Интернет Университет Суперкомпьютерных технологий

Учебный курс

Введение в параллельные алгоритмы

Лекция 3

Сортировка данных с точки зрения МВС (начало)

Якобовский М.В., д.ф.-м.н.
Институт математического моделирования РАН, Москва

ОСНОВНАЯ

Расположить в порядке неубывания *N* элементов массива чисел, используя *p* процессоров

ЦЕЛЬ

Две задачи сортировки массива чисел

A. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***достаточен*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

B. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***мал*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

Задача A

- Расположить N элементов массива *a* таким образом, чтобы для любого

$$i = 0, \ldots, N-2$$

выполнялось неравенство

$$a_i \le a_{i+1}$$

Задача B

- Пусть массив можно разместить на *p* процессорах.
- Пусть на процессоре с номером *rank* размещено n^{rank} элементов массива a^{rank}.

$$N = \sum_{rank=0}^{rank<p} n^{rank}$$

- Расположить N элементов массивов a^{rank} таким образом, чтобы:
  - для любых $rank = 0,\ldots,(p-1)$ и $i = 0,\ldots,(n^{rank}-2)$ выполнялось неравенство $a_i^{rank} \le a_{i+1}^{rank}$
  - для любого $rank = 0,\ldots,(p-2)$
  - выполнялось неравенство $a_{n^{rank}-1}^{rank} \le a_0^{rank+1}$

Задача B

- Части массива хранятся на нескольких процессорах
  - Каждая часть массива должна быть упорядочена
  - На процессорах с б**о**льшими номерами должны быть размещены элементы массива с б**о**льшими значениями

$N = 11$

$p = 3$

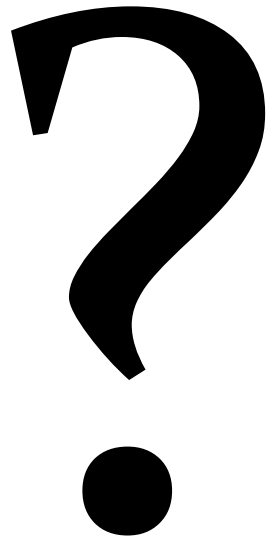
Задача B

- Будем рассматривать только процесс упорядочивания элементов:
  - Перед началом сортировки на каждом из процессоров уже есть часть элементов массива
  - После окончания сортировки на каждом из процессоров должно остаться столько элементов, сколько их было в начале (но, это уже могут быть другие элементы, расположенные ранее на других процессорах)

Этапы сортировки

- Упорядочивание фрагментов массива на каждом из процессоров ?
- Перераспределение элементов массива между процессорами
- Упорядочивание фрагментов массива на каждом из процессоров ?

