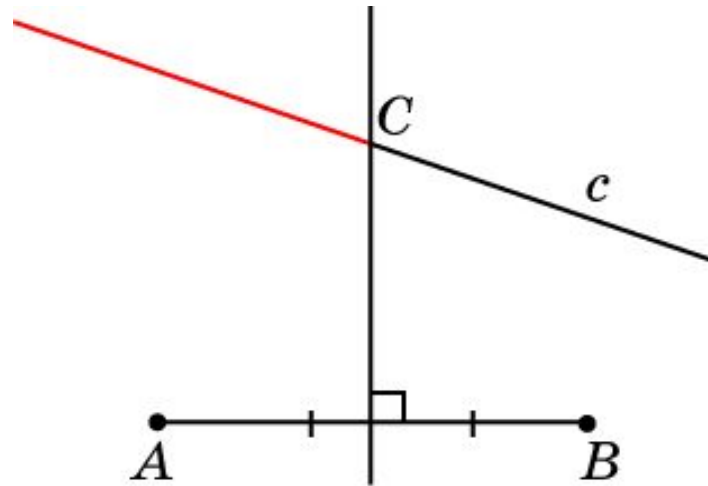
Пусть A и B - точки плоскости. Укажите геометрическое место точек C , для которых $AC = BC$.

Ответ: Полуплоскость, определяемая серединным перпендикуляром к отрезку AB , содержащая точку A .



Упражнение 13

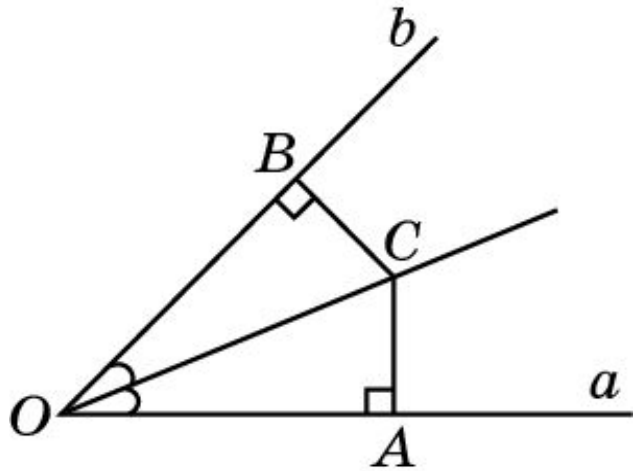
Пусть A и B точки плоскости, c - прямая. Укажите геометрическое место точек прямой c , расположенных ближе к A , чем к B . В каком случае таких точек нет?



Ответ: Часть прямой c , лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку AB и точкой A . Если прямая c целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой B , то таких точек нет.

Биссектриса угла

Теорема. Биссектриса угла является ГМТ, лежащих внутри этого угла и одинаково удаленных от его сторон.

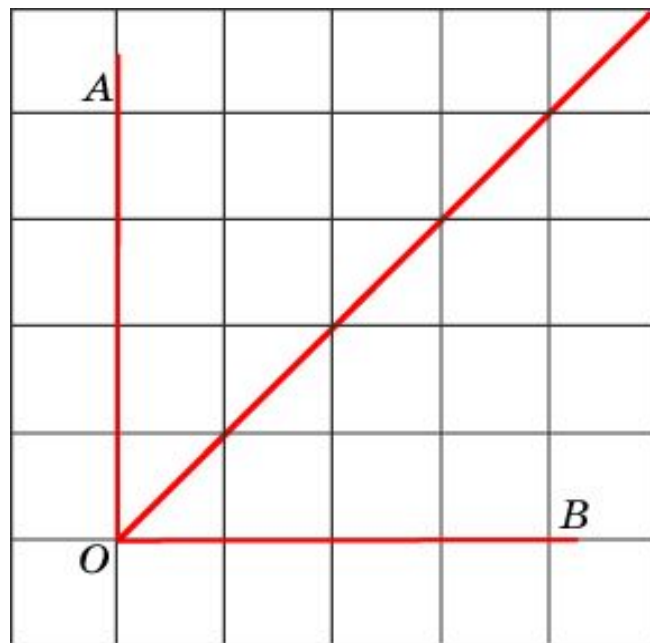


Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a , b . Пусть точка C лежит внутри данного угла. Опустим из нее перпендикуляры CA и CB на стороны a и b .

Если $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла. Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла.

