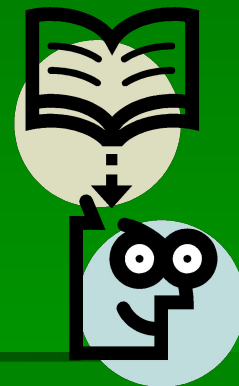


Открытый урок по алгебре и началам анализа. 10 класс.

Методы решения иррациональных уравнений





Урок-семинар

- **Цель:**

Обобщить знания учащихся по данной теме, продемонстрировать различные методы решения иррациональных уравнений, показать умение учащихся подходить к решению уравнений с исследовательской позиции.



«Я слышу –

я забываю,

я вижу –

я запоминаю,

я делаю –

я понимаю.»»

Способ I. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой

- Иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=4^2$$

$$2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=16-6x+2,$$

$$2\sqrt{8x^2+2x-12x-3}=18-6x,$$

$$\sqrt{8x^2-10x-3}=9-3x,$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$8x^2-10x-3=(9-3x)^2,$$

$$8x^2-10x-3=81-54x+9x^2,$$

$$x^2-44x+84=0,$$

- По теореме Виета:

$$x^2-44x+84=0,$$

$$x_1+x_2=44,$$

$$x_1 \cdot x_2=84,$$

$$x_1=42, x_2=2.$$



Проверка:



- 1). Если $x=42$, то

$$\sqrt{2 \cdot 42 - 3} + \sqrt{4 \cdot 42 + 1} = 4,$$

$$\sqrt{81} + \sqrt{169} = 4,$$

$$9 + 13 = 4,$$

$$22 = 4, \text{ неверно}$$

Значит, число 42 не является корнем уравнения.

- 2). Если $x=2$, то

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{8+1} = 4,$$

$$1+3 = 4,$$

$$4 = 4, \text{ верно}$$

Значит, число 2 является корнем уравнения.

Ответ: 2

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой

Достоинства

1. Понятно
2. Доступно



Недостатки

1. Словесная запись
2. Громоздкая проверка иногда занимает много времени и места

■ Вывод:

При решении иррациональных уравнений методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень необходимо вести словесную запись, что делает решение понятным и доступным. Однако обязательная проверка иногда бывает громоздкой и занимает много времени. Этот метод можно использовать для несложных иррациональных уравнений, содержащих 1-2 радикала.



Способ II.

Метод равносильных преобразований

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=4^2, \\ 2x-3 \geq 0, \\ 4x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2x-3)(4x+1)} = 16-6x+2, \\ x \geq 1,5, \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{8x^2+2x-12x-3} = 18-6x, \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8x^2-10x-3} = 9-3x, \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-10x-3 = (9-3x)^2, \\ x \geq 1,5, \\ 9-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-10x-3 = 81-54x+9x^2, \\ x \geq 1,5, \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-44x+84 = 0, \\ 1,5 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 42, \\ x = 2, \\ 1,5 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.



Метод равносильных преобразований

Достоинства

1. Отсутствие словесного описания
2. Нет проверки
3. Четкая логическая запись
4. Последовательность равносильных переходов

Недостатки

1. Громоздкая запись
2. Можно ошибиться при комбинации знаков системы и совокупности и получить неверный ответ

Вывод

При решении иррациональных уравнений методом равносильных переходов нужно четко знать, когда ставить знак системы, а когда совокупности. Громоздкость записи, различные комбинации знаков системы и совокупности не редко приводят к ошибкам. Однако, последовательность равносильных переходов, четкая логическая запись без словесного описания, не требующая проверки, являются бесспорными плюсами данного способа.

Способ III

Функционально графический метод

Решение.

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1}$$

Рассмотрим степенные функции

$$y = \sqrt{2x-3}$$

$$y = 4 - \sqrt{4x+1}$$

Найдем область определения функций

$$2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1,5.$$

$$4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}.$$

$$D(x) = [1,5; \infty)$$

$$D(x) = \left[-\frac{1}{4}; \infty\right)$$

Составим таблицы значений x и y :

x	1,5	2	6
y	0	1	3

x	-0,25	0	2	6
y	4	3	1	-1

Функционально графический метод

Построим данные графики функции в одной системе координат.
Графики функции пересекаются в точке с абсциссой $x=2$.

