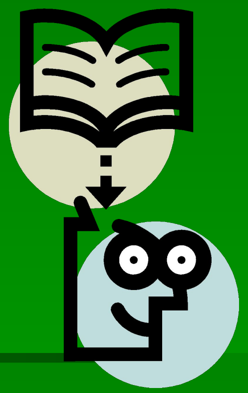
Открытый урок по алгебре и началам анализа. 10класс.

Методы решения иррациональных уравнений

Урок- семинар



- ***Цель:***

  Обобщить знания учащихся по данной теме, продемонстрировать различные методы решения иррациональных уравнений, показать умение учащихся подходить к решению уравнений с исследовательской позиции.

«Я слышу –

я забываю,

я вижу –

я запоминаю,

я делаю –

я понимаю.»

Способ I. *Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой*

- Иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=4^2$$

$$2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=16-6x+2,$$

$$2\sqrt{8x^2+2x-12x-3}=18-6x,$$

$$\sqrt{8x^2-10x-3}=9-3x,$$

возведем обе части уравнения в квадрат

$$8x^2-10x-3=(9-3x)^2,$$

$$8x^2-10x-3=81-54x+9x^2,$$

$$x^2-44x+84=0,$$

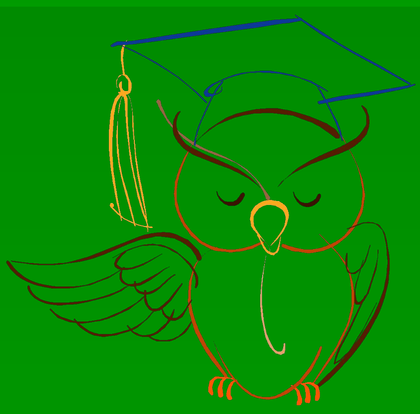
- По теореме Виета:

$$x^2-44x+84=0,$$

$$x_1+x_2=44,$$

$$x_1\cdot x_2=84,$$

$$x_1=42, x_2=2.$$



Проверка:

- 1). Если x=42, то

$$\sqrt{2\cdot 42-3}+\sqrt{4\cdot 42+1}=4,$$
$$\sqrt{81}+\sqrt{169}=4,$$
$$9+13=4,$$
$$22=4, \textit{неверно}$$

Значит, число 42 не является корнем уравнения.

- 2). Если x=2, то

$$\sqrt{4-3}+\sqrt{8+1}=4,$$
$$1+3=4,$$
$$4=4, \textit{верно}$$

Значит, число 2 является корнем уравнения.

Ответ: 2

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой

<u>Достоинства</u>

1. Понятно
2. Доступно

<u>Недостатки</u>

1. Словесная запись
2. Громоздкая проверка иногда занимает много времени и места

- **<u>Вывод:</u>**

  При решении иррациональных уравнений методом возведения обеих частей уравнения в одну и туже степень необходимо вести словесную запись, что делает решение понятным и доступным. Однако обязательная проверка иногда бывает громоздкой и занимает много времени. Этот метод можно использовать для несложных иррациональных уравнений, содержащих 1-2 радикала.

Способ II.

Метод равносильных преобразований

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=4^2, \\ 2x-3 \ge 0, \\ 4x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=16-6x+2, \\ x \ge 1{,}5, \\ x \ge -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{8x^2+2x-12x-3}=18-6x, \\ x \ge 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8x^2-10x-3}=9-3x, \\ x \ge 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-10x-3=(9-3x)^2, \\ x \ge 1{,}5, \\ 9-3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-10x-3=81-54x+9x^2, \\ x \ge 1{,}5, \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-44x+84=0, \\ 1{,}5 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=42, \\ x=2, \end{array}\right. \\ 1{,}5 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Метод равносильных преобразований

Достоинства

1. Отсутствие словесного описания
2. Нет проверки
3. Четкая логическая запись
4. Последовательность равносильных переходов

Недостатки

1. Громоздкая запись
2. Можно ошибиться при комбинации знаков системы и совокупности и получить неверный ответ

Вывод

При решении иррациональных уравнений методом равносильных переходов нужно четко знать, когда ставить знак системы, а когда совокупности. Громоздкость записи, различные комбинации знаков системы и совокупности не редко приводят к ошибкам. Однако, последовательность равносильных переходов, четкая логическая запись без словесного описания, не требующая проверки, являются бесспорными плюсами данного способа.

