Новый подход к решению систем уравнений в задачах дискретного логарифмирования

Выполнила: Савельева А.А.
Научный руководитель: проф., к. т.н. Авдошин С.М.

Криптографические системы, основанные на сложности дискретного логарифмирования

- Схема открытого распределения ключей Диффи-Хеллмана
- Схема ЭЦП Эль-Гамаля
- ГОСТ Р34.10-2001(Россия)
- ANSI X9.62/63-2001 (США)

Алгоритмы дискретного логарифмирования в конечных полях, использующие факторную базу

- Алгоритм Адлемана
- Алгоритм COS
- Index-calculus
- Решето числового поля

Решение систем линейных уравнений в кольцах вычетов

Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. - М.: МЦНМО, 2004 .

Постановка задачи

Решить систему n линейных уравнений с m неизвестными:

$$a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,m}x_m = b_1$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,m}x_m = b_n$$

Операции сложения и умножения определены по правилам:

$$\left(\forall c, d \in \mathbf{Z}_p\right) \quad \begin{aligned} c + d &\equiv (c + d) \bmod p \\ c \cdot d &\equiv (c \cdot d) \bmod p \end{aligned}$$

(здесь p - некоторое целое положительное число)

Анализ методов решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов

Сведение задачи к :

- решению семейства систем над полями Галуа
- решению системы над кольцом целых чисел
- решению уравнения над кольцом матриц

Анализ методов решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов

Сведение задачи к :

- решению семейства систем над простыми полями
- решению системы над кольцом целых чисел
- решению уравнения над кольцом матриц

Метод сведения к решению системы над простыми полями: пример

$$\begin{cases} 26x+3y=4 \\ 9x+34y=1 \end{cases} \pmod{36}$$

Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. - М.: Институт проблем информационной безопасности МГУ, МЦНМО, 2004 .

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{cases} 26x+3y=4 \\ 9x+34y=1 \end{cases} \pmod{2^2} \qquad \begin{cases} 26x+3y=4 \\ 9x+34y=1 \end{cases} \pmod{3^2}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \pmod{4} \qquad \begin{cases} 8x+3y=4 \\ 7y=1 \end{cases} \pmod{9}$$

Метод сведения к решению системы над простыми полями: пример (продолжение)

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \pmod 4$$

① $$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cdot 2 \\ y = y_0 + y_1 \cdot 2 \end{cases} \pmod 4$$

② $$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \pmod 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 = 0 \\ 1 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 = 1 \end{cases} \pmod 2$$

② $$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

Метод сведения к решению системы над простыми полями: пример (продолжение)

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \pmod 4$$

1 $$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cdot 2 \\ y = y_0 + y_1 \cdot 2 \end{cases} \pmod 4$$

3 $$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 2 \cdot y_1 = 2 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot y_1 = 0 \end{cases} \pmod 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 = 1 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 = 0 \end{cases} \pmod 2$$

2 $$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

3 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

Метод сведения к решению системы над простыми полями: пример (продолжение)

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=1 \end{cases} \pmod 4$$

1 $$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cdot 2 \\ y = y_0 + y_1 \cdot 2 \end{cases} \pmod 4$$

4 $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pmod 4$$

2 $$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

3 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

Метод сведения к решению системы над простыми полями: пример (продолжение)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pmod 4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \pmod 9 \end{cases}$$

По Китайской теореме об остатках:

$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 22 \end{cases} \pmod{36}$$

Недостатки метода сведения к решению семейства систем над простыми полями

- Решение не одной, а нескольких систем
- Факторизация числа *p*: открытая проблема современной теории чисел (не существует алгоритма с полиномиальной сложностью)

Анализ методов решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов

Сведение задачи к :

- решению семейства систем над простыми полями
- решению системы над кольцом целых чисел
- решению уравнения над кольцом матриц

Метод сведения к решению системы над кольцом целых чисел (1): пример

- Сведение:

$$\begin{cases} 26x + 3y + 36v_1 = 4 \\ 9x + 34y + 36v_2 = 1 \end{cases}$$

- Общее решение:

Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика. Пер. с франц. - М.: Мир, 1999.

$$\begin{cases} x = 5653025 + t_0 \cdot 1224 + t_1 \cdot (-21492) \\ y = -1496390 + t_0 \cdot (-324) + t_1 \cdot 5688 \\ v_1 = -3958042 + t_0 \cdot (-857) + t_1 \cdot 15048 \\ v_2 = 0 + t_0 \cdot 0 + t_1 \cdot 1 \end{cases}, \quad t_0, t_1 \in \mathbf{Z}$$

экспоненциальный рост коэффициентов

Метод сведения к решению системы над кольцом целых чисел (2): модификации

Способы избежать экспоненциального роста коэффициентов:

- Использование диагональной формы Смита
- Модификация метода Гаусса

} Полиномиальный рост коэффициентов

Кузнецов М.И., Бурланков Д.Е., Чирков А.Ю., Яковлев В.А. Компьютерная алгебра: Учебник. - Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского. – 2002.