Упражнение 1

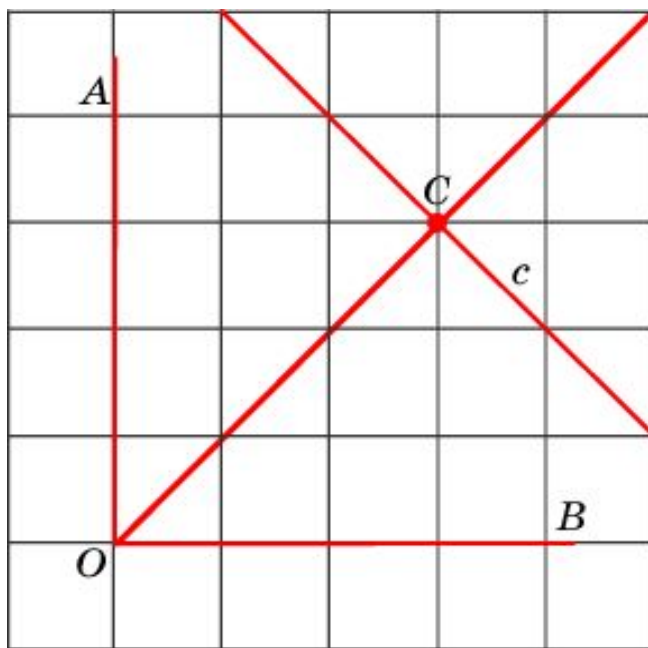
Изобразите геометрическое место внутренних точек угла AOB , равноудаленных от его сторон.



Ответ:

Упражнение 2

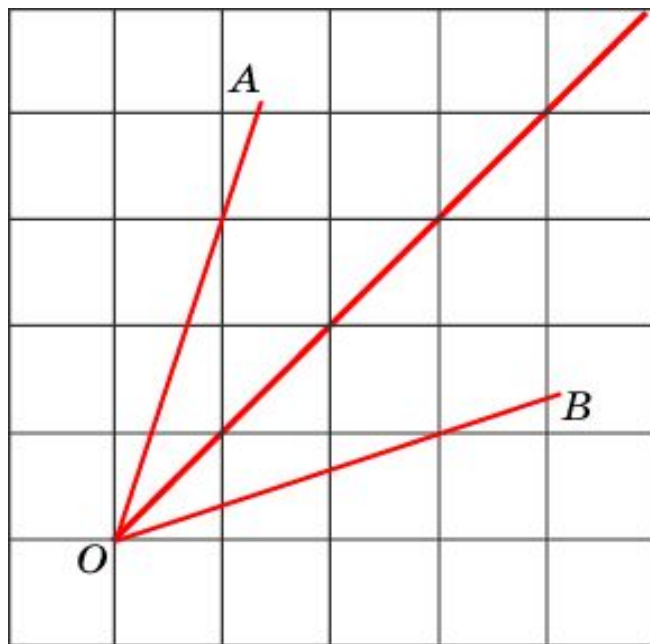
На прямой c отметьте точку C , равноудаленную от сторон угла AOB .



Ответ:

Упражнение 3

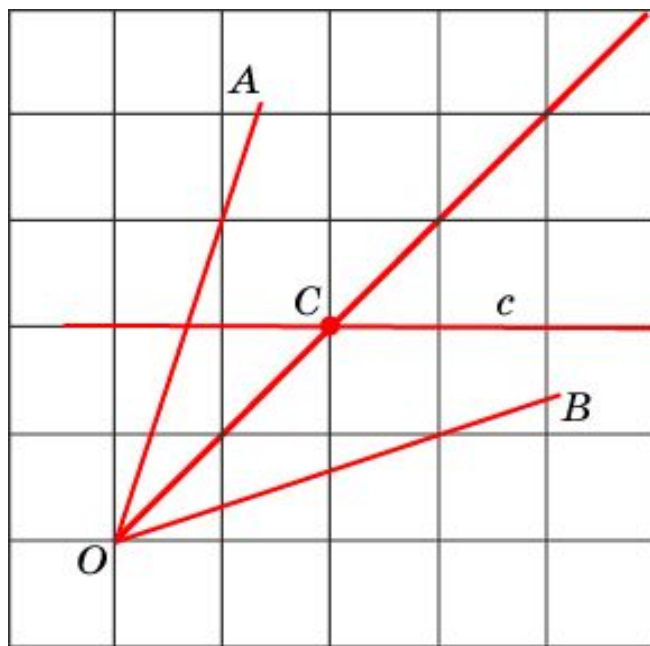
Изобразите геометрическое место внутренних точек угла AOB , равноудаленных от его сторон.



Ответ:

Упражнение 4

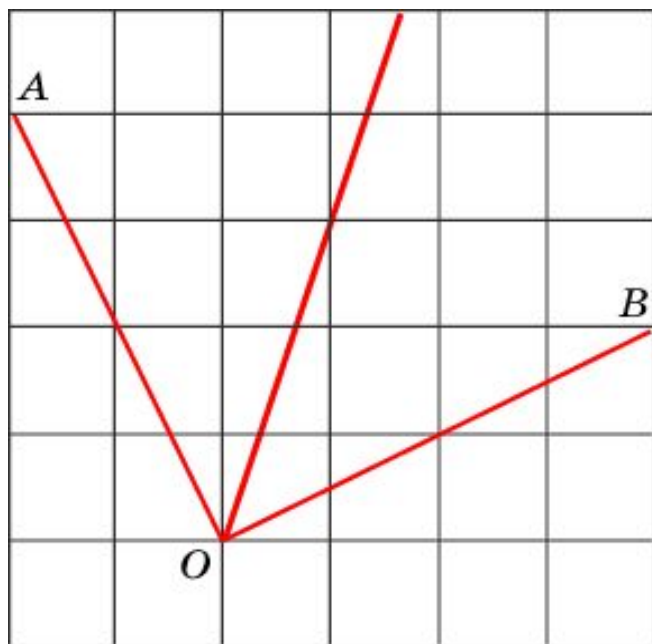
На прямой c отметьте точку C , равноудаленную от сторон угла AOB .



