



# Тема 1. «Матрицы и действия над ними»

*Основные понятия:*

1. Определение **матрицы**
2. **Виды** матриц
3. **Действия** над матрицами
4. **Перестановочные** матрицы

завершить

## 1. Определение матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \dots & \grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \dots & \grave{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \grave{a}_{m1} & \grave{a}_{m2} & \dots & \grave{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

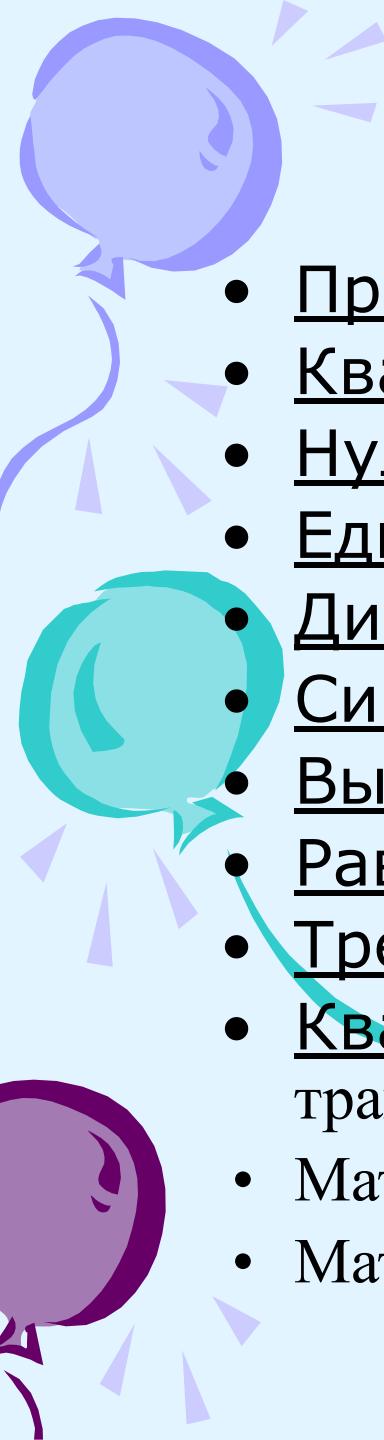
$\grave{a}_{ij}$  **элементы** матрицы.

Размер матрицы

Главная диагональ матрицы

Побочная диагональ матрицы

назад



## 2. Виды матриц

- Прямоугольная
- Квадратная
- Нулевая
- Единичная
- Диагональная
- Симметричная
- Вырожденная
- Равные
- Треугольная
- Квазитреугольная (ступенчатая или трапециевидная)
- Матрица-строка или строчная матрица
- Матрица-столбец или столбцевая матриц

назад



Матрица называется *прямоугольной*, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$



Матрица называется *квадратной*, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

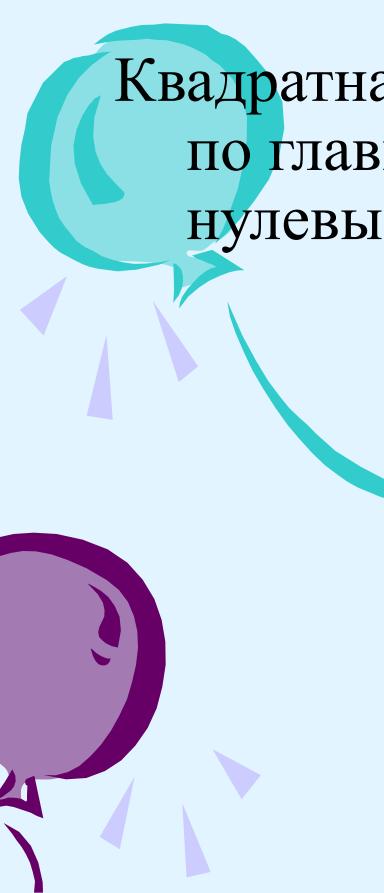

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[назад](#)



Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы нулевые :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Квадратная матрица называется *единичной*, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :


$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Квадратная матрица называется *диагональной*, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

