ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 2:

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть материальная точка движется вдоль оси x. Тогда во время движения y=z=0.

$$\begin{cases} m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

необходимые условия движения по прямой

Эти условия не достаточны! (см. пример)

Для того, чтобы материальная точка двигалась по прямой необходимо и достаточно, чтобы действующая на нее сила была все время параллельна начальной скорости движения точки.

Д-во достаточности: Ось x направим по начальной скорости, а начало координат совместим с начальным положением точки.

$$F_y = F_z = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{y} = C_1,\ y = C_1 t + C_3 \\ \dot{z} = C_2,\ z = C_2 t + C_4 \end{matrix} \xrightarrow[z(0)=0,\ \dot{z}(0)=0]{y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0} \begin{matrix} C_1 = C_3 = 0 \\ C_2 = C_4 = 0 \end{matrix}$$

2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ: РЕШЕНИЯ В КВАДРАТУРАХ

В силу нелинейности дифференциального уравнения, определение его решения в общем случае возможно только численно (приближенно).

Однако существуют частные случаи, в которых нахождение решения уравнения при выполнении начальных условий сводится к *квадратурам – взятию интегралов*.

Выделим три таких случая:

$$F = F(t); \qquad F = F(x); \qquad F = F(\dot{x})$$

3. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ **F(t)**

$$\boxed{m\ddot{x} = F(t)}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}F(t)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F(t)dt + C_1$$

$$x = \frac{1}{m}\int\left[\int F(t)dt\right]dt + C_1 t + C_2$$

4. ПРИМЕР: ГАРМОНИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩАЯСЯ СИЛА

$$m\ddot{x} = F(t)$$

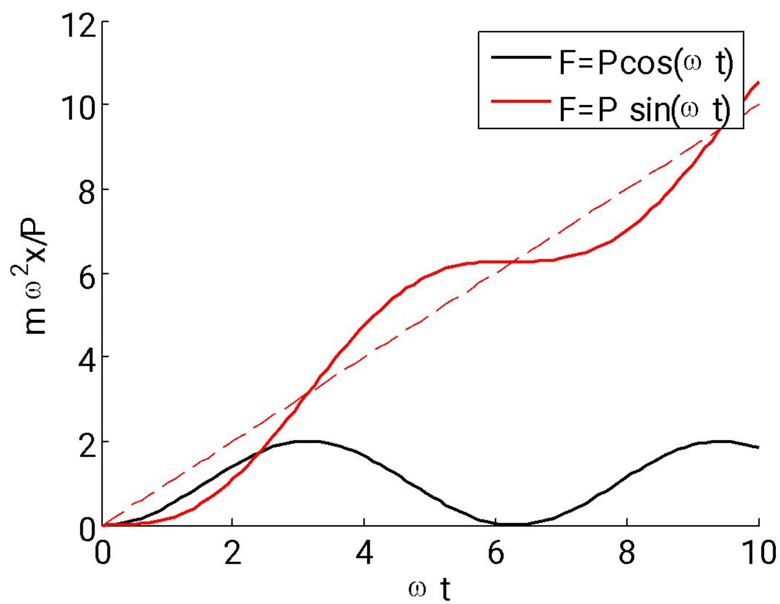
$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$F(t) = P\sin\omega t$$

$$x(t) = -\frac{P}{m\omega^2}\sin\omega t + C_1 t + C_2$$

$$C_2 = 0,\ C_1 = \frac{P}{m\omega}$$

$$x(t) = \frac{P}{m\omega^2}\left(\omega t - \sin\omega t\right)$$



$$F(t) = P\cos\omega t$$

$$x(t) = -\frac{P}{m\omega^2}\cos\omega t + C_1 t + C_2$$

$$C_2 = \frac{P}{m\omega^2},\ C_1 = 0$$

$$x(t) = \frac{P}{m\omega^2}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

5. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ F(x)

$$\boxed{m\ddot{x} = F(x)} \;\Big|\times \dot{x} \;\Longrightarrow\; m\dot{x}\ddot{x} = F(x)\dot{x}$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = \frac{m}{2}\frac{d\left(\dot{x}\right)^2}{dt} \qquad F(x)\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\int F(x)dx\right)$$

$$\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1}$$

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1}}$$

$$\boxed{t = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1}} + C_2} \;\Longrightarrow\; t = \Phi\left(x; C_1, C_2\right) \;\Longrightarrow\; x = \varphi\left(t; C_1, C_2\right)$$

6. ПРИМЕР : ПАДЕНИЕ ЗЕМЛИ НА СОЛНЦЕ

$$\dot{x}\times \left| \quad \ddot{x} = -\frac{fM}{x^2} \right. \qquad x(0)=x_0 \qquad \dot{x}(0)=0 \qquad M = 2\cdot 10^{30}\ кг \qquad x_0 = 1.5\cdot 10^{11}\ м$$

$$f = 6.6\cdot 10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot с^2}$$

$$\Downarrow$$

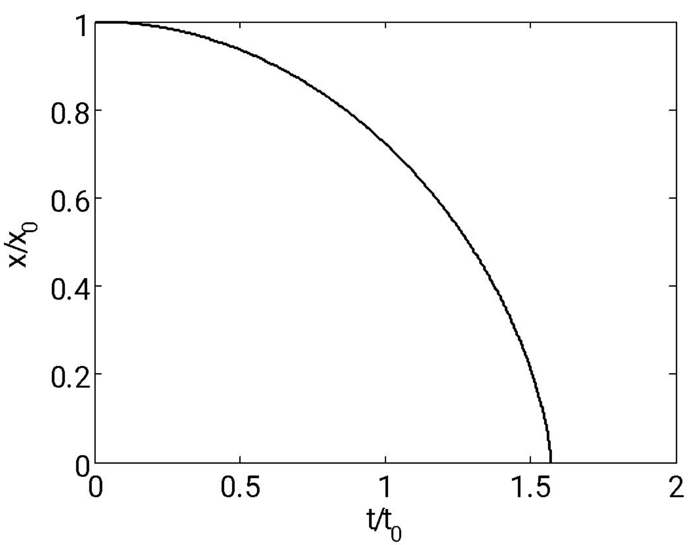
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = -\frac{fM}{x^2}\dot{x} = fM\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = fM\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\sqrt{2fM\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)} \Rightarrow \sqrt{2fM}\,t = \int_x^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x^{-1}-x_0^{-1}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2fM}\,t = x_0^{3/2}\left(\sqrt{\frac{x}{x_0}}\sqrt{1-\frac{x}{x_0}} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{x_0}} + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\frac{t}{t_0} = \sqrt{\frac{x}{x_0}}\sqrt{1-\frac{x}{x_0}} - \arcsin\sqrt{\frac{x}{x_0}} + \frac{\pi}{2}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{x_0^3}{2fM}} = 42\ дня \qquad t_{fin} = \frac{\pi}{2}t_0 \approx 2\ мес.$$

7. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ **F(dx/dt)**

СПОСОБ 1

$$\boxed{m\ddot{x} = F(\dot{x})} \Rightarrow v = \dot{x} \Rightarrow m\dot{v} = F(v) \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$$

$$\boxed{x = \int \varphi(t, C_1)dt + C_2} \Leftarrow \dot{x} = \varphi(t, C_1) \Leftarrow t = \Phi(\dot{x}, C_1) \Leftarrow \int \frac{dv}{F(v)} + C_1 = \frac{t}{m}$$

СПОСОБ 2

$$\boxed{m\ddot{x} = F(\dot{x})} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{mvdv}{F(v)} = dx$$

$$\boxed{t = \int \frac{dx}{\psi(x, C_1)} + C_2} \Leftarrow \dot{x} = \psi(x, C_1) \Leftarrow x = m\int \frac{vdv}{F(v)} + C_1$$

