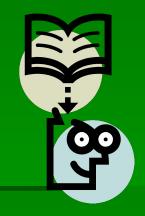
Открытый урок по алгебре и началам анализа. 10 класс.

Методы решения иррациональных уравнений





Урок- семинар

■ Цель:

Обобщить знания учащихся по данной теме, продемонстрировать различные методы решения иррациональных уравнений, показать умение учащихся подходить к решению уравнений с исследовательской позиции.

«Я слышу я забываю, я вижу я запоминаю, я делаю я понимаю.»

Способ I. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой

• Иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=4^{2}$$

$$2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=16-6x+2,$$

$$2\sqrt{8x^{2}+2x-12x}-3=18-6x,$$

$$\sqrt{8x^{2}-10x-3}=9-3x,$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$8x^{2} - 10x - 3 = (9 - 3x)^{2},$$

$$8x^{2} - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^{2},$$

$$x^{2} - 44x + 84 = 0,$$

• По теореме Виета:

$$x^{2} - 44x + 84 = 0,$$

 $x_{1} + x_{2} = 44,$
 $x_{1} \cdot x_{2} = 84,$
 $x_{1} = 42, x_{2} = 2.$



Проверка



1). Если x=42, то

$$\sqrt{2 \cdot 42 - 3} + \sqrt{4 \cdot 42 + 1} = 4,$$

 $\sqrt{81} + \sqrt{169} = 4,$
 $9 + 13 = 4,$
 $22 = 4, \text{неверно}$

Значит, число 42 не является корнем уравнения.

• 2). Если х=2, то

$$\sqrt{4-3} + \sqrt{8+1} = 4,$$

1+3 = 4,

$$4 = 4, верно$$

Значит, число 2 является корнем уравнения.

Ответ: 2

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой

<u>Достоинства</u>

- 1. Понятно
- 2. Доступно

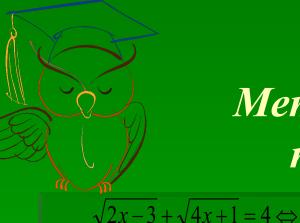


Недостатки

- . Словесная запись
 - 2. Громоздкая проверка иногда занимает много времени и места

Вывод:

При решении иррациональных уравнений методом возведения обеих частей уравнения в одну и туже степень необходимо вести словесную запись, что делает решение понятным и доступным. Однако обязательная проверка иногда бывает громоздкой и занимает много времени. Этот метод можно использовать для несложных иррациональных уравнений, содержащих 1-2 радикала.



Способ П.

Метод равносильных преобразований

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 + 2\sqrt{2x - 3}\sqrt{4x + 1} + 4x + 1 = 4^{2}, \\ 2x - 3 \ge 0, \\ 4x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2x - 3)(4x + 1)} = 16 - 6x + 2, \\ x \ge 1, 5, \\ x \ge -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{8x^{2} + 2x - 12x - 3} = 18 - 6x, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8x^{2} - 10x - 3} = 9 - 3x, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, \\ x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 10x - 3 = (9 - 3x)^2, \\ x \ge 1, 5, \\ 9 - 3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2, \\ x \ge 1, 5, \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 44x + 84 = 0, \\ 1, 5 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42, \\ x = 2, \\ 1, 5 \le x \le 3 \end{cases}$$

Ответ: 2.



Метод равносильных преобразований

Достоинства

- 1. Отсутствие словесного описания
- 2. Нет проверки
- 3. Четкая логическая запись
- 4. Последовательность равносильных переходов

<u>Недостатки</u>

- 1. Громоздкая запись
- 2. Можно ошибиться при комбинации знаков системы и совокупности и получить неверный ответ

<u>Вывод</u>

При решении иррациональных уравнений методом равносильных переходов нужно четко знать, когда ставить знак системы, а когда совокупности. Громоздкость записи, различные комбинации знаков системы и совокупности не редко приводят к ошибкам. Однако, последовательность равносильных переходов, четкая логическая запись без словесного описания, не требующая проверки, являются бесспорными плюсами данного способа.

Способ Ш

Функционально графический метод

Решение.