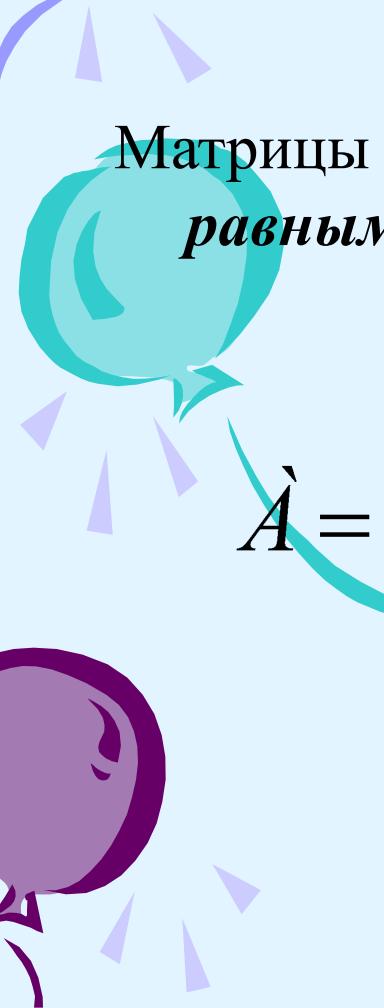
Квадратная матрица называется *симметричной*, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие  $a_{ij} = a_{ji}$ :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$

[назад](#)



Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.



Матрицы А и В (одинаковых размерностей) называются *равными*, если  $a_{ij} = b_{ij}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

назад

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \text{или} & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются *треугольными*.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

назад

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \otimes & a_{1m} & \otimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \otimes & a_{2m} & \otimes & a_{2n} \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ 0 & 0 & \otimes & a_{mm} & \otimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **квазитреугольной** (ступенчатая или трапециевидная)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

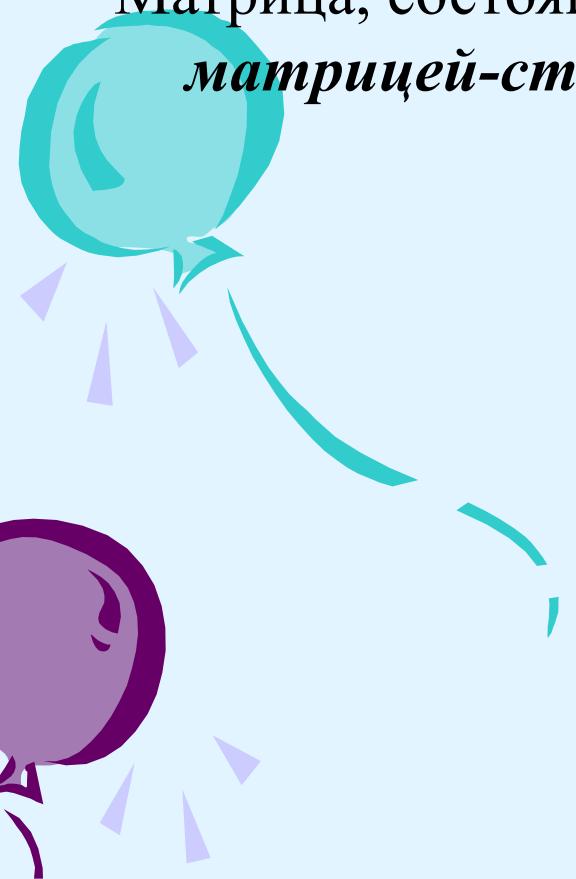
[назад](#)



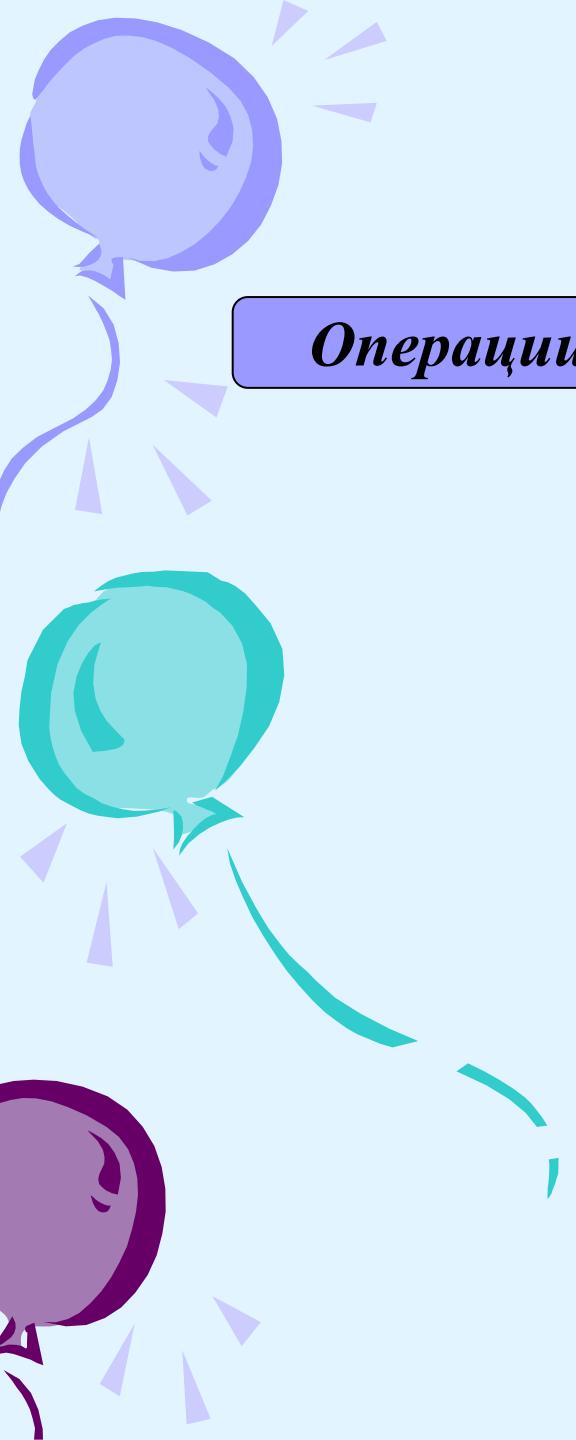
Матрица, состоящая из одной строки называется **матрицей-строкой** или **строчной матрицей**.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одного столбца называется **матрицей-столбцом** или **столбцевой матрицей**