Конструирование наилучшего последовательного алгоритма

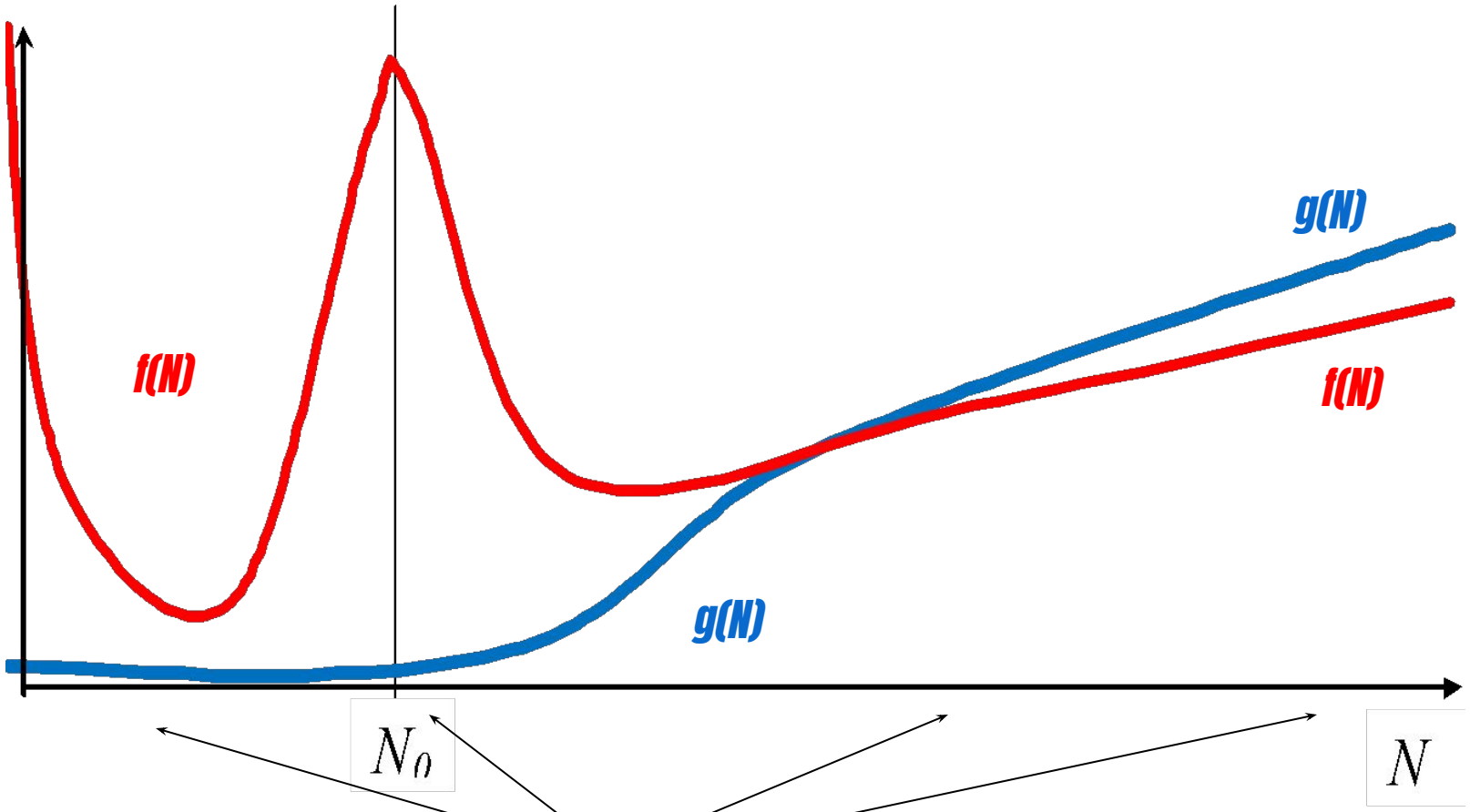


Сравнение алгоритмов сортировки

$$M(n) < Cn^2$$

Алгоритм сортировки	Среднее число операций	Максимальное число операций
Быстрая (***qsort***)	$11.7\ n \log_2 n$	$O(n^2)$
Пирамидальная (***hsort***)	$16\ \ n \log_2 n$	$18\ n \log_2 n + 38n$
Слияние списков (***lsort***)	$10\ \ n \log_2 n$	$O(n \log_2 n)$