Ответ:

Упражнение 5

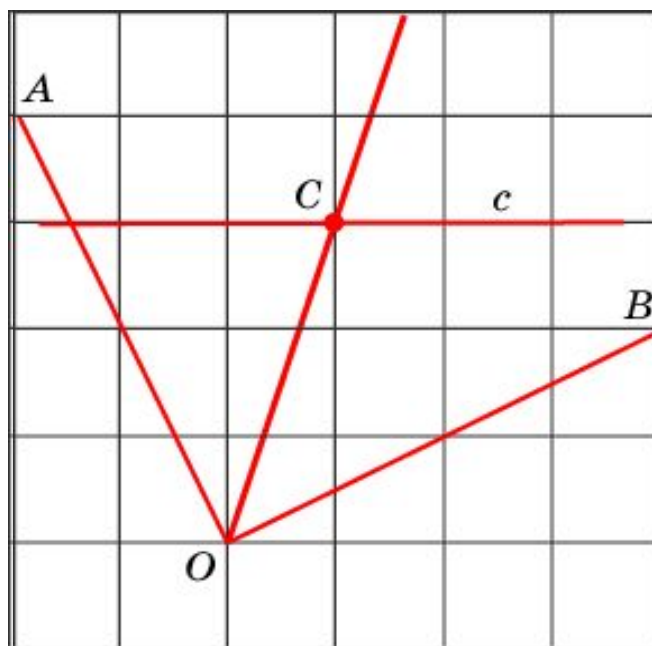
Изобразите геометрическое место внутренних точек угла AOB , равноудаленных от его сторон.



Ответ:

Упражнение 6

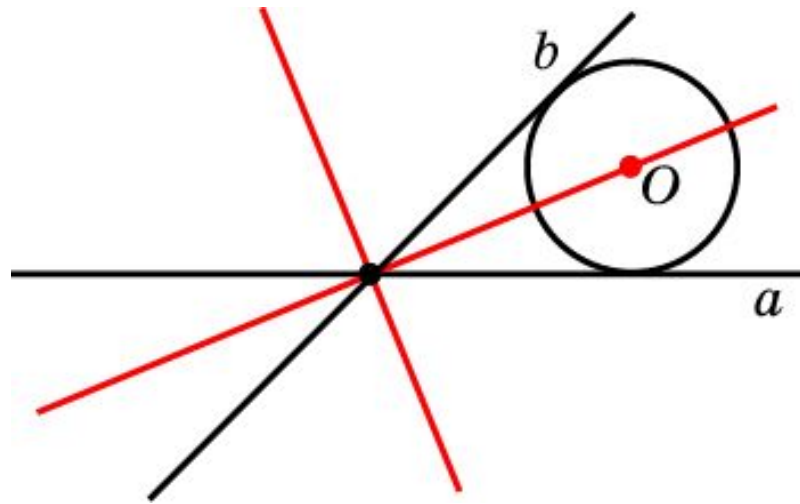
На прямой c отметьте точку C , равноудаленную от сторон угла AOB .



Ответ:

Упражнение 7

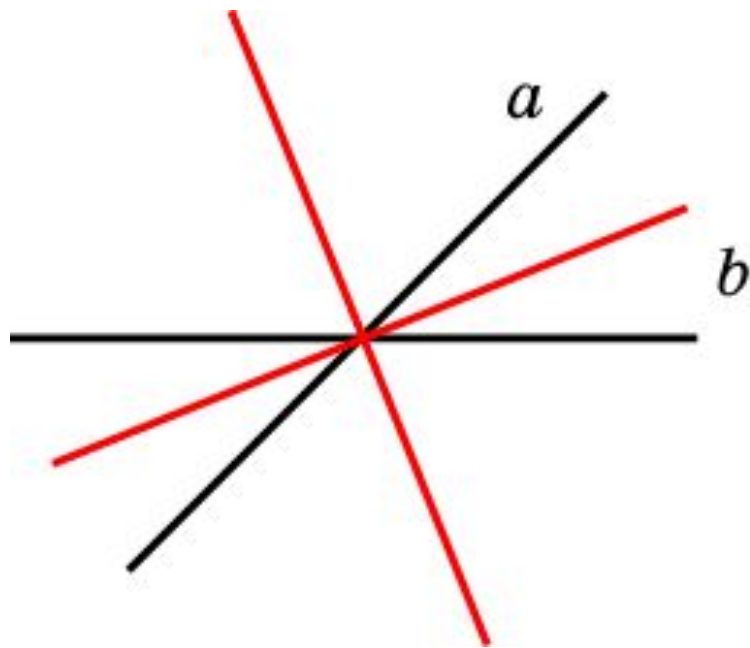
Что является геометрическим местом центров окружностей касающихся двух данных пересекающихся прямых?