$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[назад](#)



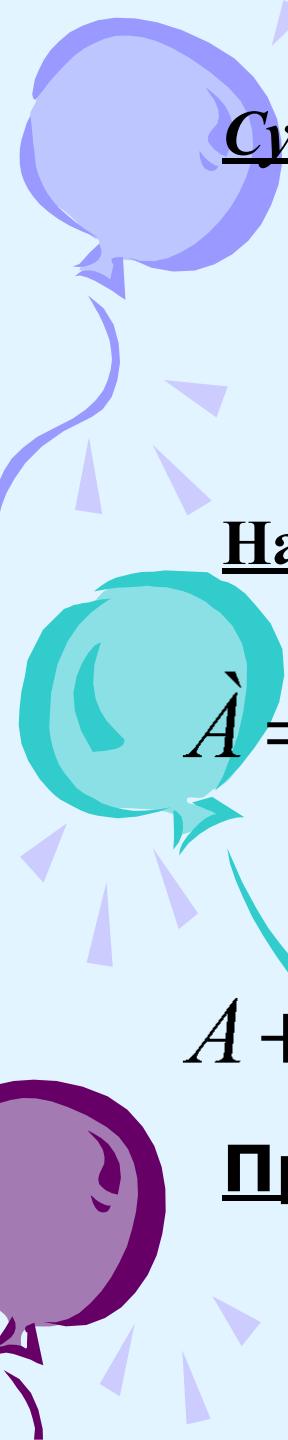
## *Операции над матрицами*

**Линейные:**

- 1) Сумма (разность) матриц;
- 2) Произведение матрицы на число.

**Нелинейные:**

- 1) Транспонирование матрицы;
- 2) Умножение матриц;
- 3) Нахождение обратной матрицы.



**Суммой (разностью)** двух матриц одинаковой размерности называется матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц слагаемых.

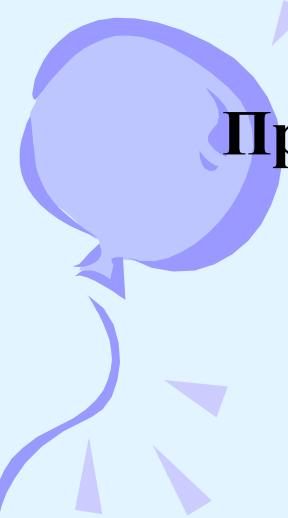
**Например:**

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} + b_{11} & \grave{a}_{12} + b_{12} & \grave{a}_{13} + b_{13} \\ \grave{a}_{21} + b_{21} & \grave{a}_{22} + b_{22} & \grave{a}_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

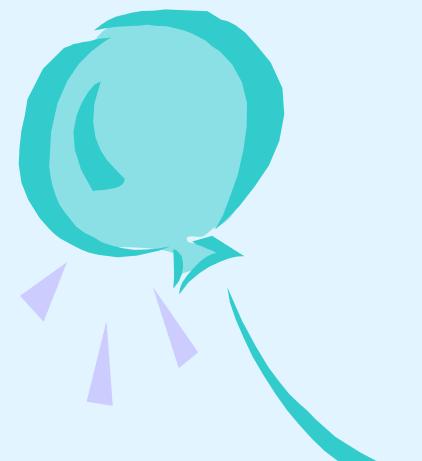
**Пример**

[назад](#)