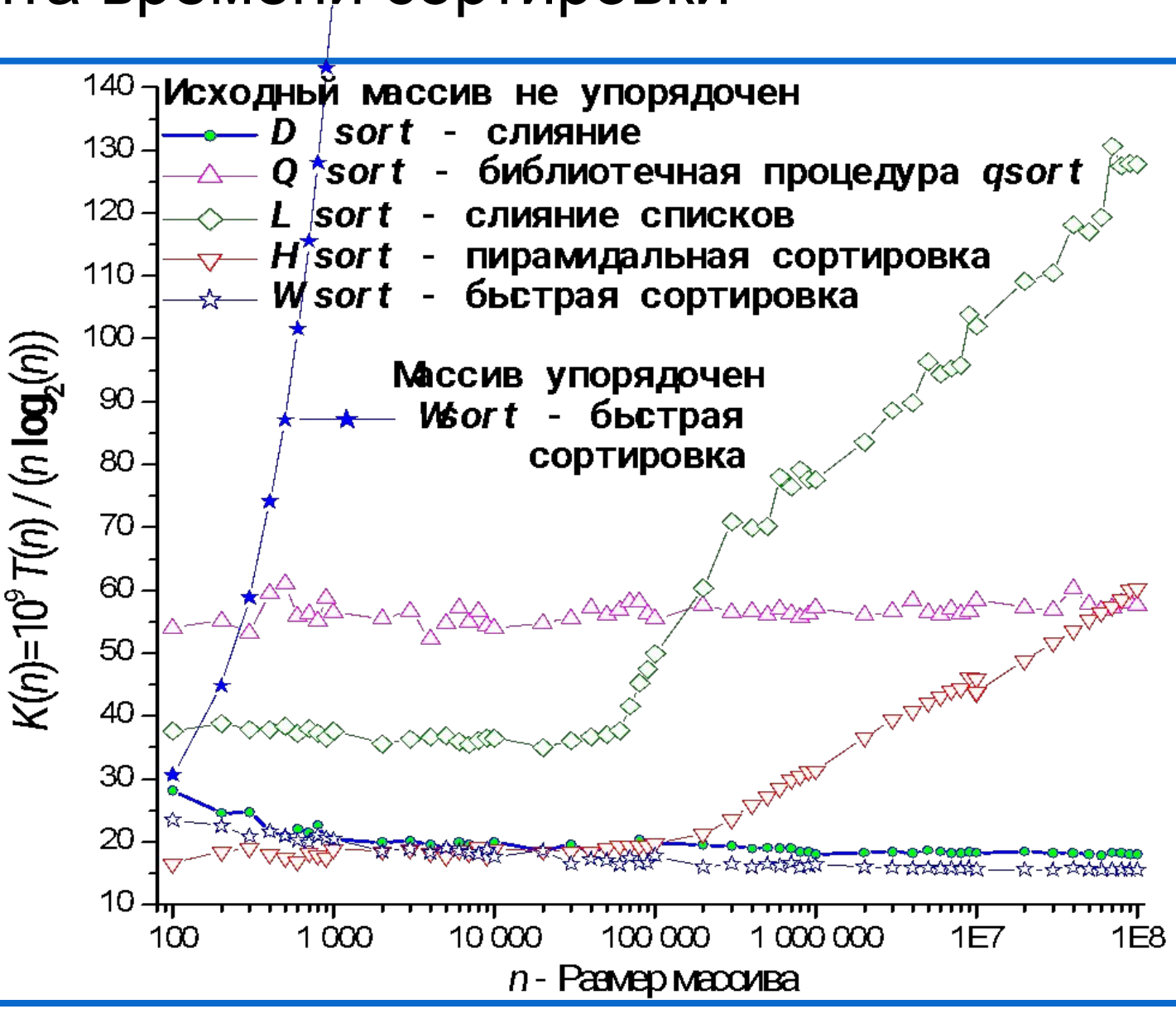
Пусть $f(N) < C \cdot g(N)$, ну и что?