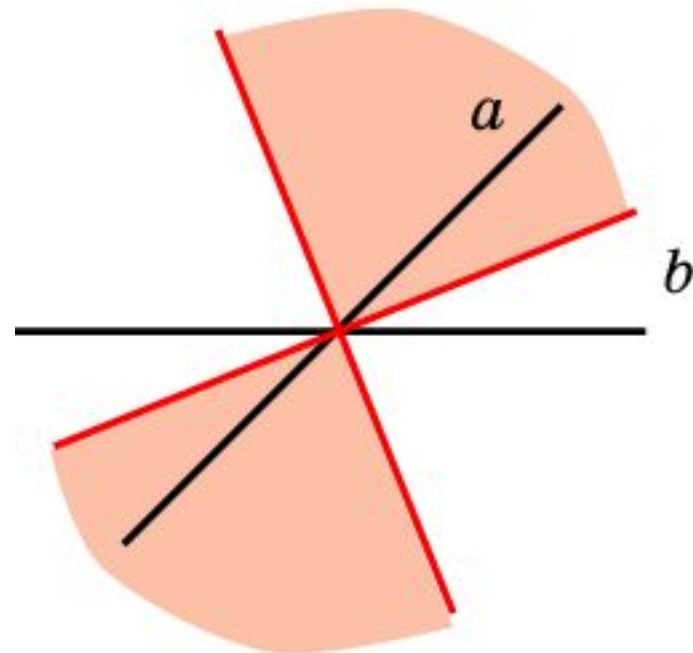
Ответ: Биссектрисы углов, образующихся при пересечении данных прямых, без точки пересечения этих прямых.

Упражнение 8

Пусть a и b - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удаленных от a и b ; б) расположенных ближе к a , чем к b .



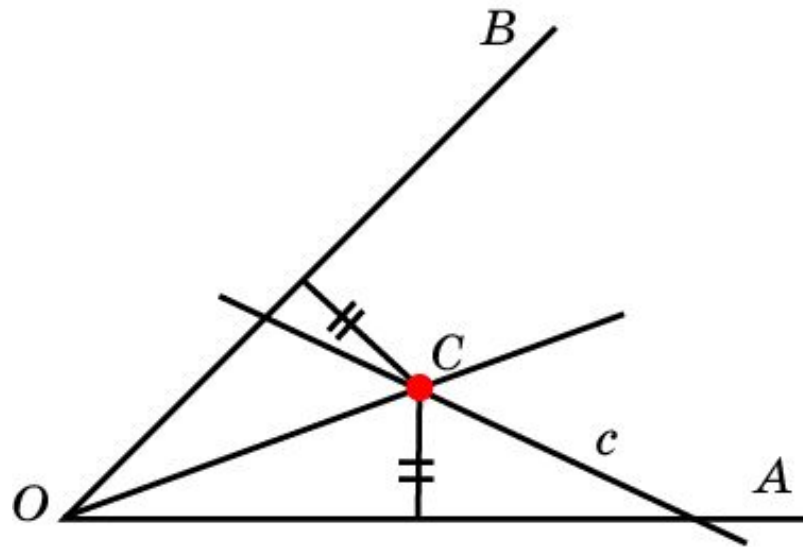
Ответ: а) Точки, принадлежащие биссектрисам четырех углов, образованных данными прямыми;



б) внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами.

Упражнение 9

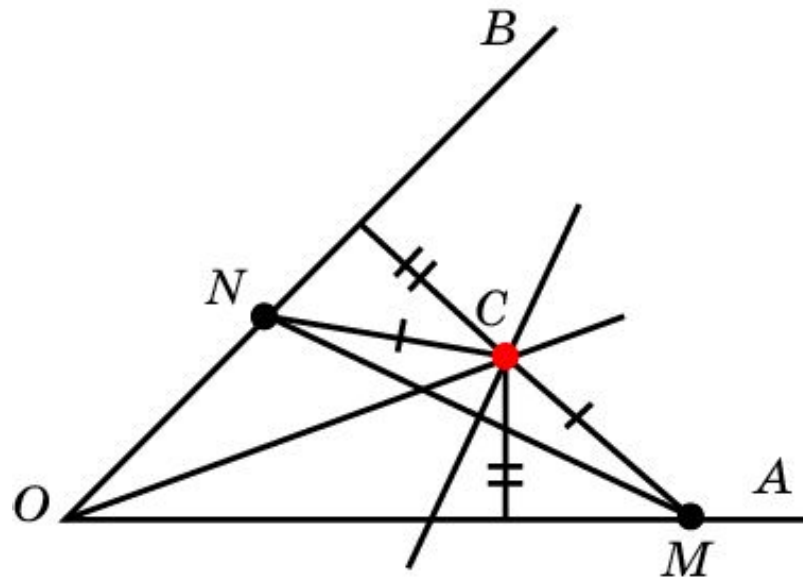
На прямой c , пересекающей стороны угла, найдите точку C , одинаково удаленную от этих сторон.