**Пример**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$


$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$B - A = ?$$



**Ответ**

[назад](#)



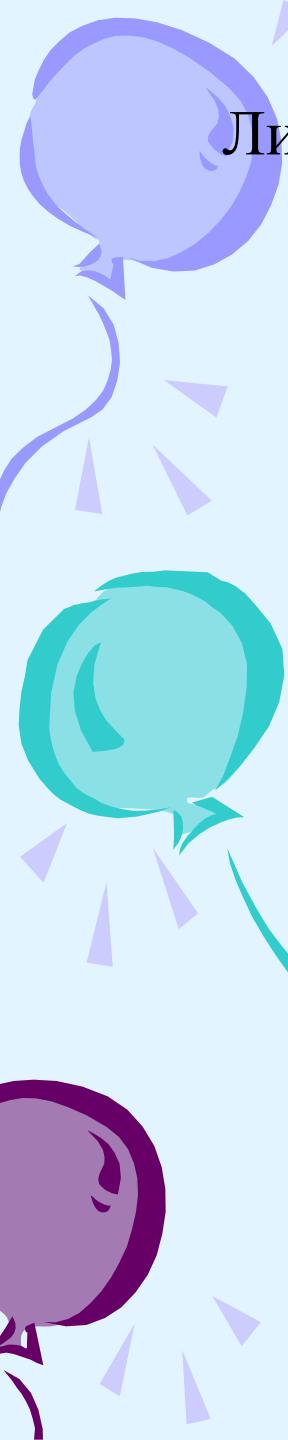
Произведением матрицы на число называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число.

Например:

$$\alpha \cdot \vec{A} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot \grave{a}_{11} & \alpha \cdot \grave{a}_{12} & \alpha \cdot \grave{a}_{13} \\ \alpha \cdot \grave{a}_{21} & \alpha \cdot \grave{a}_{22} & \alpha \cdot \grave{a}_{23} \end{pmatrix}$$

Пример

назад



Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

- 1)  $A + B = B + A$
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3)  $A + 0 = A$
- 4)  $A + (-A) = 0$
- 5)  $1 \cdot A = A$
- 6)  $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- 7)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- 8)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$



Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной.

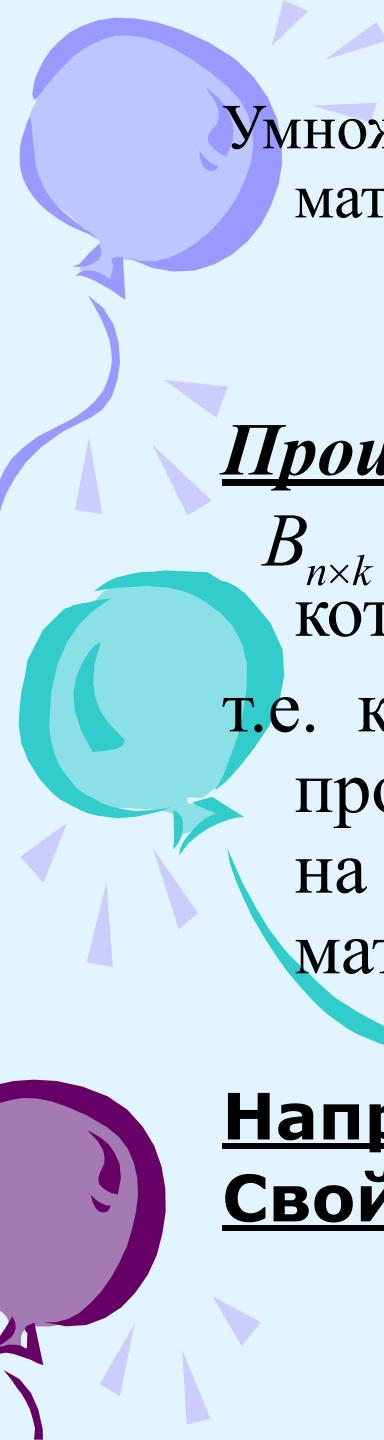
Например:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{21} \\ \grave{a}_{12} & \grave{a}_{22} \\ \grave{a}_{13} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix}$$

Свойства

назад



Умножение матриц определяется для **согласованных** матриц.

**Произведением** матрицы  $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$  на матрицу  $B_{n \times k}$  называется матрица  $C_{m \times k} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$ , которой  $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ , т.е. каждый элемент матрицы С равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы А на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы В.