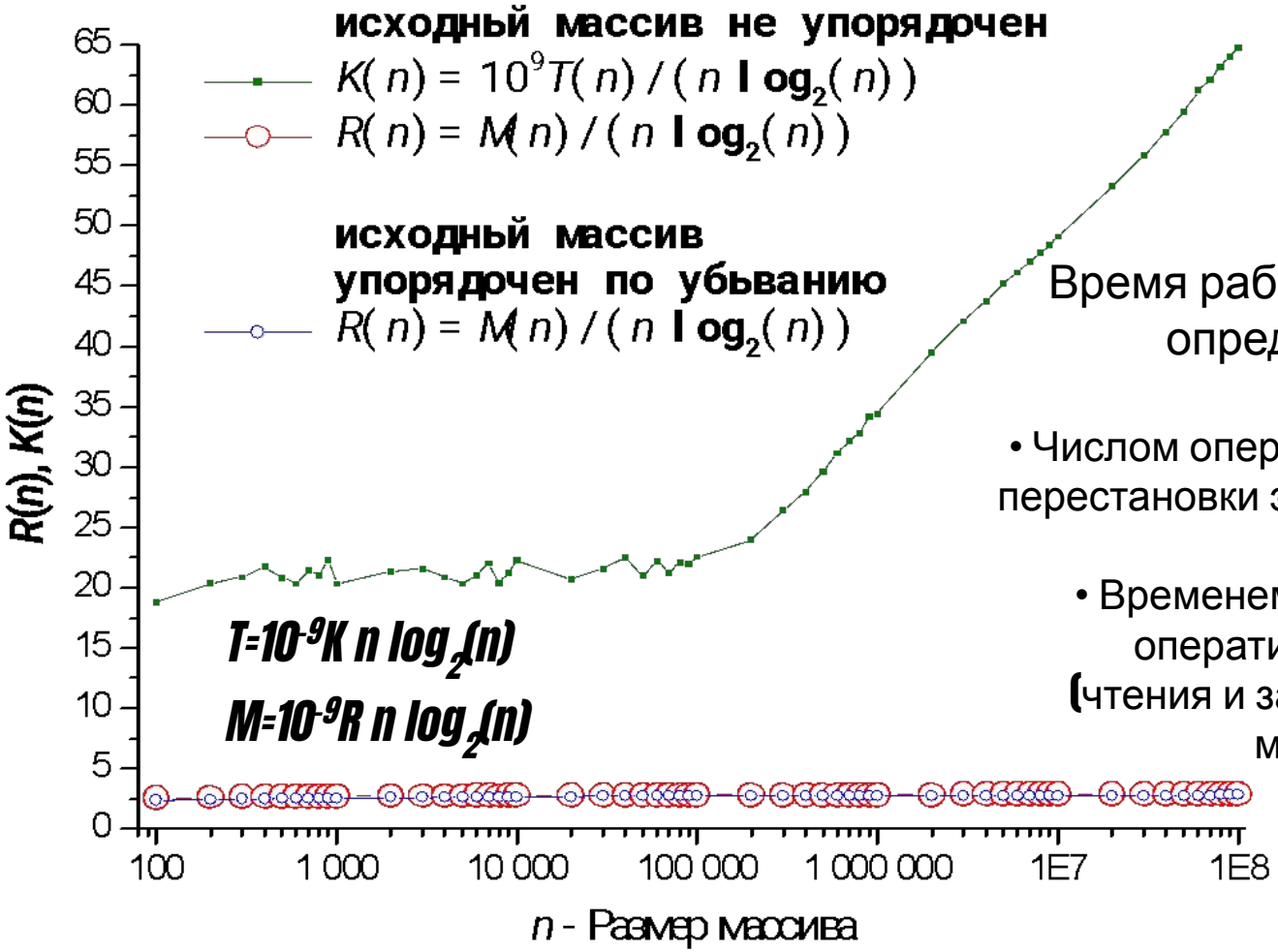
- Где тут наши 2 Гигобайта оперативной памяти???

Константа времени сортировки

$T=10^{-9}K\ N\ \log_2(N)$



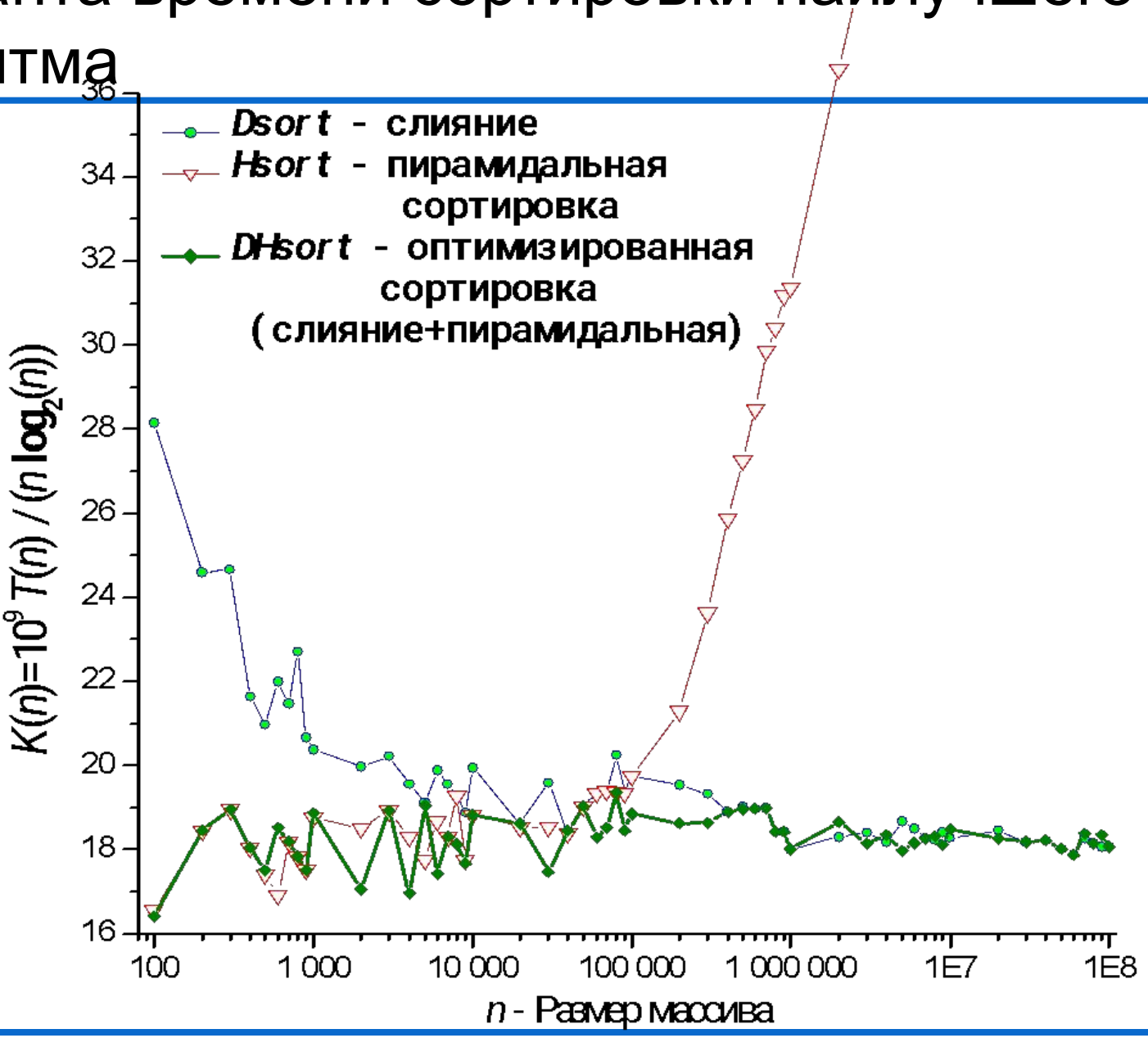
Пирамидальная сортировка: константы времени и числа операций



