МОУ СОШ № 5 – «Школа здоровья и развития»
г. Радужный

Подобные треугольни

Автор: Семенова Елена Юрьевна

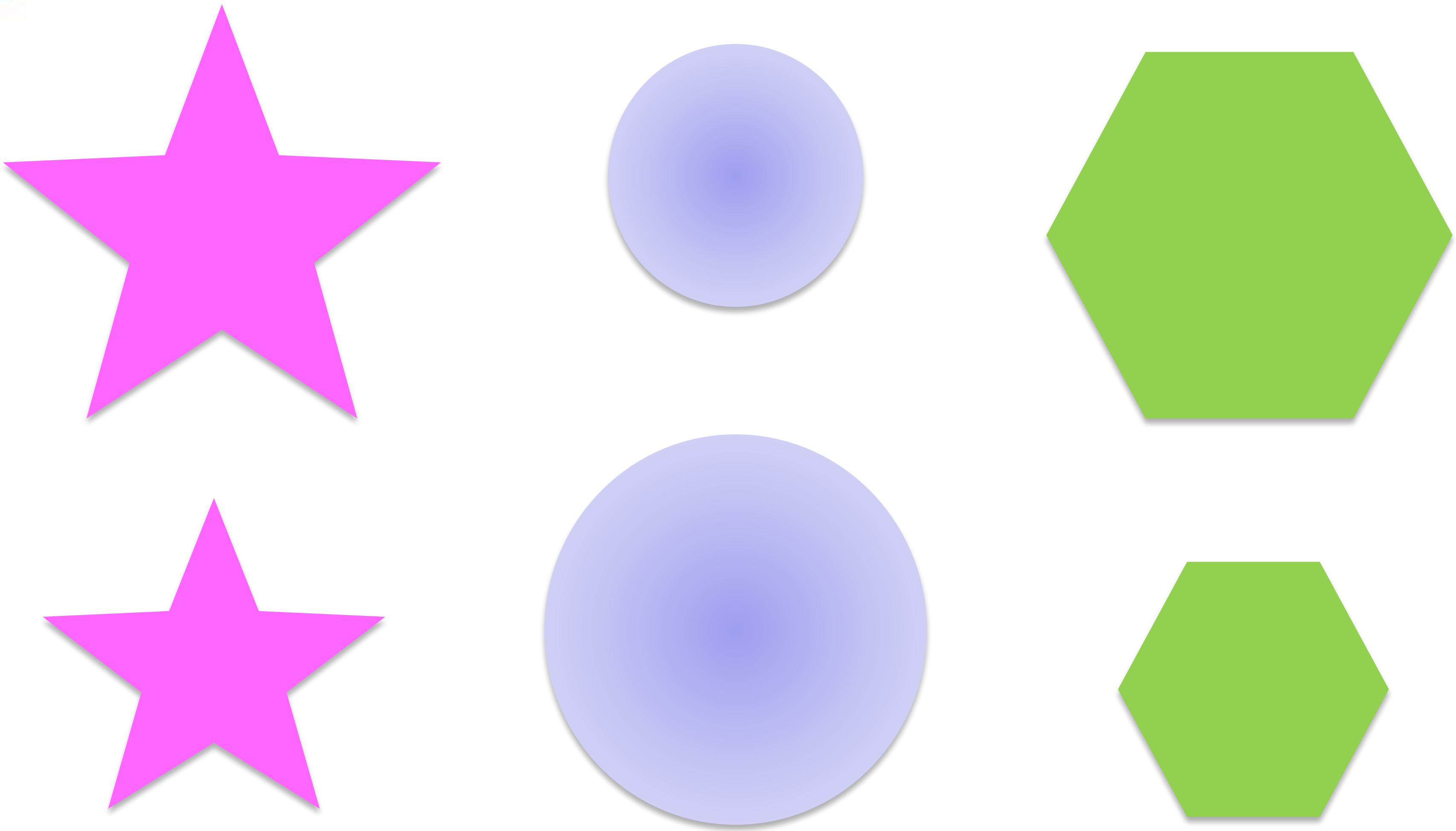
Содержание

Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т.е. $\frac{AB}{CD}$.

