

# Глава II. Векторная алгебра. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется *векторным исчислением*.

Векторное исчисление подразделяют на *векторную алгебру* и *векторный анализ*. В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

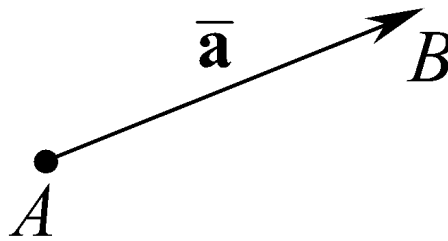
## § 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

### 1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают:  $\overline{AB}$  (где  $A$  – начало вектора, а  $B$  – его конец),  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (или *модулем*) вектора. Обозначают:  $|\overline{AB}|$  или  $|\overline{\mathbf{a}}|$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*. Обозначают:  $\overline{\mathbf{0}}$ .

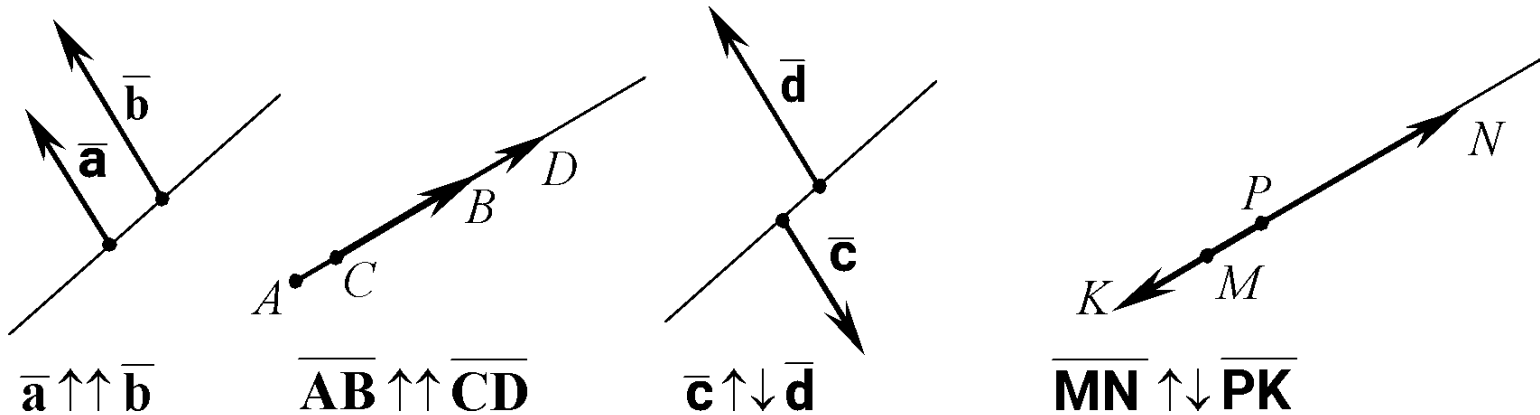
Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными* (*параллельными*).

Записывают:  $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$  – если векторы  $\overline{\mathbf{a}}$  и  $\overline{\mathbf{b}}$  коллинеарные, и  $\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$  – если  $\overline{\mathbf{a}}$  и  $\overline{\mathbf{b}}$  неколлинеарные.

Если векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  – коллинеарные и их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых) или один из лучей  $[AB)$  или  $[CD)$  целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой), то векторы называются *сонаправленными*. В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*.

Записывают:  $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$  – если векторы  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  сонаправленные,  
и  $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$  – если  $\overline{a}, \overline{b}$  противоположно направленные.



Два вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают:  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$ .

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ , лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными (ортогональными)*.

Записывают:  $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$ .

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

## 2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число;    2) Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведением вектора  $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$  на число  $\alpha \neq 0$  называется вектор, длина которого равна  $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$ , а направление совпадает с направлением вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  при  $\alpha > 0$  и противоположно ему при  $\alpha < 0$ .

Если  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$  или  $\alpha = 0$ , то их произведение полагают равным  $\bar{\mathbf{0}}$ .

Обозначают:  $\alpha \bar{\mathbf{a}}$ .

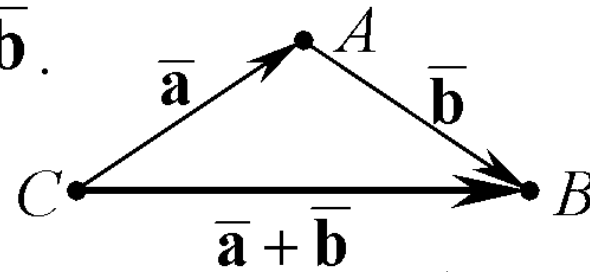
Частный случай: произведение  $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ .

Вектор  $(-1)\bar{\mathbf{a}}$  называют противоположным вектору  $\bar{\mathbf{a}}$  и обозначают  $-\bar{\mathbf{a}}$ .