Время работы алгоритма определяется:

- Числом операций сравнения и перестановки элементов массива
- Временем обращения к оперативной памяти (чтения и записи элементов массива)

Константа времени сортировки наилучшего алгоритма



Изящный алгоритм сортировки массива слиянием

```
сортировать ( массив mas, число элементов n )
  {
  если (n > 1)
    {
    // сортировка первой половины массива
    сортировать ( mas, n/2);
    // сортировка второй половины массива
    сортировать ( mas+n/2, n-n/2);
    // слияние отсортированных половинок массива
    слияние ( mas, n/2, mas+n/2,n-n/2);
    }
  }
```

Алгоритм сортировки массива слиянием

```
Dsort(intsort *array, int n)
{
 a=array; // сортируемый массив
 b=array_second; // вспомогательный массив

 for(i=1;i<n;i=i*2) // размер объединяемых фрагментов
   {
   for(j=0;j<n;j=j+2*i) // начало первого из объединяемых
                        // фрагментов
    {
    r=j+i; // начало второго из объединяемых фрагментов
    n1=max(min(i,n-j), 0);
    n2=max(min(i,n-r), 0);

    // слияние упорядоченных фрагментов
                  b = a[r…r+n1] & a[j…j+n2]
    }
   c=a;a=b;b=c;
   }
```

Слияние упорядоченных фрагментов

```
for(ia=0,ib=0,k=0;k<n1+n2;k++)
   {
   if(ia>=n1) b[j+k]=a[r+ib++];
   else
   if(ib>=n2) b[j+k]=a[j+ia++];
   else
   if(a[j+ia]<a[r+ib]) b[j+k]=a[j+ia++];
   else                b[j+k]=a[r+ib++];
   }
```

Сортировка слиянием методом сдваивания

- Требуется 2 + 4 + 8 + 16 тактов (8 процессоров)

Для просмотра анимации возможно требуется установить свободно распространяемый Swiff Point Player: http://www.globfx.com/products/swfpoint/