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Подобные фигуры

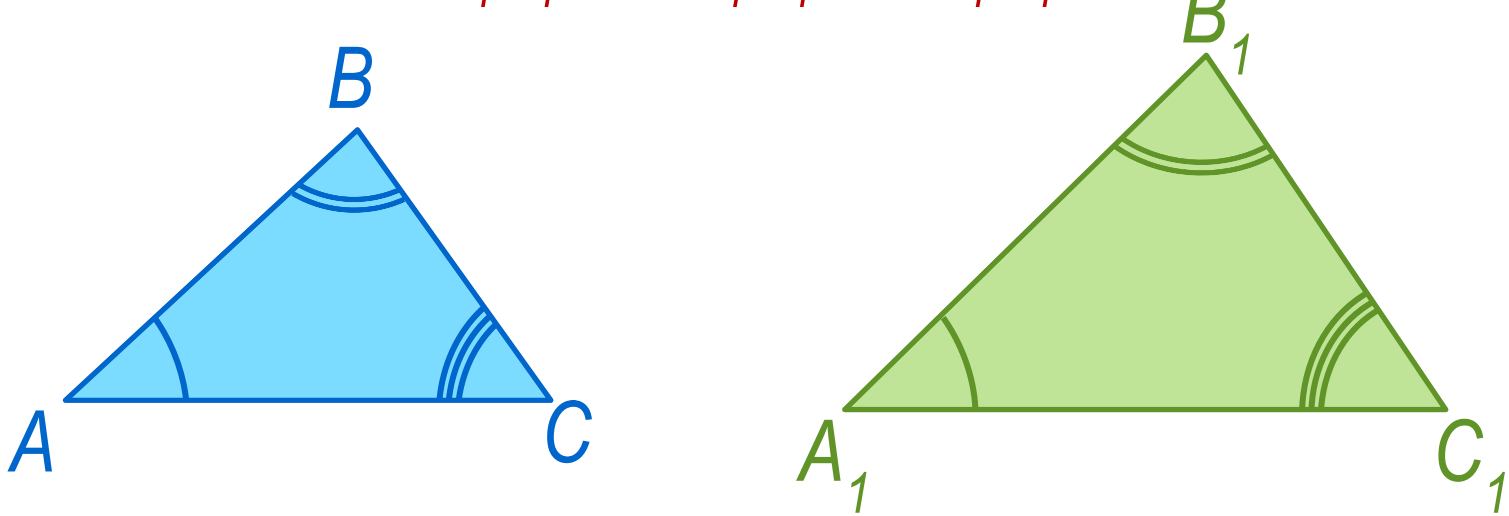


Подобные треугольник

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

$$\angle A = \angle A_1;\quad \angle B = \angle B_1;\quad \angle C = \angle C_1 \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k \qquad (2)$$

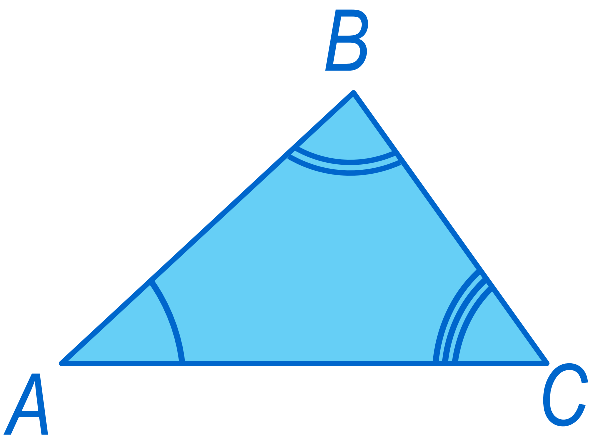


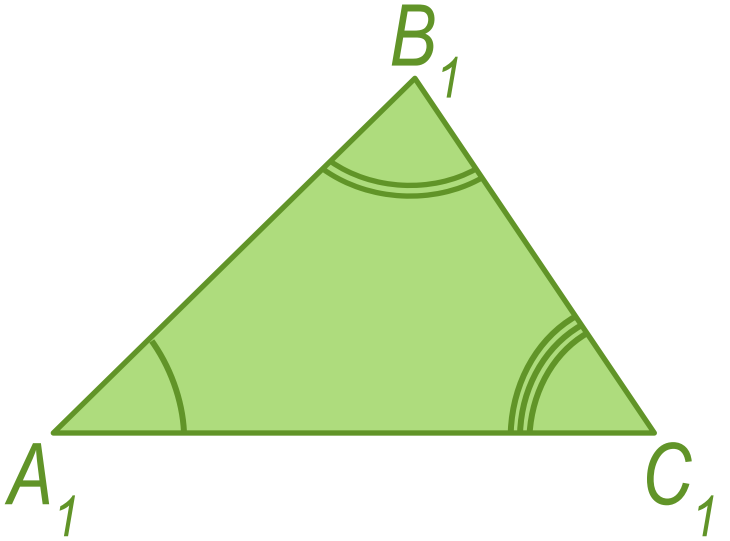
Подобные треугольники

$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

k – коэффициент подобия





Отношение площадей подобных треуголь

Теоре ма

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

k – коэффициент подобия

Доказать: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A1B1C1}} = k^2$

Доказательство: Т.к. $\angle A = \angle A_1$, то по теореме об отношении площадей треугольников $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A1B1C1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$