8. ПРИМЕР: ПАДЕНИЕ ТЕЛА С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Точка массы m падает на Землю из состояния покоя под действием постоянной силы тяжести. Найти скорость и закон движения точки, если сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ($R = k^2 m v^2$, где k — постоянная).

$$\boxed{m\ddot{x} = mg - mk^2 x^2} \qquad \dot{v} = g - k^2 v^2 \qquad \frac{dv}{g - k^2 v^2} = dt \qquad \frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv}{\sqrt{g} - kv} = t + \cancel{C_1}$$

$$v(0) = 0$$

$$dx = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{2k\sqrt{g}t} - 1}{e^{2k\sqrt{g}t} + 1} dt = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{k\sqrt{g}t} - e^{-k\sqrt{g}t}}{e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}} dt = \frac{1}{k^2} \frac{d\left(e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}\right)}{e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}}$$

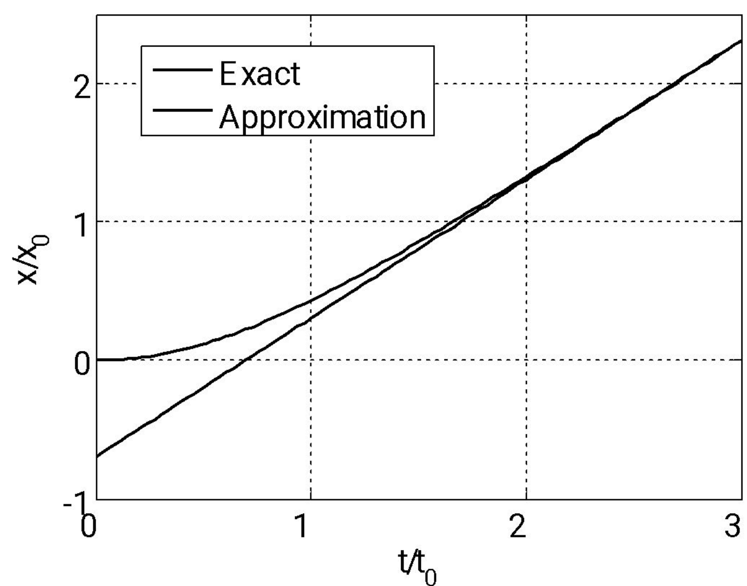
$$x = \frac{1}{k^2} \ln\left(e^{k\sqrt{g}t} + e^{-k\sqrt{g}t}\right) + C_2$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln 2$$

$$\boxed{\frac{x}{x_0} = \ln\left(\frac{e^{t/t_0} + e^{-t/t_0}}{2}\right)} \qquad x_0 = \frac{1}{k^2}, \quad t_0 = \frac{1}{k\sqrt{g}}$$

Приближенное решение

$$t \gg t_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{g}}{k} t - \frac{\ln 2}{k^2}$$



9. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Исходная задача $\boxed{\dot{x} = g - k^2 x^2 \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0}$

Единицы измерения $x[\text{м}] \quad t[\text{с}] \quad \Rightarrow \quad g\left[\text{м/с}^2\right] \quad k^2\left[\text{м}^{-1}\right]$

$x[\text{см}] \quad t[\text{ч}] \quad \Rightarrow \quad g\left[\text{см/ч}^2\right] \quad k^2\left[\text{см}^{-1}\right]$

$x[\text{миля}] \quad t[\text{сут}] \quad \Rightarrow \quad g\left[\text{миля/сут}^2\right] \quad k^2\left[\text{миля}^{-1}\right]$

Численное значение констант g и k зависит от единиц измерения. Нельзя ли выбрать «родные» для задачи единицы, так, чтобы она стала максимально простой?