Ответ: Точка пересечения данной прямой c биссектрисой данного угла.

Упражнение 10

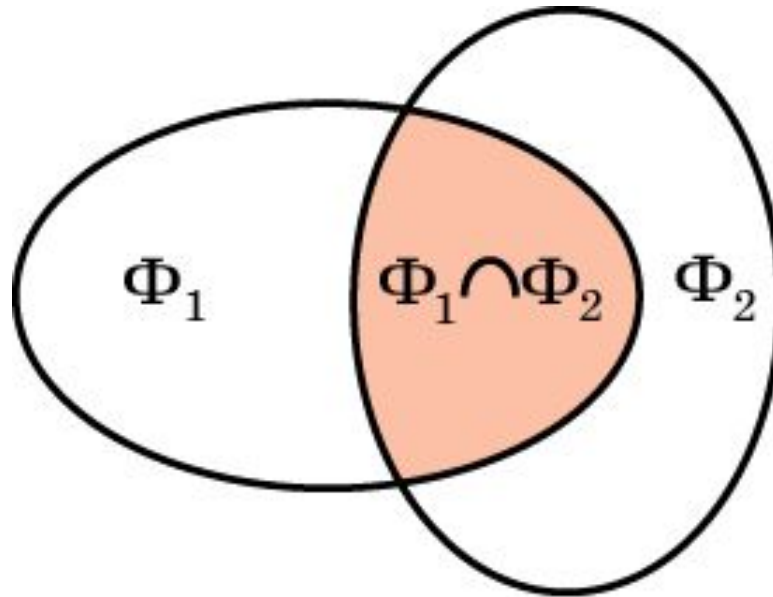
Дан угол AOB и точки M, N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.



Ответ: Точка пересечения серединного перпендикуляра к MN с биссектрисой угла.

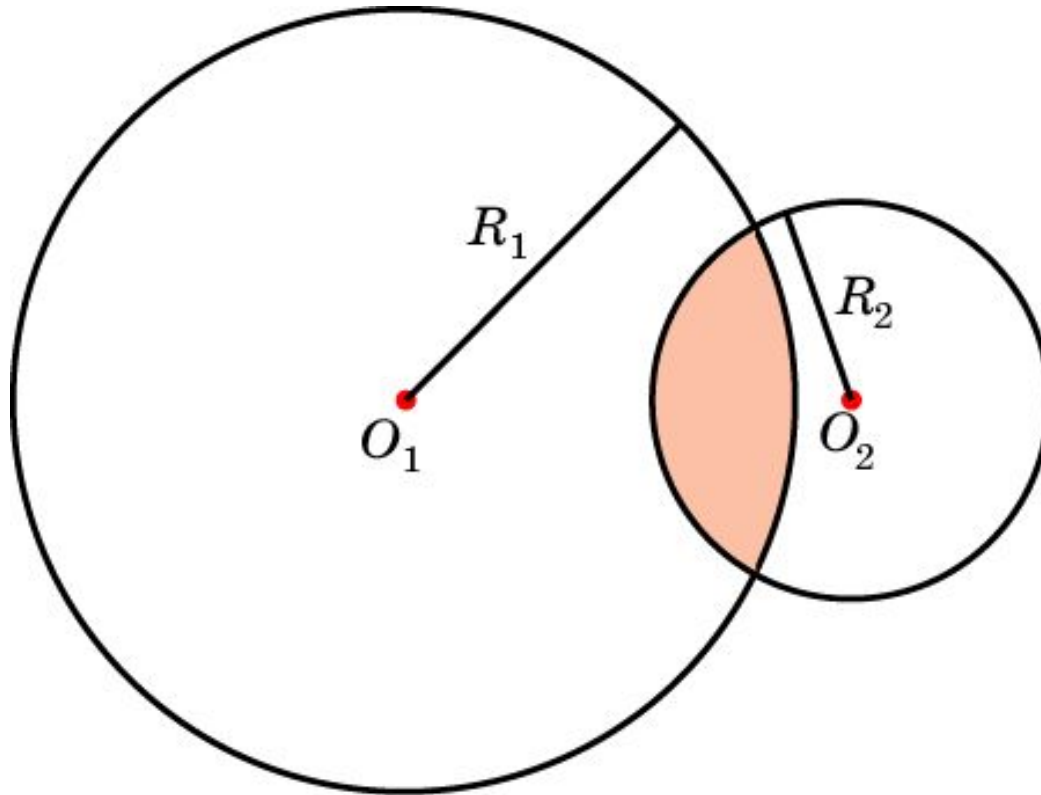
Пересечение фигур

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости. Фигура Φ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре Φ_1 и фигуре Φ_2 , называется пересечением фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначается $\Phi_1 \cap \Phi_2$.