Ответ: 2

Функционально графический метод

Достоинства

1. Наглядность
2. Если ответ точный, то нужна проверка.

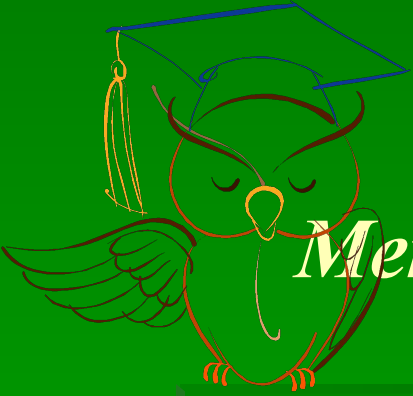
Недостатки

1. Словесная запись
2. Ответ может быть приближённым, не точным.

■ Вывод:

Функционально графический метод – это наглядный метод, но применять его лучше тогда, когда легко можно построить графики рассматриваемых функций и получить точный ответ. Если ответ приближенный, то лучше воспользоваться другим методом.





Способ IV

Метод введения новых переменных

- Введем новые переменные, обозначив

$$\sqrt{2x-3} = a$$

$$\sqrt{4x+1} = b$$

Получим первое уравнение системы: $a+b=4$.

Составим второе уравнение системы:

$$\sqrt{2x-3} = a, \quad a^2 = 2x-3, \quad 2a^2 = 4x-6, \quad 2a^2 - b^2 = -7 \quad a \geq 0,$$

$$\sqrt{4x+1} = b, \quad b^2 = 4x+1, \quad b^2 = 4x+1, \quad b \geq 0.$$

Получим систему двух рациональных уравнений, относительно a и b :

$$\begin{cases} a+b=4, \\ 2a^2-b^2=-7, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ 2a^2-(4-a)^2=-7, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ 2a^2-16+8a-a^2+7=0, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ a^2+8a-9=0, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ a=1, \\ a=-9, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3, \\ a=1. \end{cases}$$

Вернемся к переменной x

$$\sqrt{2x+3}=1 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: **2.**

Достоинства

1. Метод введения новых переменных для данного уравнения не рационален

Недостатки

1. Словесное описание.
2. Громоздкое решение.

Вывод:

Метод введения новых переменных и переход к системе рациональных уравнений для данного уравнения не рационален. Этот метод лучше применять для иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней, или одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня, или взаимнообратные выражения под знаками корня.

Метод введения новой переменной и переход к рациональному уравнению

Иррациональное уравнение, содержащее одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня.

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 - 9 - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y \geq 0, \\ y^2 - 5y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y \geq 0, \\ \begin{cases} y = -1, \\ y = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 = 6^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -4,5. \end{cases}$$

Ответ: -4,5; 3.

Метод введения новых переменных

- Уравнение, содержащее радикалы различных степеней.

$$\sqrt[3]{2-y} - \sqrt{y+7} = 3$$

Введем новые переменные, обозначив

$$\sqrt[3]{2-y} = a, \sqrt{y+7} = b$$

Получим первое уравнение $a-b=3$.

Составим второе уравнение

$$\sqrt[3]{2-y} = a, \quad 2-y = a^3 \quad a^3 + b^2 = 9$$

$$\sqrt{y+7} = b, \quad y+7 = b^2, b \geq 0$$



переход к системе рациональных уравнений

Составим и решим систему рациональных уравнений.

$$\begin{cases} a - b = 3, \\ a^3 + b^2 = 9, \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3, \\ a^3 + (a - 3)^2 = 9, \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ a^3 + a^2 - 6a + 9 - 9 = 0, \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3 \\ a(a^2 + a - 6) = 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3, \\ \begin{cases} a = 0, \\ a = 2, \\ a = -3, \\ b \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0, \\ b = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \text{решений нет} \\ \begin{cases} a = -3, \\ b = -6, \end{cases} \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: решений нет.



Спасибо за урок