**Например**  
**Свойства**

[назад](#)

Например:

$$\begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} \cdot b_{11} + \grave{a}_{12} \cdot b_{21} + \grave{a}_{13} \cdot b_{31} \\ \grave{a}_{21} \cdot b_{11} + \grave{a}_{22} \cdot b_{21} + \grave{a}_{23} \cdot b_{31} \end{pmatrix}$$

Пример

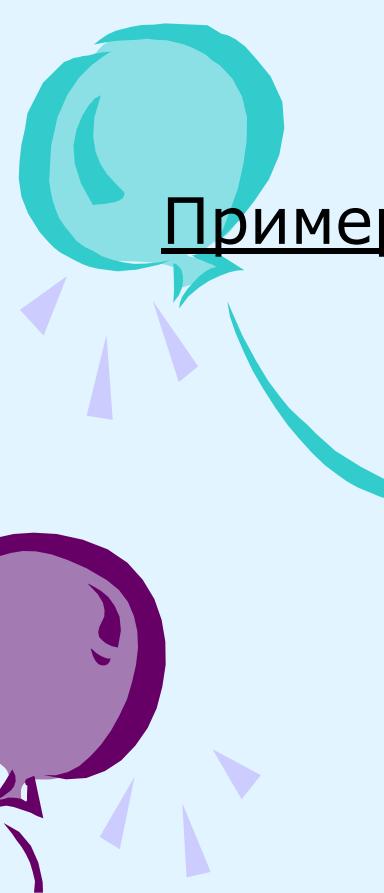
назад



В случае, когда  $AB=BA$ , матрицы А и В называют **перестановочными** или **коммутативными**.

Пример 1. Найти все перестановочные матрицы к матрице

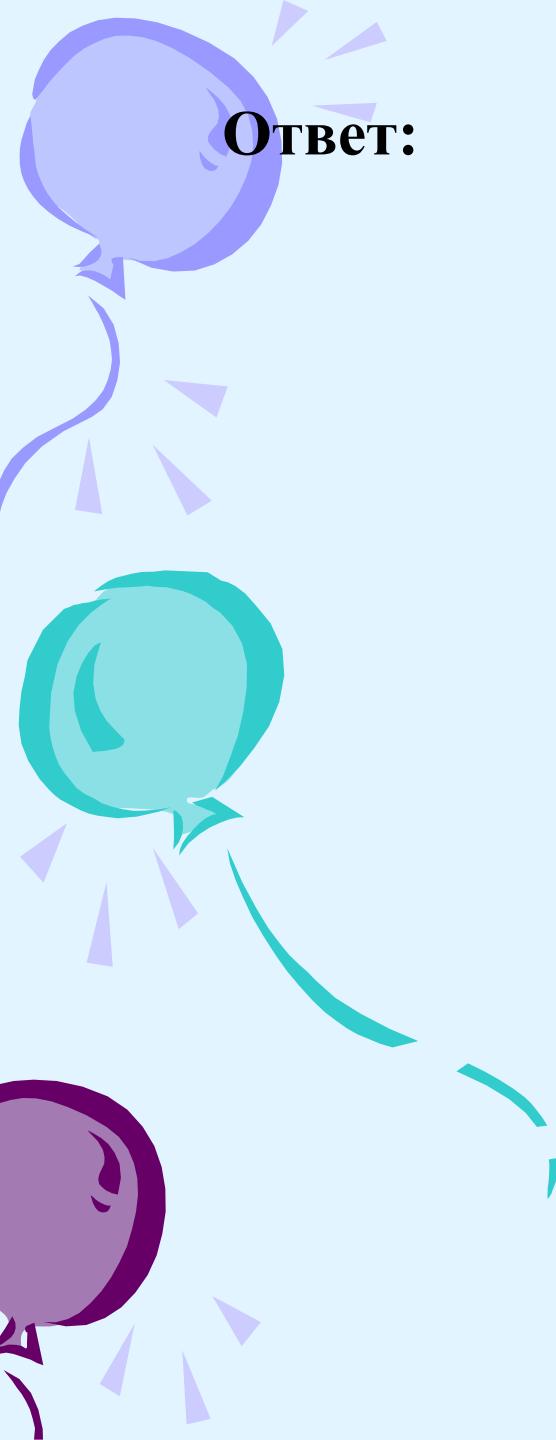
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Пример 2. Найти все перестановочные матрицы к матрице

