ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 6:

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

1. Следствия из Т. об изменении момента количества движения

1) При движении под действием центральной силы траектория точки есть плоская кривая

Для изучения движения будем пользоваться полярными координатами r, φ

$$\mathbf{F} = F_r(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

2) Движение точки происходит с постоянной секторной скоростью (закон площадей)

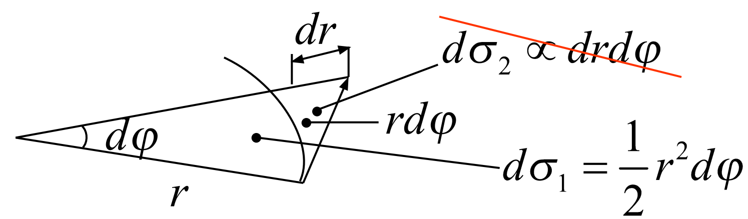
$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = 2\frac{d\sigma}{dt} = c$$

$\dfrac{d\sigma}{dt}$ - секторная скорость $\qquad c$ - постоянная площадей

$$d\sigma = \frac{1}{2}\text{основание} \times \text{высота} = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}r^2\varphi$$

Закон площадей $\boxed{r^2\varphi = c}$



2. Скорость точки

Кинематика: $v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\dot{\varphi}$ $\qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

радиальная компонента $\qquad$ трансверсальная компонента

Исключаем время используя закон площадей $\quad t \to \varphi \quad dt = c^{-1}r^2 d\varphi$

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{c}{r}$$

новая переменная $\quad u = 1/r$

$$v_r = -c\frac{du}{d\varphi},\ v_\varphi = cu$$

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

3. Уравнение Бинэ

Интеграл энергии $\frac{1}{2}mv^2 + \Pi(r) = \text{const}$ $\Pi(r) = \int_r^{r_0} F_r(r)dr$

Дифференцируем по φ $\frac{c^2m}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] - F_r(r)\frac{dr}{d\varphi} = 0$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{du^{-1}}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{c^2m}{2}\left[2\cancel{\frac{du}{d\varphi}}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u\cancel{\frac{du}{d\varphi}}\right] + \frac{F_r(r)}{u^2}\cancel{\frac{du}{d\varphi}} = 0$$

Диф. уравнение траектории точки, движущейся под действием центральной силы (уравнение Бинэ).

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r(1/u)}{mc^2u^2}}$$

2 этапа решения задачи

1) Из уравнения Бинэ найти траекторию $u = u(\varphi) \Leftrightarrow r = r(\varphi)$
2) Из закона площадей найти закон движения по траектории

4. Пример: движение по окружности

Найти закон центральной силы, под действием которой точка будет двигаться по окружности $r = a$

$$u = \frac{1}{a}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r}{mc^2u^2}$$

$$F_r = -\frac{mc^2}{a^3} = \mathrm{const}$$

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

$$v = \frac{c}{a} = \mathrm{const}$$

$$\boxed{F_r = -\frac{mv^2}{a}}$$

Движение свободной материальной точки по окружности происходит с постоянной скоростью под действием постоянной притягивающей силы (**центростремительная сила**), равной по модулю mv^2/a

5. Законы Кеплера

1) Все планеты (и кометы) описывают вокруг Солнца плоские орбиты, следуя закону площадей.
2) Орбиты эти суть конические сечения, в одном из фокусов которых находится Солнце.
3) Квадраты звездных времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Из законов Кеплера Ньютон нашел закон, по которому изменяется сила, действующая на планету при ее движении вокруг Солнца, а затем пришел к закону всемирного тяготения. **Как он мог это сделать?**

1-й закон → действующая на планеты сила есть сила центральная, направление которой проходит через Солнце

6. Следствие из второго закона

2-й закон ⇒ сила, действующая на планеты, будет силой, притягивающей их к Солнцу обратно пропорционально квадрату расстояния.

