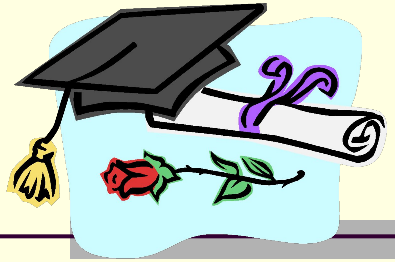
Производная



- 1. Производная
- 2. Общие правила составления производных
- 3. Производная сложной функции
- 4. Механическая интерпретация производной
- 5. Геометрическая интерпретация производной

Производная

- Возьмем какую-нибудь функцию, например x^2
- Дадим аргументу некоторое произвольное приращение h
- Разность $(x+h)^2 - x^2$ называется приращением функции
- Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента, т.е. дробь $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ (A)
- Величина этой дроби зависит и от величины x, и от величины h. Например, при x=2 и h=0,1 значение дроби равна 4,1; при x=3 и h=0,01 величина этой дроби равна 6,01 и т.д.
- Если теперь мы станем приближать величину h неограниченно к нулю, то числитель и знаменатель дроби (A) станут одновременно приближаться неограниченно также к нулю. При этом величина самой дроби будет также изменяться.
- Характер такого изменения трудно обнаружить, если ограничиваться рассмотрением отношения (A) лишь в том виде, как оно описано.2

- Если же сделаем следующие преобразования

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h,$$

То увидим, что при h $\to 0$ выражение 2x+h, следовательно и выражение $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ неограниченно приближаются к выражению 2x.

Таким образом, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ =2x

- Выражение 2x представляет собой новую функцию, которая получилась из исходной функции x^2 с помощью определенного процесса. Этот процесс заключался в вычислении предела отношения приращения функции x^2 к приращению аргумента x при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.
- **Полученная с помощью такого процесса функция 2x называется *производной* от функции x^2 .**

Процесс нахождения производной является новым математическим действием. Это действие обозначается поставленным над данной функцией знаком штрих $f'(x)$. Например, $(x^2)'=2x$

- ***Производной от данной функции называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.***
- Примеры:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

- *Операция нахождения производной от функции называется дифференцированием этой функции.*
- *Если h произвольным образом стремится к нулю и если при этом отношение стремится к конечному пределу, то*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- *говорят, что функция f(x) в точке* $x = x_0$ ***дифференцируема.***

Общие правила составления производных

- 1. Производные суммы равна сумме производных.

$$[\gamma(x)+\varphi(x)-\lambda(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{[\gamma(x+h)+\varphi(x+h)-\lambda(x+h)]-[\gamma(x)+\varphi(x)-\lambda(x)]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h}+\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\frac{\lambda(x+h)-\lambda(x)}{h}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\lambda(x+h)-\lambda(x)}{h} = \gamma'(x)+\varphi'(x)-\lambda'(x)\,/$$

- 2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$[A\cdot f(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{Af(x+h)-Af(x)}{h} = A\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A\cdot f'(x)$$

Пример.

$$1.\left(x^2+\sqrt{x}+\sin x\right)' = (x^2)'+(\sqrt{x})'+(\sin x)' = 2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x.$$

$$2.(19x^3)' = 19(x^3)' = 19\cdot 3x^2 = 57x^2$$

- 3. **Производная произведения двух функций равна первой функции, умноженной на производную второй, плюс вторая функция, умноженная на производную первой.**

$$\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]' = \lim_{h\to0}\frac{f(x+y)\varphi(x+h)-f(x)\varphi(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)\varphi(x+h)-f(x)\varphi(x+h)+f(x)\varphi(x+h)-f(x)\varphi(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\varphi(x+h)+\lim_{h\to0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\cdot f(x) = f'(x)\varphi(x)+\varphi'(x)f(x).$$

- **4. Производная дроби равна произведению знаменателя на производную числителя, минус произведение числителя на производную знаменателя, все разделенное на квадрат знаменателя.**

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \lim_{h\to0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{\varphi(x+h)}-\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)\varphi(x)-\varphi(x+h)f(x)}{h\varphi(x+h)\varphi(x)} =$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)\varphi(x)-f(x)\varphi(x)+f(x)\varphi(x)-\varphi(x+h)f(x)}{h\varphi(x+h)\varphi(x)} =$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\varphi(x)-\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}f(x)}{\varphi(x+h)\varphi(x)} = \frac{f'(x)\varphi(x)-\varphi'(x)f(x)}{[\varphi(x)]^2}.$$

Пример.

$$1.(x^2 \cdot \sin x)' = x^2 \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot (x^2)' = x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

$$2.\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{x^2 \cdot (\sin x)' - (x^2)' \cdot \sin x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}.$$

- **5.Производная постоянной величины равна нулю.**

$$y = c, y' = 0$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- **6. Производная от аргумента равна 1.**

$$y = x, y' = 1$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Производная сложной функции и техника дифференцирования.