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

назад



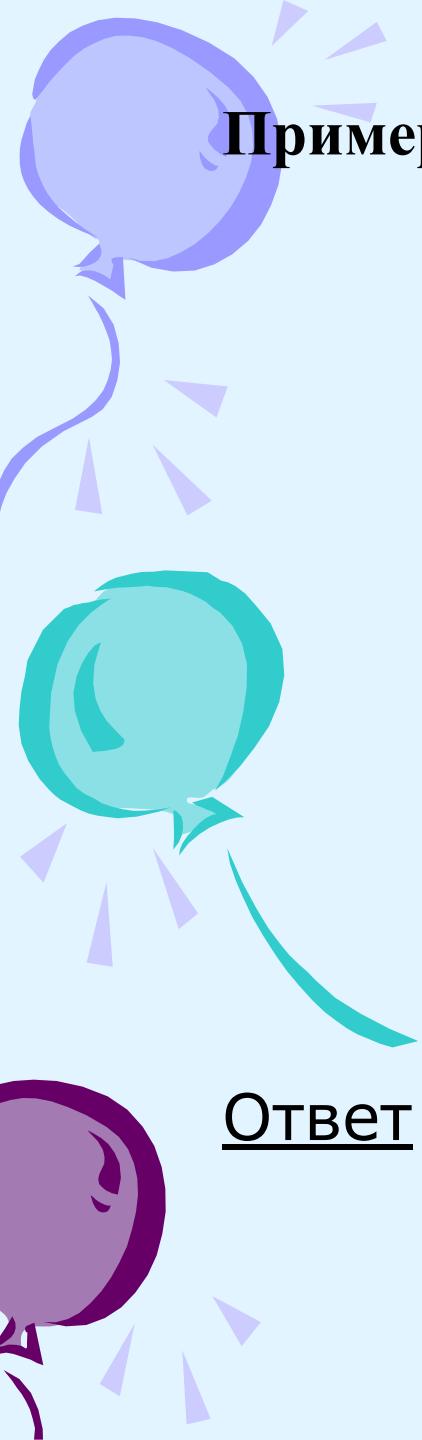
Ответ:

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

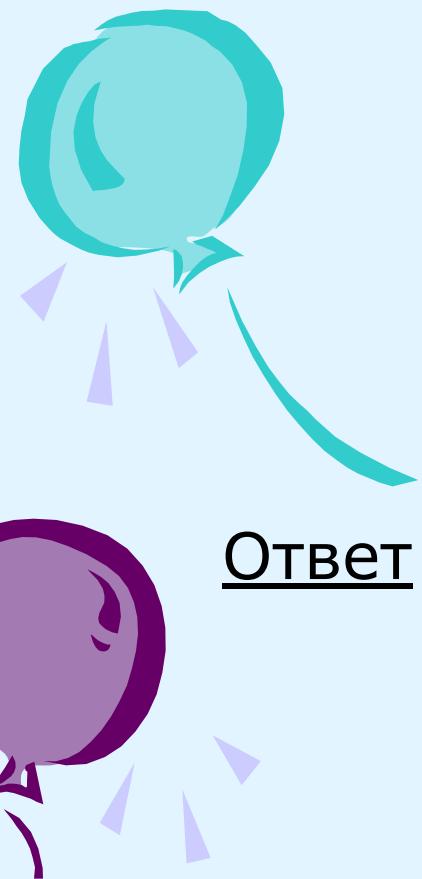
$$B - A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

[назад](#)



Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

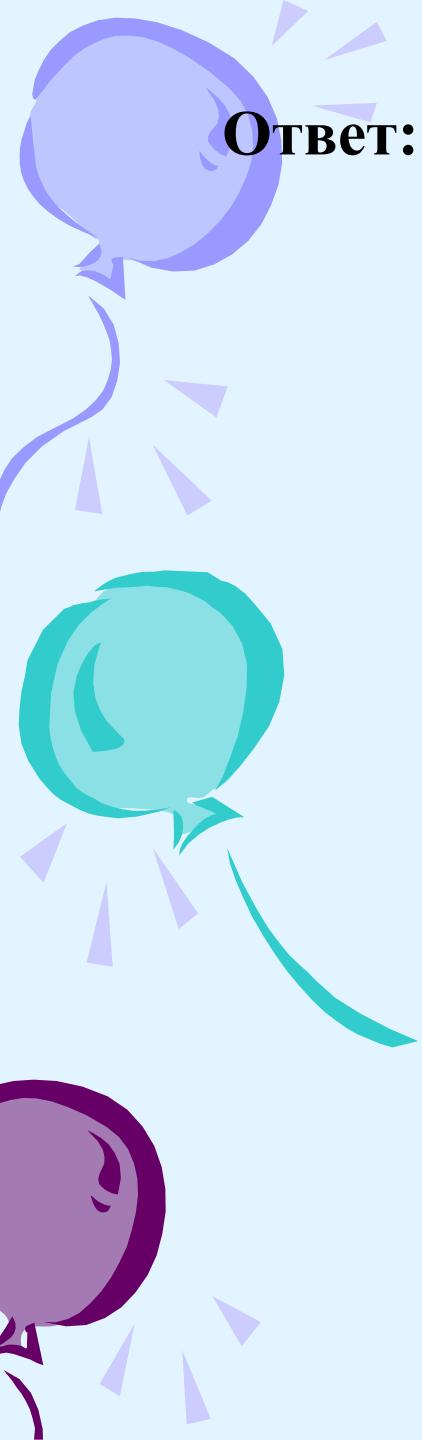

$$2A = ?$$

$$-3B = ?$$

$$4B - 7A = ?$$

Ответ

назад



Ответ:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$-3B = \begin{pmatrix} 15 & -18 \\ -21 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4B - 7A = \begin{pmatrix} -34 & 3 \\ 28 & -28 \\ 20 & -59 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

## Свойства операции транспонирования:

$$1) \left( A^T \right)^T = A$$

$$2) \left( A + B \right)^T = A^T + B^T$$

$$3) \left( A \cdot B \right)^T = B^T A^T$$

назад



Матрица А называется ***согласованной*** с матрицей В, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В:

**Например:**

1)  $\vec{A}_{m \times n}, \quad B_{n \times k}$

2)  $\vec{A}_{2 \times 4}, \quad B_{4 \times 1}$

3)  $\vec{A}_{m \times 2}, \quad B_{2 \times k}$



**назад**

## Пример

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = ?$$

$$B \cdot A = ?$$

$$\vec{A}^T \cdot B = ?$$

$$B^T \cdot A = ?$$

$$\vec{A}^T \cdot B^T = ?$$

$$B^T \cdot \vec{A}^T = ?$$

Ответ

назад

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 12 \\ -4 & 35 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ ,  $A^T \cdot B$ ,  $B^T \cdot A$ ,  $A^T \cdot B^T$  і әләүелділік үшін

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix}$$

назад

## Свойства операции умножение матриц:

1. Свойство сочетательности или ассоциативности

$$(AB)C = A(BC)$$

2.

$$\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$$

3. Свойство распределительности (дистрибутивности)  
справа и слева относительно сложения матриц

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$C(A+B) = CA + CB$$

[назад](#)

## Решение(Пример 1):

1)  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  общий вид всех перестановочных матриц

2) Применим определение перестановочных матриц  
 $AB=BA$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+3b \\ c & -2c+3d \end{pmatrix}$$

Получаем:  $\begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a + 3b \\ c & -2c + 3d \end{pmatrix}$

3) По определению равных матриц

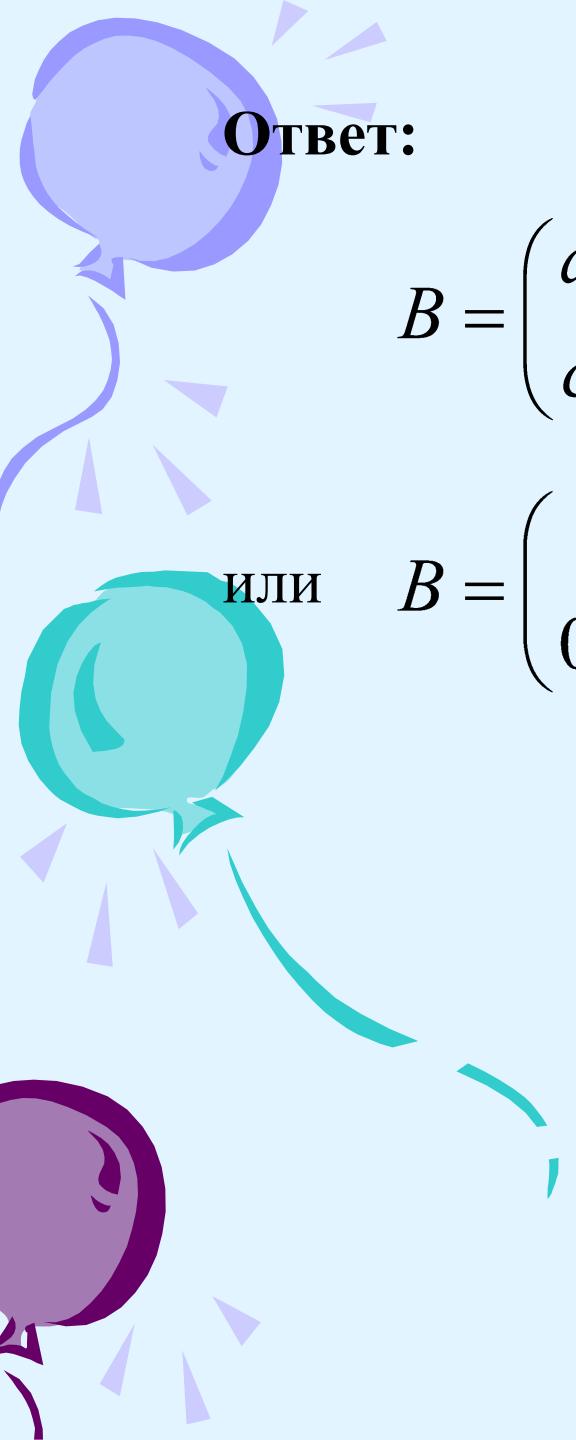
$$\begin{cases} a - 2c = a \\ b - 2d = -2a + 3b \\ 3c = c \\ 3d = -2c + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in R \\ b = a - d \\ c = 0 \\ d \in R \end{cases}$$

