Глава II. Векторная алгебра. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется *векторным исчислением*.

Векторное исчисление подразделяют на *векторную алгебру* и *векторный анализ*. В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

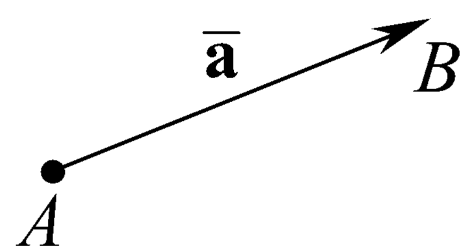
§ 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (или *модулем*) вектора. Обозначают: $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*. Обозначают: $\overline{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

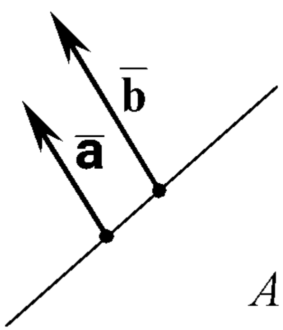
Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными* (*параллельными*).

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарные, и $\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

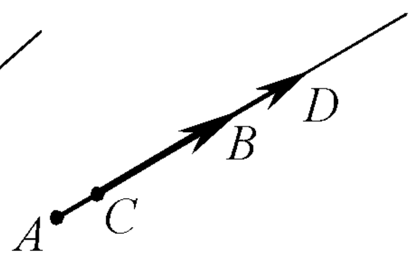
Если векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ – коллинеарные и их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых) или один из лучей $[AB)$ или $[CD)$ целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой), то векторы называются *сонаправленными*. В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*.

Записывают: $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ сонаправленные,

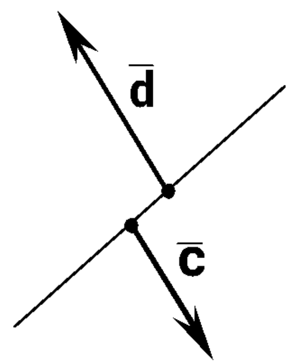
и $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



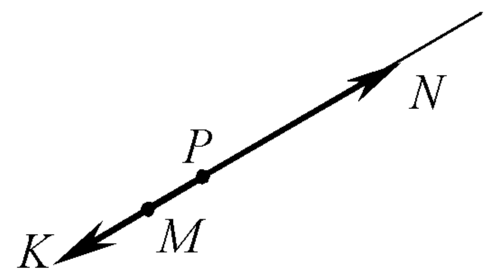
$\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$



$\overline{\mathbf{AB}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{CD}}$



$\overline{\mathbf{c}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{d}}$



$\overline{\mathbf{MN}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{PK}}$

Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$.

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными* (*ортогональными*).

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \perp \overline{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением вектора* $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ *на число* $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$, *а направление совпадает с направлением вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$.

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$, *то их произведение полагают равным* $\bar{\mathbf{0}}$.

Обозначают: $\alpha\,\bar{\mathbf{a}}$.

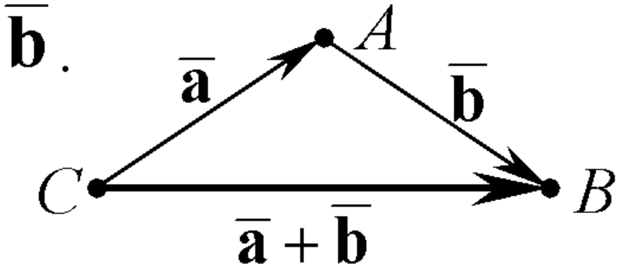
Частный случай: произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$.

Вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют *противоположным вектору* $\bar{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

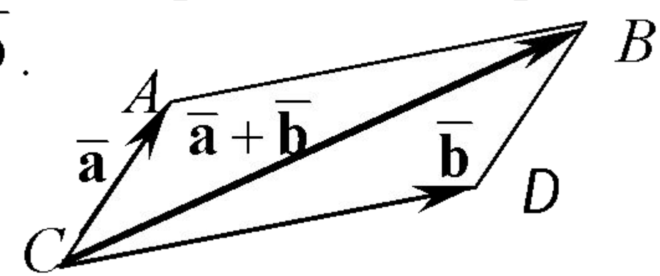
ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило треугольника). *Пусть даны два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим последовательно векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{b}}$. *Вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.