Упражнение 1

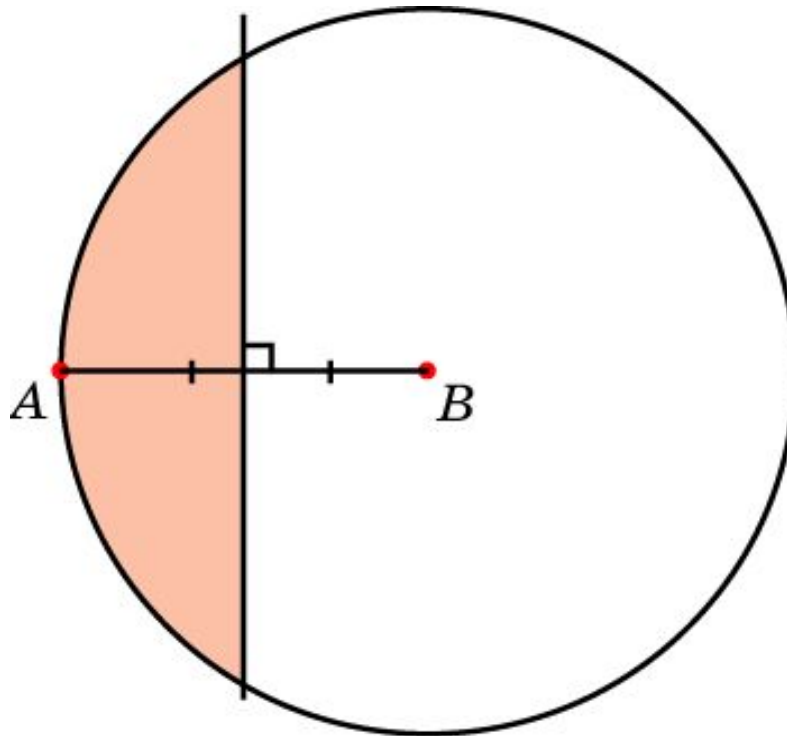
Даны две точки O_1 и O_2 . Найдите ГМТ X , для которых $XO_1 \leq R_1$ и $XO_2 \leq R_2$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением двух кругов с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами R_1 , R_2 .

Упражнение 2

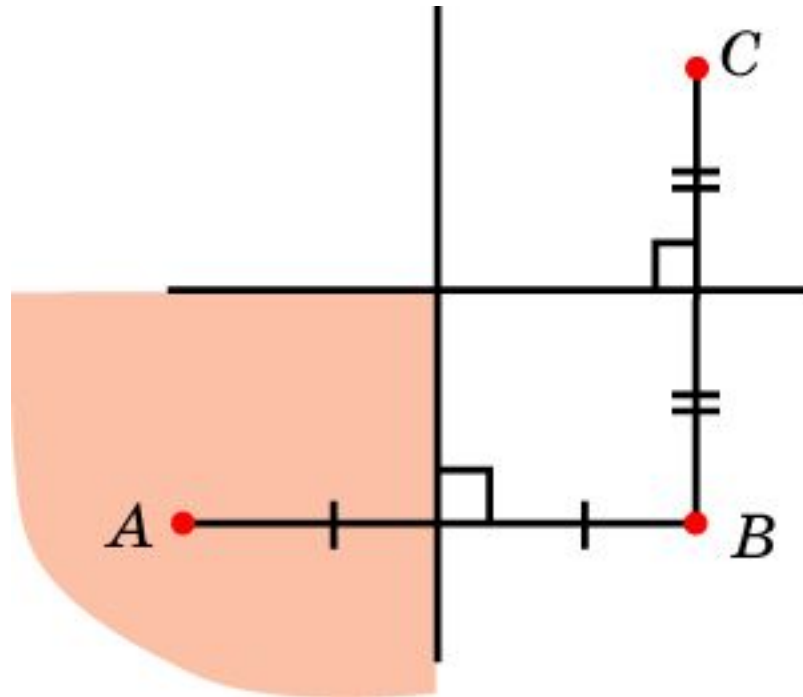
Даны две точки A и B . Найдите ГМТ C , для которых $CA \leq CB \leq AB$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением круга и полуплоскости.

Упражнение 3

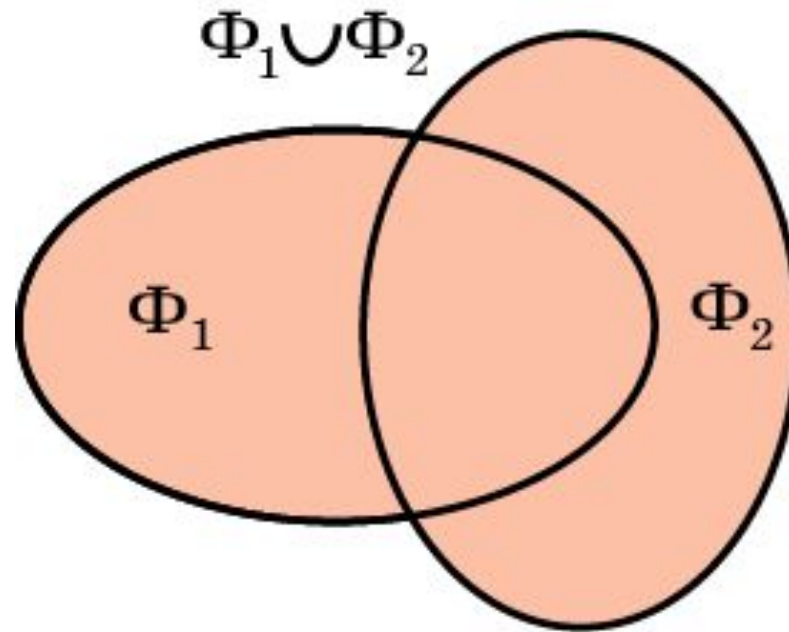
Даны три точки A , B , C . Найдите ГМТ X , для которых $AХ$
 $BХ$ и $CХ$. Пересечением каких фигур является
искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением двух
полупространств, определяемых серединными
перпендикулярами к отрезкам AB и BC .