Ускорение при методе сдваивания

- k_1 – сортировка, k_2 – передача данных

$$S(n,p)=\frac{T(n,1)}{T(n,p)}=\frac{k_1 n\log_2 n}{\frac{n}{p}\left[k_1\left(\log_2\frac{n}{p}+2p-1\right)+k_2(p-1)\right]}$$

$$S(10^9,4)\approx\frac{4}{1.13+\frac{1}{30}\frac{k_2}{k_1}}<3.5$$

$$S(10^9,32)=\frac{32}{1+\frac{1}{30}\left(56+31\frac{k_2}{k_1}\right)}\approx\frac{32}{3+\frac{k_2}{k_1}}<11$$

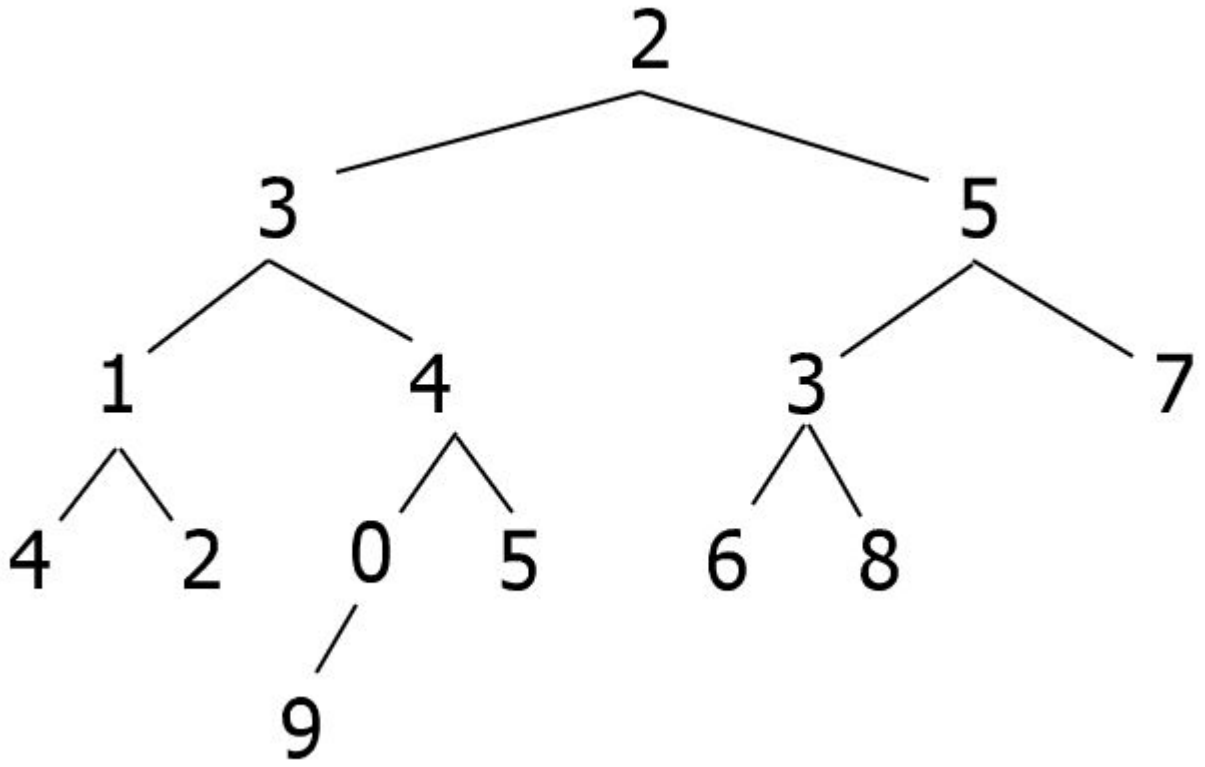
Слияние двух массивов двумя процессорами