Уравнение конического сечения в полярных координатах $\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi$

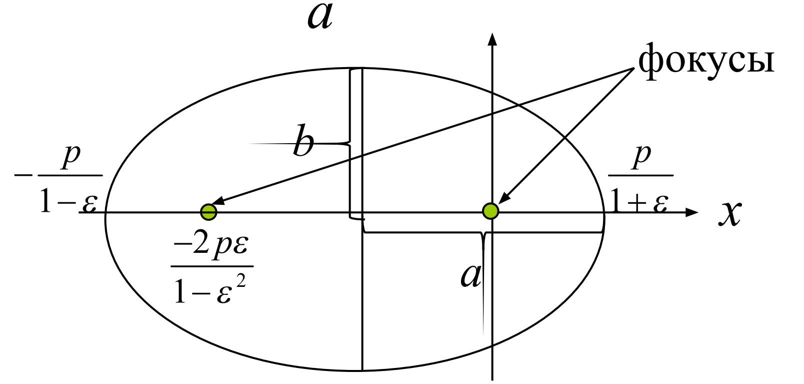
$$x = r\cos\varphi \qquad p - \varepsilon r\cos\varphi = r \qquad (p - \varepsilon x)^2 = x^2 + y^2$$
$$y = r\sin\varphi$$

Для эллипса $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ - эксцентриситет $p = \frac{b^2}{a}$

$$u = \frac{1 + \varepsilon\cos\varphi}{p} \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r(1/u)}{mc^2u^2}$$

$$\frac{mc^2u^2}{p}(-\varepsilon\cos\varphi + 1 + \varepsilon\cos\varphi) = -F_r$$

$$F_r = -\mu_c m u^2 = -\frac{\mu_c m}{r^2} \qquad \mu_c = \frac{c^2}{p}$$ постоянная Гаусса



7. Следствие из третьего закона

3-й закон → постоянная $\mu_с$ будет одна и та же для всех тел солнечной системы.

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{\text{площадь эллипса}}{\text{период обращения}} = \frac{\pi ab}{T} \\ p &= \frac{b^2}{a} \end{aligned}\right\} \mu_с = \frac{c^2}{p} = \frac{\pi^2 a^3}{T^2} = \text{const}$$

По третьему закону

Постоянная Гаусса есть величина, одинаковая для всех тел, движущихся под действием притягивающей силы Солнца, и поэтому должна зависеть только от массы Солнца $\mu_с(M)$

Для тел, движущихся под действием притяжения Земли, существует своя гауссова постоянная $\mu_з(m)$

Солнце притягивает Землю с силой $F_{сз} = \mu_с m r^{-2}$

Земля притягивает Солнце с силой $F_{зс} = \mu_з M r^{-2}$

$$\xrightarrow[\text{Ньютона}]{3^{\text{ий}}\text{ з-н}} \frac{\mu_с}{M} = \frac{\mu_з}{m} = \frac{\mu_{марс}}{m_{марс}} = \ldots = f$$

Отношение гауссовой постоянной любого тела к его массе есть константа, называемая гравитационной постоянной.

$$\boxed{F_r = -f\,\frac{Mm}{r^2}}$$

8. Задача Ньютона

Найти траекторию материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния

$$\left.\begin{array}{l} F_r = -\dfrac{\mu m}{r^2} = -\mu m u^2 \\ \dfrac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\dfrac{F_r}{mc^2u^2} \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \longrightarrow u = \frac{1}{p} + a\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$p = \frac{c^2}{\mu}$$

выбор начала отсчета $\varphi_0 = 0$

$$\xrightarrow[\varepsilon = ap]{} \boxed{u = \frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}}$$

Траекторией точки будет коническое сечение (эллипс, парабола или гипербола), один из фокусов которого совпадает с притягивающим цен-центром. Конкретный вид траектории зависит от значений постоянных ε и p, т. е. от начальных условий.