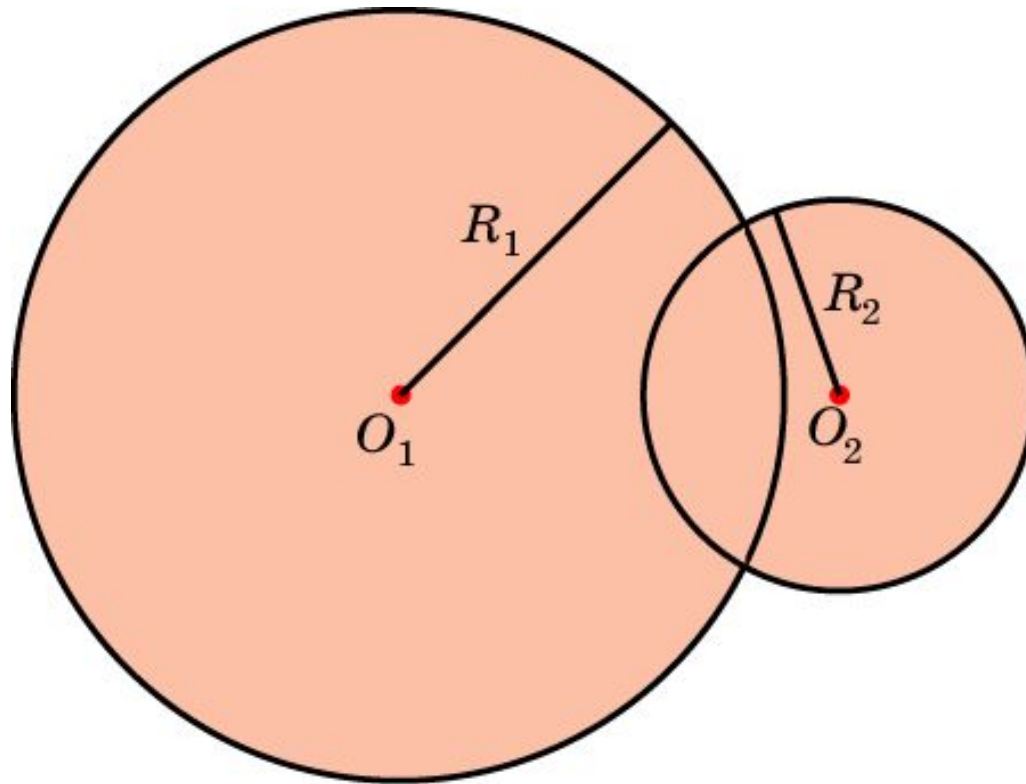
Объединение фигур

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости. Фигура Φ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре Φ_1 или фигуре Φ_2 , называется объединением фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначается $\Phi_1 \cup \Phi_2$.



Упражнение 1

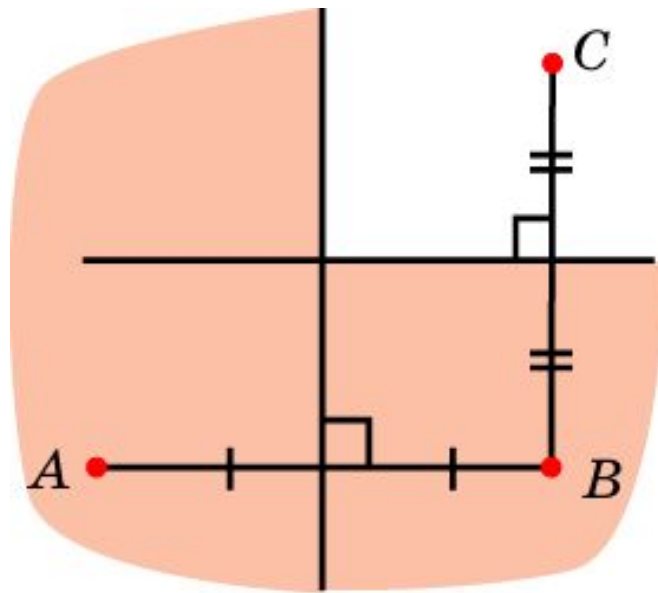
Даны две точки O_1 и O_2 . Найдите ГМТ X , для которых $XO_1 \leq R_1$ или $XO_2 \leq R_2$. Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является объединением двух кругов с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами R_1 , R_2 .