По формуле **(2)** $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k; \quad \dfrac{AC}{A_1C_1} = k \quad \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A1B1C1}} = k^2$

Свойство биссектрисы треугольн

Утверждение

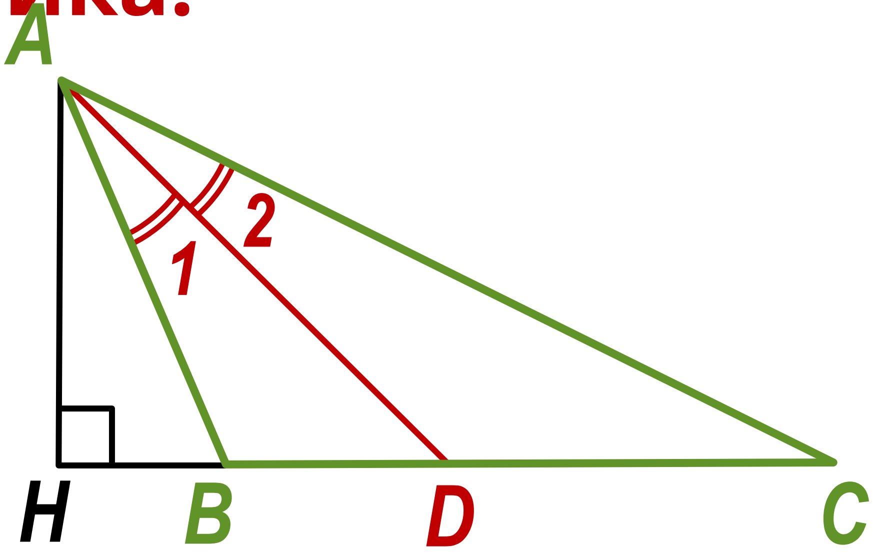
Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Дано: ΔABC

AD – биссектриса

AH – высота

Доказать: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$



Свойство биссектрисы треугольни

Доказать: $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

Доказательство: Т.к. ΔABD и ΔACD имеют общую высоту

AH, поэтому $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{BD}{CD}$ (1).

С другой стороны, эти же треугольники имеют равные

углы ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$ (2).

Из равенств (1) и (2) получаем $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

Ч.т.д.

Самостоятельная работ

Вариант 1

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta KMN$; $\angle B = \angle M$; $\angle C = \angle N$; $\angle A = 30°$; $AC = 3$см; $MN = 4$см; $KN = 6$см.

Найти: а) BC; $\angle K$;

б) $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KMN}}$

в) отношение, в котором биссектриса угла C делит сторону AB.

Вариант 2

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$; $\angle B = \angle Q$; $\angle C = \angle R$; $\angle A = 40°$; $AB = 6$см; $PR = 4$см; $PQ = 3$см.

Найти: а) AC; $\angle P$;

б) $\dfrac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}$

в) отношение, в котором биссектриса угла P делит сторону RQ.