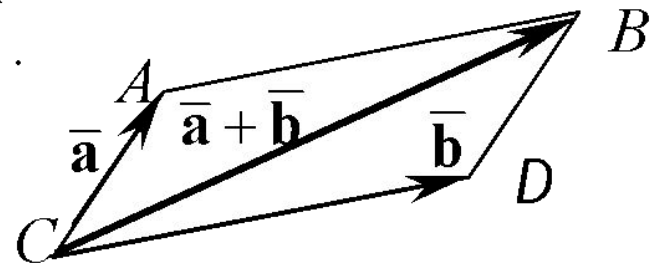
ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

Два вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$ , для некоторого числа  $\alpha \neq 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** (правило треугольника). Пусть даны два вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ . Возьмем произвольную точку  $C$  и построим последовательно векторы  $\overline{CA} = \bar{\mathbf{a}}$  и  $\overline{AB} = \bar{\mathbf{b}}$ . Вектор  $\overline{CB}$ , соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  и обозначается  $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ .

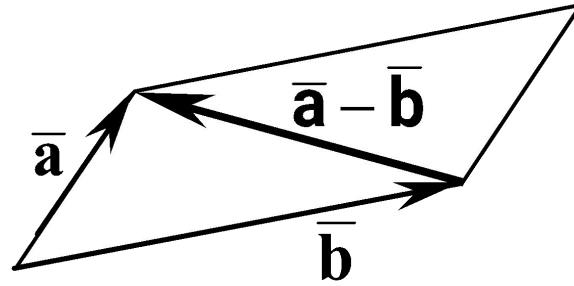


**ОПРЕДЕЛЕНИЕ** (правило параллелограмма). Пусть даны два вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ . Возьмем произвольную точку  $C$  и построим векторы  $\overline{CA} = \bar{\mathbf{a}}$  и  $\overline{CD} = \bar{\mathbf{b}}$ . Суммой векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  будет вектор  $\overline{CB}$ , имеющий начало в точке  $C$  и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $\overline{CA} = \bar{\mathbf{a}}$  и  $\overline{CD} = \bar{\mathbf{b}}$ .



Частный случай: сумма  $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$ .

Сумму  $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$  называют *разностью векторов*  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  и обозначают  $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$ .





# СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

- 1)  $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$  (коммутативность сложения векторов);
- 2)  $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$  (ассоциативность сложения векторов);
- 3)  $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{a}}$ ;
- 4)  $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{0}}$ ;
- 5)  $\alpha(\beta \bar{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\bar{\mathbf{a}}$  (ассоциативность относительно умножения чисел);
- 6)  $(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{a}} = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \beta\bar{\mathbf{a}}$  (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);
- 7)  $\alpha(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \alpha\bar{\mathbf{b}}$  (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);
- 8)  $1\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$ .

# § 7. Понятие линейного пространства

## 1. Определение и примеры

Пусть  $L$  – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа из  $F$  (где  $F$  – множество рациональных, действительных или комплексных чисел).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Множество  $L$  называется линейным пространством над  $F$  если для любых элементов  $a, b, c \in L$  и для любых чисел  $\alpha, \beta \in F$  выполняются условия:*

1.  $a+b=b+a$  (коммутативность сложения элементов из  $L$ );
2.  $(a+b)+c=a+(b+c)$  (ассоциативность сложения элементов из  $L$ );
3. Во множестве  $L$  существует такой элемент  $o$ , что  $a+o=a$ .  
Элемент  $o$  называют нулевым элементом множества  $L$ ;
4. Для любого элемента  $a \in L \exists$  элемент  $-a \in L$  такой, что  $a+(-a)=o$ . Элемент  $-a$  называют противоположным к  $a$ ;
5.  $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$  (ассоциативность относительно умножения чисел);

6.  $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$  (дистрибутивность умножения на элемент из  $L$  относительно сложения чисел);

7.  $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$  (дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из  $L$ );

8.  $1a=a$ .

Линейное пространство над  $\mathbb{R}$  называют еще вещественным (действительными) линейным пространством, а над  $\mathbb{C}$  – комплексным.

ЛЕММА 2. Пусть  $L$  – линейное пространство над  $F$ . Тогда для любых элементов  $a, b \in L$  и любых чисел  $\alpha, \beta \in F$  справедливы следующие утверждения:

1)  $0 \cdot a = 0, \quad \alpha \cdot 0 = 0;$

2)  $(-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a) = -\alpha a, \quad (-\alpha) \cdot (-a) = \alpha a;$

3)  $\alpha \cdot (a-b) = \alpha a - \alpha b, \quad (\alpha-\beta) \cdot a = \alpha a - \beta a.$

Наряду с термином «линейное пространство» используется также термин «векторное пространство», а элементы линейного пространства принято называть векторами.

## 2. Подпространства линейных пространств

Пусть  $L$  – линейное пространство над  $F$ ,  $L_1$  – непустое подмножество в  $L$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Говорят, что  $L_1$  является подпространством линейного пространства  $L$  (или линейным подпространством), если оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на  $L$ .*

Если  $L_1$  является подпространством линейного пространства  $L$ , то пишут:  $L_1 \leq L$

**ТЕОРЕМА 3** (критерий подпространства). *Пусть  $L$  – линейное пространство над  $F$ ,  $L_1$  – непустое подмножество в  $L$ .  $L_1$  является подпространством линейного пространства  $L$  тогда и только тогда, когда для любых элементов  $a, b \in L_1$  и любого  $\alpha \in F$  выполняются условия:*

- 1)  $a - b \in L_1$ ;
- 2)  $\alpha \cdot a \in L_1$ .