Недостаток:

- Асимптотическая временная и емкостная сложность значительно больше сложности метода Жордана решения систем в полях Галуа

Анализ методов решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов

Сведение задачи к :

- решению семейства систем над простыми полями
- решению системы над кольцом целых чисел
- решению уравнения над кольцом матриц

Метод сведения к уравнению над кольцом матриц

$$Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$$

Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра (в 2-х т). Т. I - М.: Гелиос АРВ, 2003

Елизаров В.П. Успехи мат. наук. – 1993. Т. 48, вып. 2. с. 181-182.

Эффективный алгоритм вычисления обратной матрицы

?

Предложенный метод

- В основе:
  - Расширенный алгоритм Евклида
  - Схема Жордана
- Применим для:
  - колец вычетов
  - полей Галуа
- Эффективность:
  - По временной и емкостной сложности эквивалентен классическим алгоритмам Жордана и Гаусса решения систем в полях Галуа

Расширенный алгоритм Евклида

- **Вход**: $a, b \in \mathbf{Z}_+$
- **Выход**: d, x, y, r, s такие, что

$$\begin{cases} d = НОД(a,b) = x \cdot b + y \cdot \\ 0 = a \cdot r + b \cdot s \end{cases}$$

АЛГ *Евклид(a,b)*

$$\begin{pmatrix} d & x & y \\ n & r & s \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ПОКА $n \geq 0$ **ЦИКЛ**

$$c \leftarrow \lfloor d / n \rfloor$$

$$\begin{pmatrix} d & x & y \\ n & r & s \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & x & y \\ n & r & s \end{pmatrix}$$

К.Ц.

К.АЛГ.

Схема Жордана

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1}\ \cdots\ a_{1,m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots\ \quad\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1}\ \cdots\ a_{n,m} & b_n \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cdots & 0 & 0\ a'_{1,i_{n+1}}\ \cdots\ a'_{1,i_m} & b'_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots\ \quad\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0\ a'_{n,i_{n+1}}\ \cdots\ a'_{n,i_m} & b'_n \end{array}\right)$$

Матрицы над кольцом

Опр.1 Множество всех матриц размером m x n с элементами из кольца R будем обозначать через $R_{m,n}$

Элементарными преобразованиями строк матрицы $A \in R_{m,n}$ называют:

- умножение любой ее строки на обратимый элемент кольца R;
- прибавление к любой ее строке другой строки, умноженной на произвольный элемент кольца R;
- транспозицию строк.

Опр.2 Матрица $B \in R_{m,n}$ называется ***строчно эквивалентной матрице*** $A \in R_{m,n}$, если она может быть получена из A с помощью конечной последовательности элементарных преобразований строк.

Применение алгоритма Евклида к матрице

Коэффициенты Безу для $a=26$, $b=9$:

$$1 = 26\cdot(35) + 9\cdot(3) \qquad 0 = 26\cdot(9) + 9\cdot(10)$$

$$\begin{array}{l}[1]\\[2]\end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 26 & 3 & 4 \\ 9 & 34 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]-[2]\cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 7 & 2 \\ 9 & 34 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 34 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}[1]\\[2]\end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 34 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]-[2]\cdot 1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 27 & 35 \\ 8 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]-[1]\cdot 8} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 27 & 35 \\ 0 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}[1]\\[2]\end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 7 & 2 \\ 1 & 27 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]-[2]\cdot 8} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & 10 \\ 1 & 27 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 27 & 35 \\ 0 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}[1]\\[2]\end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 27 & 35 \\ 0 & 7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{[2]\cdot 31} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 27 & 35 \\ 0 & 1 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{[1]-[2]\cdot 27} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 22 \end{array}\right)$$

Работа алгоритма

- Решение системы:

$$\begin{cases} 26x + 3y = 4 \\ 9x + 34y = 1 \end{cases} \pmod{36}$$

$$\begin{matrix}[1]\\[2]\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c} 26 & 3 & 4 \\ 9 & 34 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[[2]'=[1]\cdot 9+[2]\cdot 10]{[1]'=[1]\cdot 35+[2]\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 27 & 35 \\ 0 & 7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[[2]'=[2]\cdot 31]{[1]'=[1]+[2]\cdot 27} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 22 \end{array}\right)$$