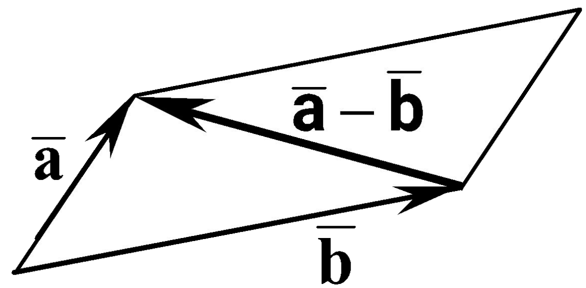


ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило параллелограмма). *Пусть даны два вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$. *Суммой векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имеющий начало в точке* C *и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{CA}} = \bar{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \bar{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\overline{\mathbf{a}}+(-\overline{\mathbf{b}})$.

Сумму $\overline{\mathbf{a}}+(-\overline{\mathbf{b}})$ называют *разностью векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ и обозначают $\overline{\mathbf{a}}-\overline{\mathbf{b}}$.



СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

1) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);
2) $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);
3) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$;
4) $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$;
5) $\alpha(\beta\,\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения чисел);
6) $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \beta\,\overline{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);
7) $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \alpha\,\overline{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);
8) $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$.

§ 7. Понятие линейного пространства

1. Определение и примеры

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа из $\boldsymbol{F}$ (где $\boldsymbol{F}$ – множество рациональных, действительных или комплексных чисел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Множество* L *называется линейным пространством над* $\boldsymbol{F}$ *если для любых элементов* $a,b,c \in L$ *и для любых чисел* $\alpha,\beta \in \boldsymbol{F}$ *выполняются условия:*

1. $a+b=b+a$ *(коммутативность сложения элементов из* L*)*;
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ *(ассоциативность сложения элементов из* L*)*;
3. *Во множестве* L *существует такой элемент* o*, что* $a+o=a$. *Элемент* o *называют нулевым элементом множества* L;
4. *Для любого элемента* $a \in L$ $\exists$ *элемент* $-a \in L$ *такой, что* $a+(-a)=o$. *Элемент* $-a$ *называют противоположным к* a;
5. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ *(ассоциативность относительно умножения чисел)*;

6. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ *(дистрибутивность умножения на элемент из* L *относительно сложения чисел)*;

7. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ *(дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из* L*)*;

8. $1a=a$.

Линейное пространство над $\mathbb{R}$ называют еще *вещественным (действительными) линейным пространством*, а над $\mathbb{C}$ – *комплексным*.

ЛЕММА 2. *Пусть* L *– линейное пространство над* ***F***. *Тогда для любых элементов* $a,b\in$ L *и любых чисел* $\alpha,\beta\in$ ***F*** *справедливы следующие утверждения:*

1) $0\cdot a = o, \quad \alpha\cdot o = o$;

2) $(-\alpha)\cdot a = \alpha\cdot(-a) = -\alpha a, \quad (-\alpha)\cdot(-a) = \alpha a$;

3) $\alpha\cdot(a-b) = \alpha a - \alpha b, \quad (\alpha-\beta)\cdot a = \alpha a - \beta a$.

Наряду с термином «линейное пространство» используется также термин «*векторное пространство*», а элементы линейного пространства принято называть *векторами*.

2. Подпространства линейных пространств

Пусть L – линейное пространство над $\boldsymbol{F}$, L_1 – непустое подмножество в L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что* L_1 *является подпространством линейного пространства* L *(или линейным подпространством), если оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на* L.

Если L_1 является подпространством линейного пространства L, то пишут: $L_1 \leq L$

ТЕОРЕМА 3 (критерий подпространства). *Пусть* L *– линейное пространство над* $\boldsymbol{F}$, L_1 *– непустое подмножество в* L. L_1 *является подпространством линейного пространства* L *тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a, b \in L_1$ *и любого* $\alpha \in \boldsymbol{F}$ *выполняются условия:*

1) $a - b \in L_1$;
2) $\alpha \cdot a \in L_1$.