9. Виды траекторий

Пусть в точке P (перицентр) известна скорость v_P. Каков будет вид траектории?

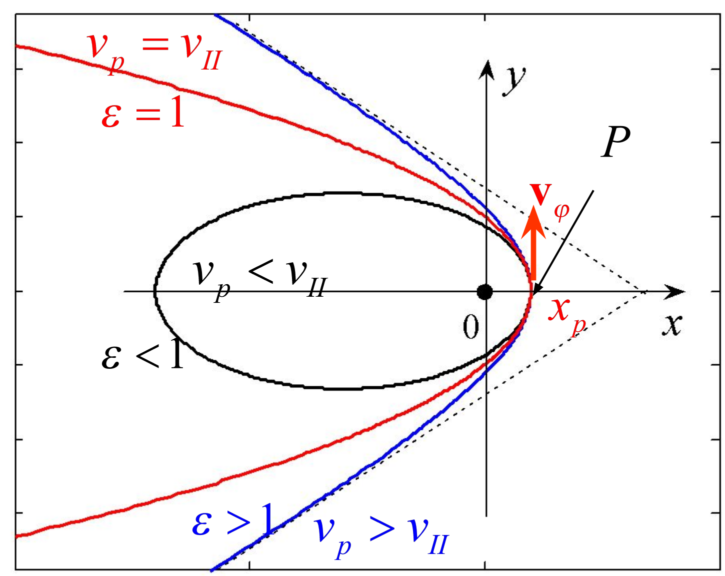
$$\left.\frac{dr}{d\varphi}\right|_P = \left.\frac{p\varepsilon\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\right|_{\varphi=0} = 0, \qquad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot r}{\dot\varphi} = \frac{r v_r}{v_\varphi} \quad \Rightarrow \quad v_r\big|_P = 0$$

$$v_p = v_\varphi\big|_P = x_p\dot\varphi\big|_P, \qquad \text{ЗП:} \quad x_p^2\dot\varphi = c \quad \Rightarrow \quad c = x_p v_p, \qquad p = \frac{c^2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{v_p^2 x_p^2}{\mu}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p} \quad \Rightarrow \quad x_p = \frac{p}{1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{v_p^2 x_p}{\mu} - 1}$$

$$\boxed{v_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{x_p}}}$$ параболическая скорость

$$\boxed{v_I = \sqrt{\frac{\mu}{x_p}}}$$ круговая скорость (траектория –окружность)



Если начальная скорость задана вблизи Земли ($x_p = R$), то $v_I = 7.9$ км/с. $v_{II} = 11.2$ км/с.

10. Виды траекторий и энергия

Выразим эксцентриситет через постоянную энергии

Нормированный на *m* интеграл энергии $$\underbrace{\frac{1}{2}v_p^2}_{\text{кинетическая}} - \underbrace{\frac{\mu}{x_p}}_{\text{потенциальная}} = e \leftarrow \text{полная энергия}$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{v_p^2 x_p}{\mu} - 1\right)^2 - 1 = \frac{v_p^4 x_p^2}{\mu^2} - 2\frac{v_p^2 x_p}{\mu} = \frac{2v_p^2 x_p^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{2}v_p^2 - \frac{\mu}{x_p}\right) = 2\frac{c^2}{\mu^2}e$$

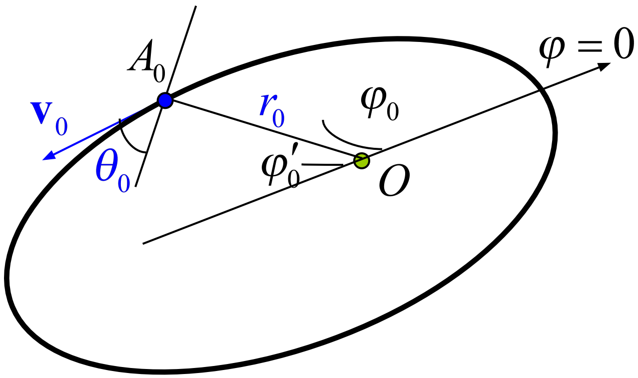
$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + 2\frac{c^2}{\mu^2}e}}$$