- Требуется 8 тактов

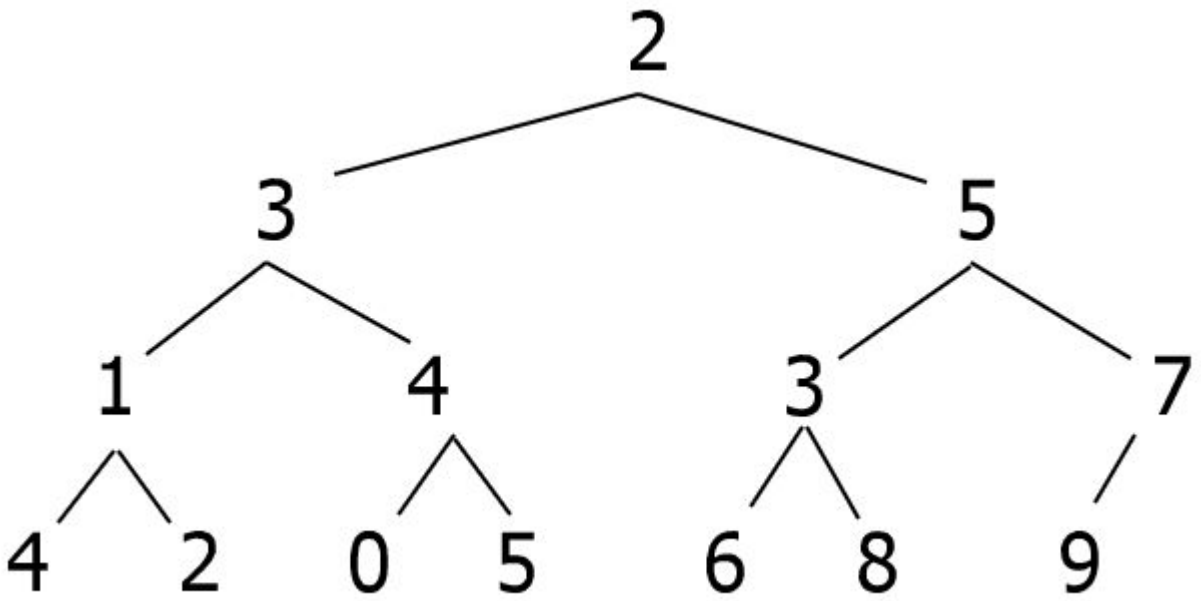
Пирамиды

- Дерево называют сбалансированным, если потомки любого его корня отличаются по высоте не более чем на 1
- Пирамида – сбалансированное бинарное дерево в котором левый потомок любого узла не ниже правого потомка