Способ III

Функционально графический метод

Решение.

$$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{4x+1}$$

Рассмотрим степенные функции

$$y=\sqrt{2x-3} \qquad y=4-\sqrt{4x+1}$$

Найдем область определения функций

$$2x-3\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 1{,}5. \qquad 4x+1\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{4}.$$

$$D(x)=[1{,}5;\infty) \qquad D(x)=\left[-\frac{1}{4};\infty\right)$$

Составим таблицы значений х и у:

x	1,5	2	6
y	0	1	3

x	**-0,25**	**0**	**2**	**6**
y	**4**	**3**	**1**	**-1**

Функционально графический метод

Построим данные графики функции в одной системе координат.

Графики функции пересекаются в точке с абсциссой х=2.

Ответ: 2

Функционально графический метод

<u>Достоинства</u>

1. Наглядность
2. Если ответ точный, то нужна проверка.

<u>Недостатки</u>

1. Словесная запись
2. Ответ может быть приближённым, не точным.

- ***<u>Вывод:</u>***

  Функционально графический метод – это наглядный метод, но применять его лучше тогда, когда легко можно построить графики рассматриваемых функций и получить точный ответ. Если ответ приближенный, то лучше воспользоваться други методом.

Способ IV

Метод введения новых переменных

- Введем новые переменные, обозначив

$$\sqrt{2x-3}=a \qquad \sqrt{4x+1}=b$$

Получим первое уравнение системы: a+b=4.

Составим второе уравнение системы:

$$\begin{cases}\sqrt{2x-3}=a,\\ \sqrt{4x+1}=b,\end{cases} \quad \begin{cases}a^2=2x-3,\\ b^2=4x+1,\end{cases} \quad \begin{cases}2a^2=4x-6,\\ b^2=4x+1,\end{cases} \quad 2a^2-b^2=-7 \qquad \begin{matrix}a\ge 0,\\ b\ge 0.\end{matrix}$$

Получим систему двух рациональных уравнений, относительно a и b:

$$\begin{cases}a+b=4,\\ 2a^2-b^2=-7,\\ a\ge 0, b\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-a,\\ 2a^2-(4-a)^2=-7,\\ a\ge 0, b\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-a,\\ 2a^2-16+8a-a^2+7=0,\\ a\ge 0, b\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-a,\\ a^2+8a-9=0,\\ a\ge 0, b\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=4-a,\\ \left[\begin{array}{l}a=1,\\ a=-9,\end{array}\right.\\ a\ge 0, b\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4-a,\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3,\\ a=1.\end{cases}$$

Вернемся к переменной x $\sqrt{2x+3}=1 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2.$

Ответ: 2.

Достоинства	**Недостатки**
1. Метод введения новых переменных для данного уравнения не рационален	1.Словесное описание. 2. Громоздкое решение.

Вывод:

Метод введения новых переменных и переход к системе рациональных уравнений для данного уравнения не рационален. Этот метод лучше применять для иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней, или одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня, или взаимообратные выражения под знаками корня.

Метод введения новой переменной и переход к рациональному уравнению

Иррациональное уравнение, содержащее одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня.

$$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}=-3 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9-9-5\sqrt{2x^2+3x+9}=-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2x^2+3x+9}, \\ y\ge 0, \\ y^2-5y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2x^2+3x+9}, \\ y\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2x^2+3x+9}, \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+9}=6 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9=6^2 \Leftrightarrow 2x^2+3x-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-4{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: -4,5; 3.

Метод введения новых переменных

- Уравнение, содержащее радикалы различных степеней.

$$\sqrt[3]{2-y}-\sqrt{y+7}=3$$

Введем новые переменные, обозначив

$$\sqrt[3]{2-y}=a,\sqrt{y+7}=b$$

Получим первое уравнение a-b=3.
Составим второе уравнение

$$\sqrt[3]{2-y}=a, \quad 2-y=a^3 \qquad a^3+b^2=9$$

$$\sqrt{y+7}=b, \quad y+7=b^2, b\geq 0$$

переход к системе рациональных уравнений

Составим и решим систему рациональных уравнений.

$$\begin{cases} a-b=3, \\ a^3+b^2=9, \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-3, \\ a^3+(a-3)^2=9, \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-3 \\ a^3+a^2-6a+9-9=0, \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-3 \\ a(a^2+a-6)=0, \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-3, \\ \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=2, \\ a=-3, \end{array}\right. \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ b=-3, \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3, \\ b=-6, \end{cases} \end{array}\right. \\ b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \textit{решений нет}$$

Ответ: решений нет.

Спасибо за урок