вид траектории зависит от знака полной энергии:

$e<0$ – эллипс, $e=0$ –парабола, $e>0$ - гипербола

11. Определение параметров траектории по начальным данным

Известны v_0, r_0, θ_0 Найти $p, \varepsilon, \varphi_0$



$v_{0r} = v_0 \sin\vartheta_0 \qquad v_{0\varphi} = v_0 \cos\vartheta_0$

1) Найти константы площадей и энергии

$$c = \left|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0\right| = r_0 v_0 \cos\vartheta_0 \qquad e = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

2) Найти p, ε

$$p = \frac{c^2}{\mu} \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + 2\frac{c^2}{\mu^2}e}$$

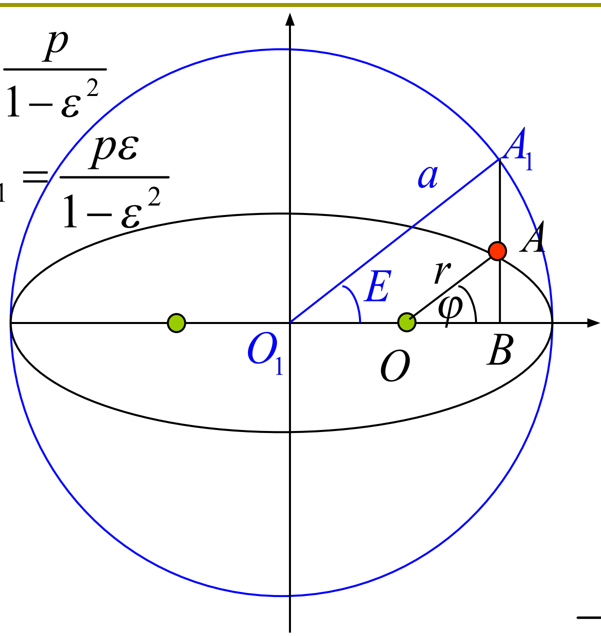
3) Найти φ_0 из уравнения траектории

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r_0} - 1\right)$$

12. Движение вдоль орбиты. Уравнение Кеплера

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$OO_1 = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$



Закон площадей $\quad \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{2c}{r^2} = \dfrac{2c}{p^2}\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2$

$$t - t_0 = \frac{p^2}{2c}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2}$$

Замена переменных $\quad \varphi \to E \quad$ эксцентрическая аномалия

$$a\cos E = r\cos\varphi + OO_1$$

$$\cos E = \frac{\varepsilon + \cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\frac{p}{1-\varepsilon^2}\cos E = \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$1-\varepsilon\cos E = \frac{1+\cancel{\varepsilon\cos\varphi}}{1+\varepsilon\cos\varphi} - \frac{\varepsilon^2+\cancel{\varepsilon\cos\varphi}}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\cancel{\cos E}\,dE = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\cos\varphi\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)+\varepsilon\sin^2\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\cancel{\cos E}}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$\left(1-\varepsilon\cos E\right)dE = \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2}$$

13. Движение вдоль орбиты. Уравнение Кеплера

$$n\left(t-t_0\right)=\int_0^E\left(1-\varepsilon\cos E\right)dE=E-\varepsilon\sin E$$

$$n=\frac{2c\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}{p^2}$$

$$\boxed{n\left(t-t_0\right)=E-\varepsilon\sin E}$$

Уравнение Кеплера

Период обращения $E=2\pi$ $\quad T=\dfrac{2\pi}{n}$

$$\boxed{\frac{2\pi}{T}\left(t-t_0\right)=E-\varepsilon\sin E}$$