$$\bar{t} = t/t_0 \qquad \bar{x} = x/x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(x_0\bar{x}\right)}{d\left(t_0\bar{t}\right)} = \frac{x_0}{t_0}\frac{d\,\bar{x}}{d\,\bar{t}} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_0}{t_0^2}\frac{d^2\,\bar{x}}{d\,\bar{t}^2}$$

Исходная задача $\Rightarrow$

$$\frac{x_0}{t_0^2}\frac{d^2\bar{x}}{d\,\bar{t}^2} = g - k^2\frac{x_0^2}{t_0^2}\left(\frac{d\,\bar{x}}{d\,\bar{t}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\bar{x}}{d\,\bar{t}^2} = \frac{t_0^2}{x_0}g - k^2 x_0\left(\frac{d\,\bar{x}}{d\,\bar{t}}\right)^2$$

$$\frac{t_0^2}{x_0}g = 1,\ k^2 x_0 = 1 \quad \Rightarrow x_0 = k^{-2},\ t_0 = \frac{1}{k\sqrt{g}}$$

$\boxed{\dot{x} = 1 - \dot{x}^2}$

Черточки над x и t для простоты записи опущены

10. ПРЕИМУЩЕСТВА БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Проще решать. Не нужно таскать константы, труднее ошибиться
- Задачу нужно решить лишь один раз, а не для каждого набора параметров. Все остальное делается простым растяжением координат x и t
- Свойства изучаемого процесса проще анализировать если решение есть функция одной переменной

$$x = k^{-2} F\left(k\sqrt{g}t\right) \quad \text{лучше чем} \quad x = F\left(t, k^2, g\right)$$

11. ПРИМЕР: ПАДЕНИЕ ТЕЛА С ЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Та же задача, но $R = k^2 mv$, где k — постоянная.

$$\boxed{m\ddot{x} = mg - mk^2 x \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0}$$

Можно было бы решать как и предыдущую. Но рассматриваемое уравнение имеет огромное достоинство: оно принадлежит классу линейных диф. уравнений с постоянными коэффициентами. Метод их решения чрезвычайно прост и общ.

Рассмотрим вначале однородное диф. уравнение второго порядка с постоянными к-ми

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

Для построения его общего решения достаточно найти два частных решения.
Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$-такие решения, то в силу линейности $C_1x_1 + C_2x_1$ -общее решение.
Частные решения легко предъявляются.

$x = e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x} + a\dot{x} + bx = e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_{1,2}$-корни квадратного ур-ния

Общее решение однородного уравнения $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Для построения общего решения неоднородного уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ достаточно найти какое либо его частное решение $x_0(t)$. В силу линейности общим решением будет $x = x_0(t) + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. Общий алгоритм построения $x_0(t)$ будет дан в курсе ДУ. Но во многих случаях $x_0(t)$ просто угадывается

12. ПРИМЕР: ПАДЕНИЕ ТЕЛА С ЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

$$\boxed{m\ddot{x} = mg - mk^2 x \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0}$$

1) Переходим к безразмерным переменным

$$\begin{matrix} \overline{t} = t/t_0 \\ \overline{x} = x/x_0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x_0}{t_0^2}\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2} = g - k^2\frac{x_0}{t_0}\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} \Rightarrow \frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2} = \frac{t_0^2}{x_0}g - k^2 t_0\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} \Rightarrow \begin{matrix} t_0 = k^{-2} \\ x_0 = gk^{-4} \end{matrix}$$

$\boxed{\dot{x} + \dot{x} = 1}$ По-прежнему черточки над x и t для простоты записи опущены

2) Угадывем частное решение $x_0(t) = t$

3) Решаем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1 = -1$

4) Выписываем общее решение $x(t) = x_0(t) + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_1 e^{\lambda_2 t} = t + C_1 + C_2 e^{-t}$

5) Находим произвольные константы из начальных условий

$$x = F(t) = t - 1 + e^{-t}$$

6) Выписываем окончательный результат

$$x = \frac{g}{k^4}F(k^2 t)$$