- Вычисление обратной матрицы:

$$\begin{matrix}[1]\\[2]\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 26 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 34 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[[2]'=[1]\cdot 9+[2]\cdot 10]{[1]'=[1]\cdot 35+[2]\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 27 & 35 & 3 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}[1]\\[2]\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 27 & 35 & 3 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[[2]'=[2]\cdot 31]{[1]'=[1]+[2]\cdot 27} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 26 & 21 \\ 0 & 1 & 27 & 22 \end{array}\right)$$

Алгоритм

- **Вход**: $A = (a_{ij})_{n \times m}, a_{ij} \in \mathbf{Z}_p$ *{расширенная матрица}*
- **Выход**: A *{преобразованная матрица}*

АЛГ *Жордан(A, n, m, p)*

ДЛЯ $i=1$ **ДО** n **ЦИКЛ**

{обнуляем эл-ты i-го столбца ниже i-й строки}

ДЛЯ $j=i+1$ **ДО** n **ЦИКЛ**

$$\textit{ВЫЧИСЛИТЬ} \quad x', y', r', s' : \left\{ \begin{array}{c} НОД(a_{ii}, a_{ji}) = a_{ii} \cdot x' + a_{ji} \cdot y' \\ 0 = a_{ii} \cdot r' + a_{ji} \cdot s' \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} A(i,*) \\ A(j,*) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x' & y' \\ r' & s' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A(i,*) \\ A(j,*) \end{pmatrix}$$

К.Ц. *{для j}*

Алгоритм (продолжение)

ЕСЛИ $\text{НОД}(a_{ii}, p)>1$

ТО выйти из алгоритма *{матрица вырождена}*

ИНАЧЕ

{обнуляем элементы i-го столбца выше i-й строки}

$$A(i,*) := A(i,*) \cdot a_{i,i}^{-1}$$

$$A(j,*) \leftarrow A(j,*) - A(i,*) \cdot a_{ji}, \quad j = \overline{1, i-1}$$

К.Е.

ВЕРНУТЬ(А)

К.АЛГ.

Временная сложность алгоритмов

Метод сведения к полям Галуа (при $p = \prod_{k=1}^{t} q_k^{\alpha_k}$)	Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. - М.: Институт проблем информационной безопасности МГУ, МЦНМО, 2004
Метод сведения к диофантовым уравнениям (с построением матрицы Смита)	Кузнецов М.И., Бурланков Д.Е., Чирков А.Ю., Яковлев В. А. Компьютерная алгебра: Учебник. - Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского. – 2002.
Метод сведения к уравнению над кольцом матриц	Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра (в 2-х т). Т. I - М.: Гелиос АРВ, 2003 Елизаров В.П. Успехи мат. наук.–1993.Т. 48, вып. 2.
Метод, предложенный в данной работе	Авдошин С.М., Савельева А.А. Свид. Об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005612258: «Программа решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов». Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.09.2005

Временная сложность алгоритмов

Метод сведения к полям Галуа (при $p = \prod_{k=1}^{t} q_k^{\alpha_k}$)	$O\left(n \cdot (n \cdot m \cdot \sum_{k=1}^{t} \alpha_k + \log p) + \sqrt{\ln p \ln\ln p} \cdot e^{\sqrt{\ln p \ln\ln p}} \right)$
Метод сведения к диофантовым уравнениям (с построением матрицы Смита)	Кузнецов М.И., Бурланков Д.Е., Чирков А.Ю., Яковлев В. А. Компьютерная алгебра: Учебник. - Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского. – 2002.
Метод сведения к уравнению над кольцом матриц	Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра (в 2-х т). Т. I - М.: Гелиос АРВ, 2003 Елизаров В.П. Успехи мат. наук.–1993.Т. 48, вып. 2.
Метод, предложенный в данной работе	Авдошин С.М., Савельева А.А. Свид. Об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005612258: «Программа решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов». Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.09.2005

Временная сложность алгоритмов

Метод сведения к полям Галуа (при $p = \prod_{k=1}^{t} q_k^{\alpha_k}$)	$O\left(n \cdot (n \cdot m \cdot \sum_{k=1}^{t} \alpha_k + \log p) + \sqrt{\ln p \ln\ln p} \cdot e^{\sqrt{\ln p \ln\ln p}} \right)$
Метод сведения к диофантовым уравнениям (с построением матрицы Смита)	$O\left(n^2 m^2 \log p \right)$
Метод сведения к уравнению над кольцом матриц	Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра (в 2-х т). Т. I - М.: Гелиос АРВ, 2003 Елизаров В.П. Успехи мат. наук.–1993.Т. 48, вып. 2.
Метод, предложенный в данной работе	Авдошин С.М., Савельева А.А. Свид. Об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005612258: «Программа решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов». Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.09.2005