- Пусть $y = u^3$ и $u = \sin x$
- Если рассматривать отдельно равенство $y = u^3$, то можно считать аргументом u, а функцией y. В этом случае производная от величины y по аргументу u выразится так:. $y'_u = 3u^2$
- Мы здесь вместо обычного обозначения y' применили обозначение y'_u . Это мы сделали для того, чтобы в дальнейшем не перепутать между собой эту производную с другой производной, которая у нас еще появится.
- Если рассматривать отдельно равенство u=sin x, то можно считать аргументом x, а функцией u.
- В этом случае производная от величины u и по аргументу x выразится так:
- . $u'_x = \cos x$
- Теперь станем рассматривать равенства $y = u^3$ и $u = \sin x$ в их связи друг с другом. Очевидно , что каждому значению аргумента x будет соответствовать определенное значение u, а полученному значению u будет соответствовать определенное значение y. Следовательно, мы можем рассматривать величину y не только как функцию величины u, но и как функцию аргумента x.
- Функцию y от x, заданную таким образом, называют *сложной* функцией от x, а величину u называют *промежуточной* переменной.
- При такой постановке вопроса возникает задача – найти производную от величину y по аргументу x.

- Придадим аргументу x приращение h, тогда величина u получит некоторое приращение h_1, а после этого и величина y получит некоторое свое приращение h_2.
- По определению производной $y'_x = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h_2}{h}$.
- Но $\frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h}.$
- Поэтому $y'_x = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h_2}{h_1}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{h_1}{h}.$
- Но $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h_2}{h_1} = y'_u$ и $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h_1}{h} = u'_x$.
- Поэтому $y'_x = y'_u \cdot u'_x$
- Значит, $y'_x = 3u^2\cdot\cos x = 3\sin^2 x\cos x.$
- Таким образом, ***производная сложной функции по независимой переменной равна её производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по независимой.***

- Примеры:
- 1) $y = 2^{\sin x}$

  $y'_x = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x$
- 2) $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

  $y'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \cdot (2ax + b)$
- 3) $y = \ln \sin x$

  $y'_x = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = tgx$
- 4)

  $y = \sin^3 x$

  $y'_x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$

Механическая интерпретация производной

- Известно, что функция $\frac{1}{2}gt^2$
- выражает путь, пройденный при свободном падении. Придадим аргументу t приращение h. Тогда приращение функции окажется равным

$$\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2$$

- Отношение $\dfrac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$ есть средняя скорость на промежутке
- времени от момента t до момента t+h. Скоростью же в момент t мы называем тот предел, к которому стремится эта дробь при $h \to 0$. Но этот предел по определению как раз есть производная функции $\frac{1}{2}gt^2$
- Таким образом, оказывается, что производная от функции, выражающей пройденный путь при прямолинейном ***движении, выражает скорость этого движения.*** В этом и заключается механический смысл производной.

- Вычислив $$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2}{h}$$
- , найдем формулу скорости движения v=gt, где gt есть как раз производная функции $\frac{1}{2}gt^2$
- Эту производную можно было получить и так:

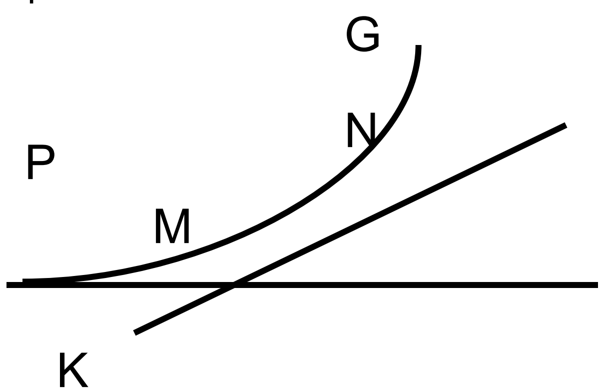
$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot\left(t^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt$$