Первый признак подобия треугольн

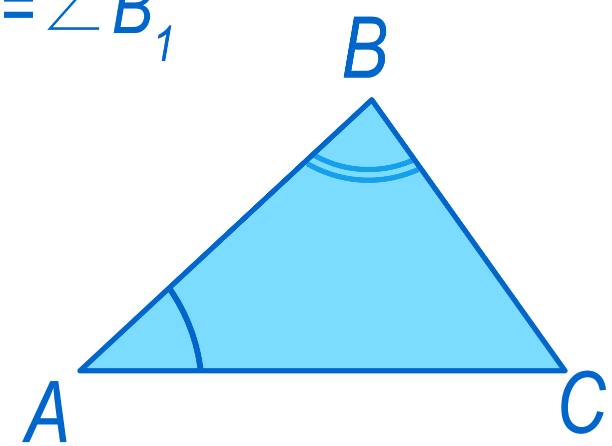
Теорема

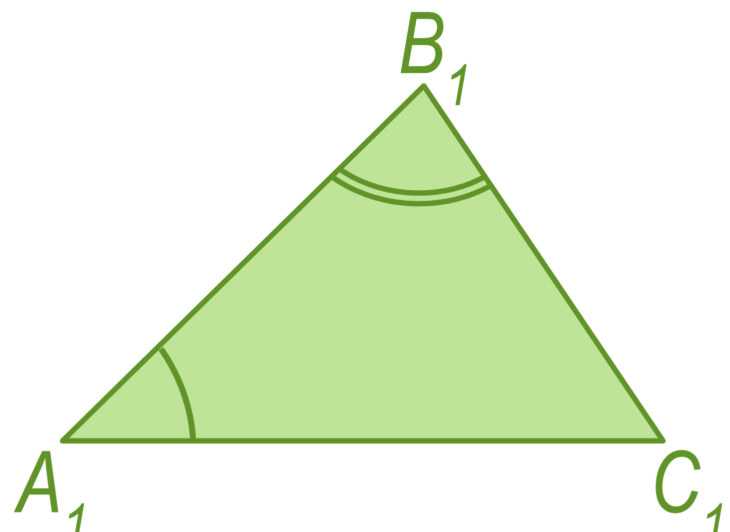
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC; $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$

Доказать: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$





Первый признак подобия треуголь

Доказательство:

По теореме о сумме углов треугольника

$$\left.\begin{aligned}\angle C &= 180° - (\angle A + \angle B)\\ \angle C_1 &= 180° - (\angle A_1 + \angle B_1)\end{aligned}\right| \Rightarrow \angle C = \angle C_1$$

Таким образом, $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$.

Тогда по теореме об отношении площадей треугольников

из $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A1B1C1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \dfrac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1} = \dfrac{BA \cdot BC}{B_1A_1 \cdot B_1C_1} \Rightarrow$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$ Ч.т.д.

Второй признак подобия треугольн

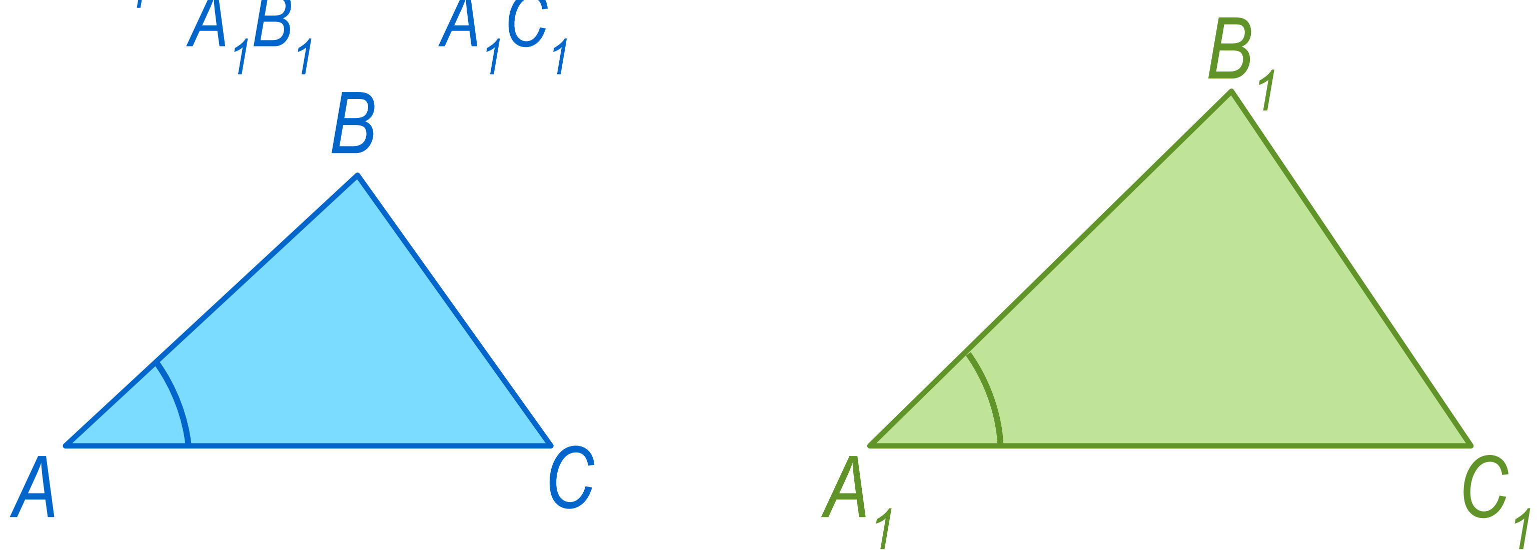
Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC; $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A = \angle A_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

Доказать: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Третий признак подобия треугольн

Теорема

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

<u>Дано:</u> ΔABC; $\Delta A_1B_1C_1$;

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

<u>Доказать:</u> $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$