Временная сложность алгоритмов

Метод сведения к полям Галуа (при $p = \prod_{k=1}^{t} q_k^{\alpha_k}$)	$O\left(n \cdot (n \cdot m \cdot \sum_{k=1}^{t} \alpha_k + \log p) + \sqrt{\ln p \ln\ln p} \cdot e^{\sqrt{\ln p \ln\ln p}} \right)$
Метод сведения к диофантовым уравнениям (с построением матрицы Смита)	$O\left(n^2 m^2 \log p \right)$
Метод сведения к уравнению над кольцом матриц	$O(n^n)$
Метод, предложенный в данной работе	Авдошин С.М., Савельева А.А. Свид. Об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005612258: «Программа решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов». Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 02.09.2005

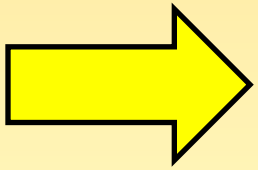
Временная сложность алгоритмов

Метод сведения к полям Галуа (при $p = \prod_{k=1}^{t} q_k^{\alpha_k}$)	$O\left(n \cdot (n \cdot m \cdot \sum_{k=1}^{t} \alpha_k + \log p) + \sqrt{\ln p \ln\ln p} \cdot e^{\sqrt{\ln p \ln\ln p}} \right)$
Метод сведения к диофантовым уравнениям (с построением матрицы Смита)	$O\left(n^2 m^2 \log p \right)$
Метод сведения к уравнению над кольцом матриц	$O(n^n)$
Метод, предложенный в данной работе	$O\left(n \cdot (nm + \log p) \right)$

Решение систем, возникающих при дискретном логарифмировании

- **Свойства:**
  - **Большой размер (миллионы уравнений с миллионами неизвестных)**
  - **Разреженные матрицы**

Поля:
структурированное гауссово исключение



Кольца:
модифицированный алгоритм структурированного гауссова исключения

Заключение

Результаты, полученные в данной работе:

- Проведен анализ известных методов решения систем линейных уравнений над кольцом вычетов
- Разработан алгоритм, эквивалентный по сложности методам Жордана и Гаусса решения систем линейных уравнений над полями Галуа
- Программа, реализующая разработанный алгоритм, зарегистрирована Федеральной службой по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам (Роспатент)
- Результаты исследований опубликованы в журнале «Информационные технологии» (№2, 2006)

Направление дальнейшей работы

- Теоретическое и экспериментальное исследование влияния полученного метода на временную сложность алгоритмов дискретного логарифмирования, использующие факторную базу:
  - Алгоритм Адлемана
  - Index-calculus
  - Алгоритм COS
  - Решето числового поля

Кольца вычетов

Операции сложения и умножения определяют ***кольцо вычетов по модулю p*** $(\mathbf{Z}_p)$. Оно является коммутативным кольцом с единицей.

Опр.1 ***Делителем нуля*** в произвольном кольце R называется любой его элемент $a \neq 0,$ для которого в R существует элемент $b \neq 0,$ удовлетворяющий условию $a \cdot b = 0$ или $b \cdot a = 0$

Опр.2 ***Обратимым элементом*** в произвольном кольце R называется любой его элемент $a \neq 0,$ для которого в R существует обратный элемент a^{-1}, удовлетворяющий условию $a \cdot a^{-1} = 1$ или $a^{-1} \cdot a = 1$

Обратный элемент

Элемент $x^{-1} \in \mathbf{Z}_p$ называется ***обратным*** к $x \in \mathbf{Z}_p$, если

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

Для нахождения обратного элемента нужно решить линейное диофантово уравнение:

$$u \cdot x + v \cdot p = 1$$

Уравнение разрешимо относительно u и v тогда и только тогда, когда $НОД(x,p)=1$; в этом случае $x^{-1} = u$. Для вычисления u и v (***коэффициентов Безу***) используется ***расширенный алгоритм Евклида***.

Пример решения системы в поле Галуа порядка 37

$$\begin{cases} 26x + 3y = 4 \\ 9x + 34y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}[1]\\[2]\end{matrix}\begin{pmatrix} 26 & 3 & 4 \\ 9 & 34 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]\cdot\left(26^{-1}=10\right)} \begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 \\ 9 & 34 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]\cdot 9} \begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 \\ 0 & 23 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}[1]\\[2]\end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 \\ 0 & 23 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]\cdot\left(23^{-1}=29\right)} \begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 \\ 0 & 1 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[2]\cdot 30} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

Пример решения системы в кольце вычетов по модулю 36

$$26 \cdot 18 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 36)$$

$$3 \cdot 12 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 36)$$

$$\begin{cases} 26x + 3y = 4 \\ 9x + 34y = 1 \end{cases}$$

$$9 \cdot 4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 36)$$

$$34 \cdot 18 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 36)$$

Все коэффициенты системы являются делителями нуля, т.е. необратимы. Однако решение существует и единственно:

$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 22 \end{cases}$$