- Кратко говорят: ***Производная от пути по времени есть скорость.***
- Пример: Пройденный путь в зависимости от времени выражается функцией
- $\frac{a}{t}+bt^2$, где a и b – постоянные. Найти скорость движения.

$$v=\left(\frac{a}{t}+bt^2\right)'=\left(\frac{a}{t}\right)'+\left(bt^2\right)'=a\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'+b\left(t^2\right)'=a\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)+b\cdot 2t=-\frac{a}{t^2}+2bt$$

Геометрическая интерпретация производной

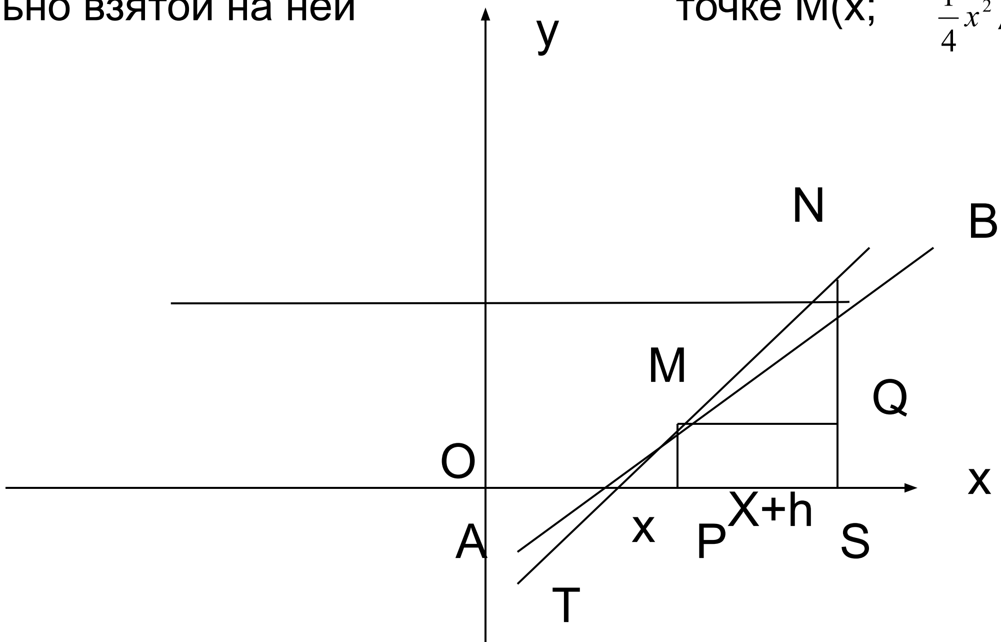
- К кривой PG проведена секущая АВ через две её точки М и N. Оставляя точку М неподвижной, вообразим, что точка N движется по кривой, неограниченно приближаясь к М. Тогда секущая АВ станет поворачиваться вокруг неподвижной точки М, стремясь к предельному положению КТ. Это предельное положение секущей называется касательной к кривой в точке М.



Определение. Касательной к данной кривой в данной точке М называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку М и через другую точку N кривой, при условии, что точка N приближается по кривой неограниченно к неподвижной точке М.

Условимся называть тангенс угла между осью х и касательной к кривой *угловым коэффициентом касательной*

- Задача : Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=\frac{1}{4}x^2$ в произвольно взятой на ней точке M(x; $\frac{1}{4}x^2$)



Возьмем на кривой точку $N\left[x+h;\frac{1}{4}(x+h)^2\right]$ и проведем MQ || OX. Тогда

$MQ=h; NS=\frac{1}{4}(x+h)^2; QS=MP=\frac{1}{4}x^2; NQ=\frac{1}{4}(x+h)^2-\frac{1}{4}x^2.$ $\quad tg\angle NPQ=\frac{NQ}{MQ}=\frac{\frac{1}{4}(x+h)^2-\frac{1}{4}x^2}{h}$

Если станем приближать точку M к точке N, то секущая станет приближаться к положению касательной AB. При этом h стремиться к нулю, а величина угла QMN к величине угла PAM .

$$tg\angle PAM=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(x+h)^2-\frac{1}{4}x^2}{h}$$

Но последний предел есть производная функции $y=\frac{1}{4}x^2$

Следовательно, $tg\angle PAN=(\frac{1}{4}x^2)'=\frac{1}{4}\left(x^2\right)'=\frac{1}{4}\cdot 2x=\frac{1}{2}x$, т.е

угловой коэффициент касательной равен производной функции.