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1}$$

Рассмотрим степенные функции

$$y = \sqrt{2x - 3}$$

$$y = 4 - \sqrt{4x + 1}$$

Найдем область определения функций

$$2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 3 \Leftrightarrow x \ge 1,5.$$

$$2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 3 \Leftrightarrow x \ge 1,5. \qquad 4x+1 \ge 0 \Leftrightarrow 4x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{4}.$$

$$D(x) = [1,5;\infty)$$

$$D(x) = \left[-\frac{1}{4}; \infty \right]$$

Составим таблицы значений х и у:

X	1,5	2	6
y	0	1	3

X	-0,25	0	2	6
y	4	3	1	-1

Функционально графический метод

Построим данные графики функции в одной системе координат. Графики функции пересекаются в точке с абсциссой x=2.

Ответ: 2

Функционально графический метод

Достоинства

- 1. Наглядность
- 2. Если ответ точный, то нужна проверка.

Недостатки

- 1. Словесная запись
- 2.Ответ может быть приближённым, не точным.

■ Вывод:

Функционально графический метод — это наглядный метод, но применять его лучше тогда, когда легко можно построить графики рассматриваемых функций и получить точный ответ. Если ответ приближенный, то лучше воспользоваться другиметодом.

Способ IV

Метод введения новых переменных

Введем новые переменные, обозначив

$$\sqrt{2x-3}=a$$

$$\sqrt{2x-3} = a \qquad \qquad \sqrt{4x+1} = b$$

Получим первое уравнение системы: a+b=4.

Составим второе уравнение системы:

$$\sqrt{2x-3} = a$$
, $a^2 = 2x-3$, $2a^2 = 4x-6$, $2a^2-b^2 = -7$ $a \ge 0$,

$$a^2 = 2x - 3$$

$$2a^2 = 4x - 6$$

$$2a^2 - b^2 = -7$$

$$a \geq 0$$
,

$$\sqrt{4x+1} = b$$
, $b^2 = 4x+1$, $b^2 = 4x+1$,

$$b^2 = 4x + 1.$$

$$b^2 = 4x + 1$$
,

$$b \ge 0$$
.

Получим систему двух рациональных уравнений, относительно а и b:

$$\begin{cases} a+b=4, & b=4-a, \\ 2a^2-b^2=-7, \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a, \\ 2a^2-(4-a)^2=-7, \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-16+8a-a^2+7=0, \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+8a-9=0, \Leftrightarrow a \ge 0, b \ge 0 \end{cases} \\ a \ge 0, b \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a = 1, \\ a = -9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a, \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3, \\ a = 1. \end{cases}$$

Вернемся к переменной х

 $\sqrt{2x+3} = 1 \Leftrightarrow 2x-3 = 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: 2.

Достоинства

1. Метод введения новых переменных для данного уравнения не рационален

<u>Недостатки</u>

- 1.Словесное описание.
- 2. Громоздкое решение.

Вывод:

Метод введения новых переменных и переход к системе рациональных уравнений для данного уравнения не рационален. Этот метод лучше применять для иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней, или одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня, или взаимообратные выражения под знаками корня.

Метод введения новой переменной и переход к рациональному уравнению

Иррациональное уравнение, содержащее одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня.

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 - 9 - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, & y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y \ge 0, & \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y \ge 0, & \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y = 0, & \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, \\ y = 0, & \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 = 6^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -4, 5. \end{cases}$$

Ответ: -4,5; 3.

Метод введения новых переменных

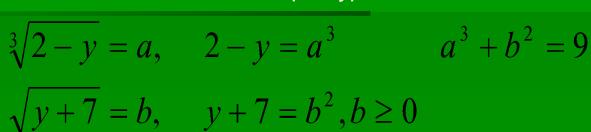
• Уравнение, содержащее радикалы различных степеней.

$$\sqrt[3]{2-y} - \sqrt{y+7} = 3$$

Введем новые переменные, обозначив

$$\sqrt[3]{2-y} = a, \sqrt{y+7} = b$$

Получим первое уравнение a-b=3. Составим второе уравнение



переход к системе рациональных уравнений

Составим и решим систему рациональных уравнений.

$$\begin{cases} a - b = 3, \\ a^{3} + b^{2} = 9, \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3, \\ a^{3} + (a - 3)^{2} = 9, \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3, \\ a^{3} + a^{2} - 6a + 9 - 9 = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3, \\ a(a^{2} + a - 6) = 0, \Leftrightarrow b \ge 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 3, \\ b \ge 0, \Leftrightarrow b \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a - 3, \\ a = 0, \\ a = 2, \\ a = -3, \\ b \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0, \\ b = -3, \\ b = -1, \Leftrightarrow peшений нет \\ a = -3, \\ b = -6, \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

#