4) Общий вид всех перестановочных матриц

$$B = \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

5) Проверка

[назад](#)



Ответ:

$$B = \begin{pmatrix} a & 4c \\ c & \text{или} \\ & 2c + a \end{pmatrix}$$

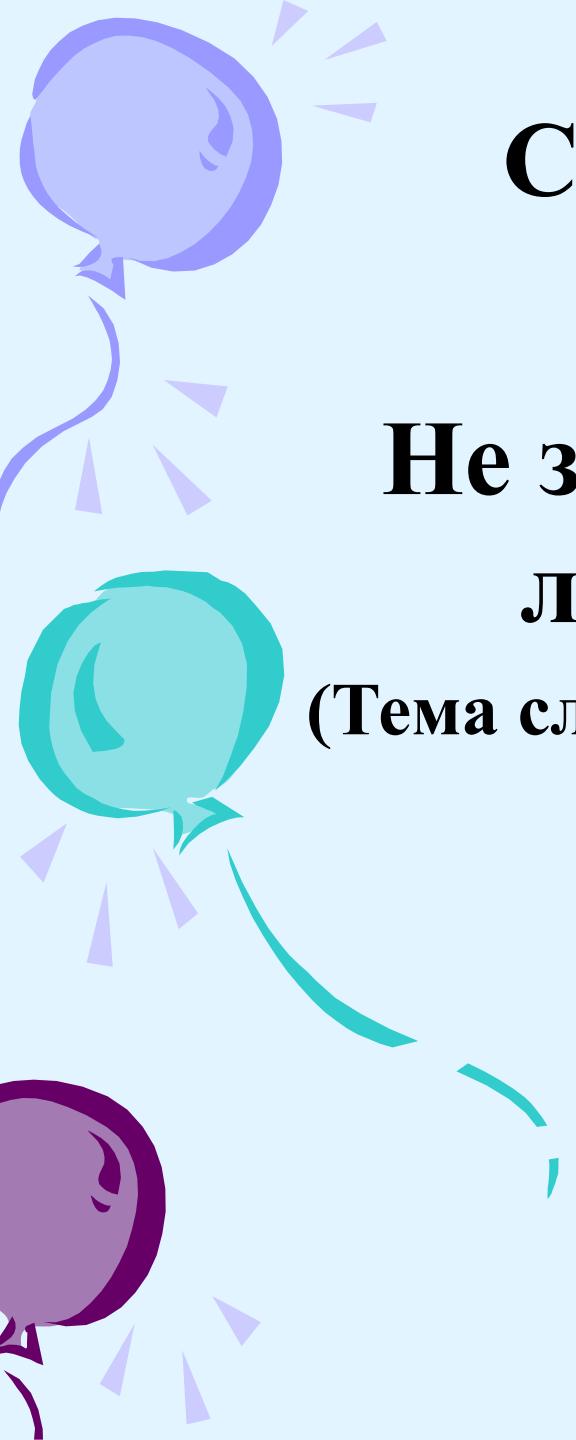
$$B = \begin{pmatrix} d - 2c & 4c \\ c & d \end{pmatrix}$$

или

$$B = \begin{pmatrix} a & 2d - 2a \\ 0,5d - 0,5a & d \end{pmatrix}$$



назад



**Спасибо за внимание!**

**Не забывайте готовиться к  
лекциям и семинарам!**

**(Тема следующей лекции «Определители»)**

**Удачи!**