Упражнение 2

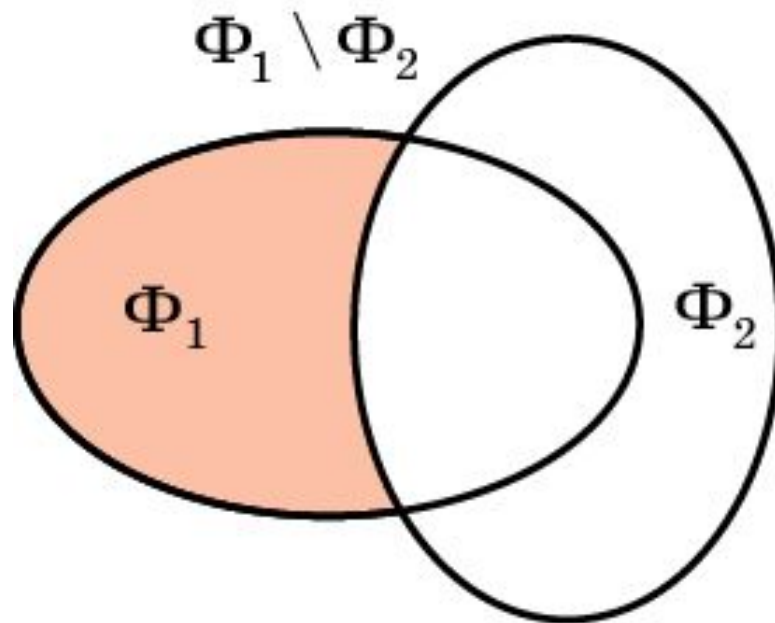
Даны три точки A , B , C . Найдите ГМТ X , для которых $AХ$ $BХ$ или $BХ$ $CХ$. Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является объединением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам AB и BC .

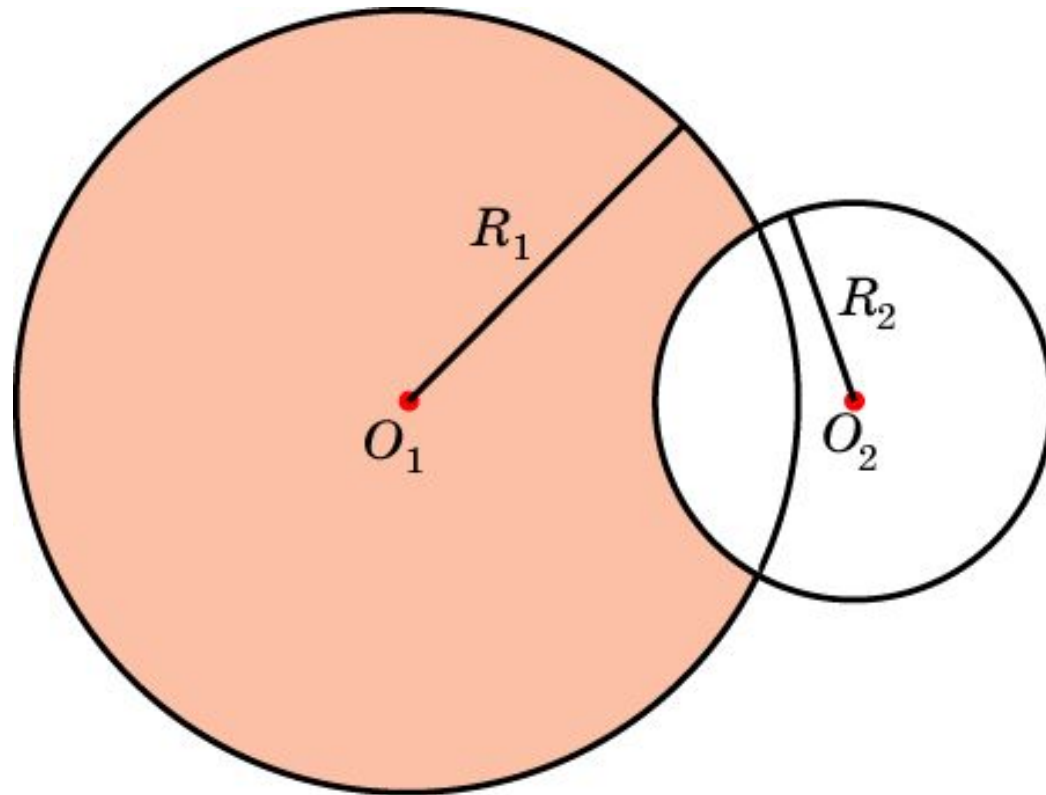
Разность фигур

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости. Фигура Φ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре Φ_1 и не принадлежащих фигуре Φ_2 , называется разностью фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначается $\Phi_1 \setminus \Phi_2$.



Упражнение 1

Даны две точки O_1 и O_2 . Найдите ГМТ X , для которых $XO_1 \leq R_1$ и $XO_2 \geq R_2$. Разностью каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является разностью двух кругов с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами R_1 , R_2 .