Не пирамида

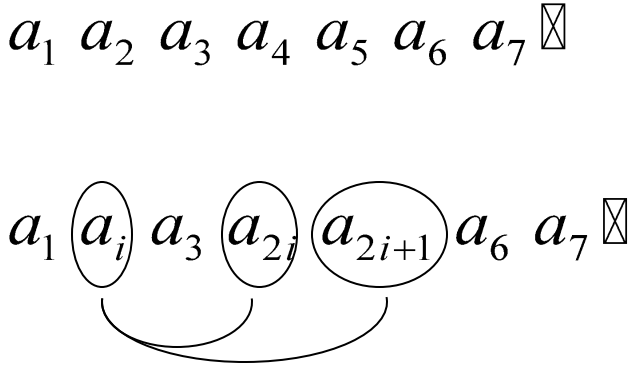


Пирамида



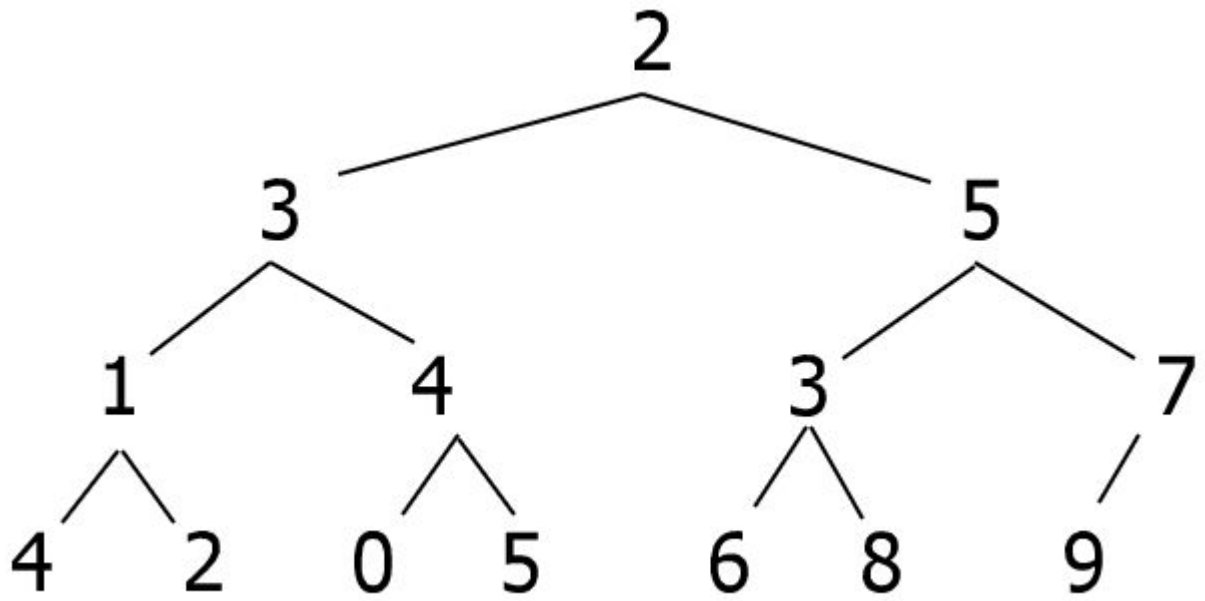
Хранение пирамиды

- В линейном массиве потомки вершины i хранятся в элементах 2i, 2i+1



Пирамида

- 2 3 5 1 4 3 7 4 2 0 5 6 8 9



Пирамидальная сортировка

- Пирамида называется упорядоченной если

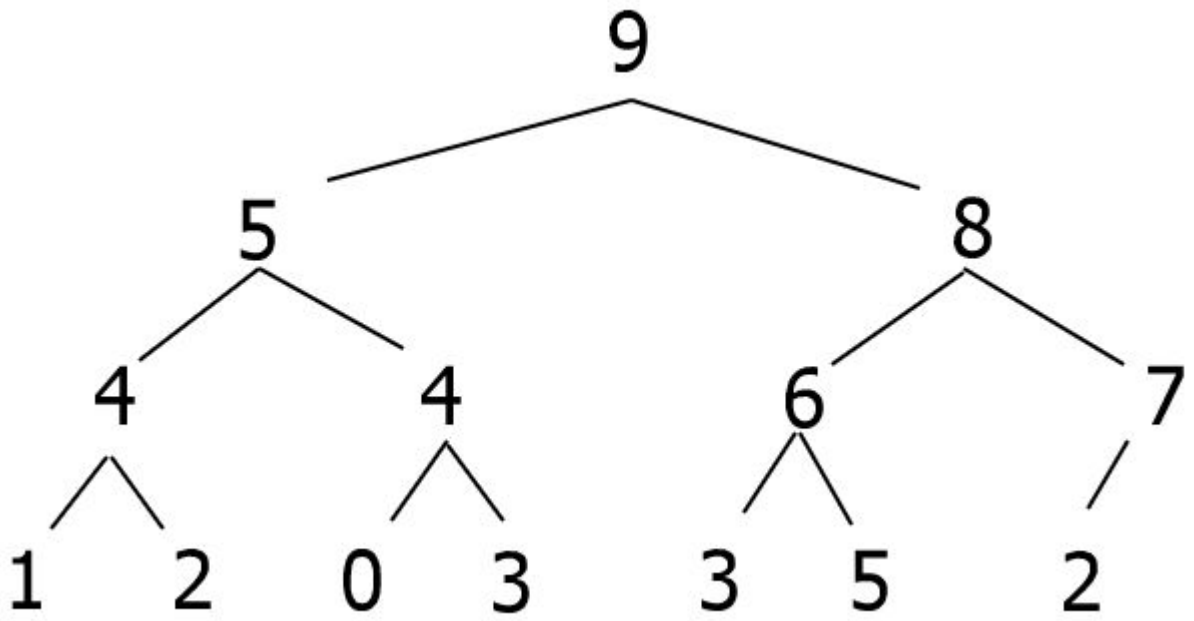
  для любого $i \geq 1 \quad a_{2i} \leq a_i \quad и \quad a_{2i+1} \leq a_i$

  (если такие элементы в массиве есть ☺)

$$a_{\lfloor i/2 \rfloor} \geq a_i, \quad при \quad 1 \leq \lfloor i/2 \rfloor < i \leq N$$

Упорядоченная пирамида

- 9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2



Пирамидальная сортировка

- 9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2 [
- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9
- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9
- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9

- 5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9
- 7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9
- 7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9

- 3 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 [7 8 9
- 6 5 3 4 4 5 2 1 2 0 3 [7 8 9
- 6 5 3 4 4 5 2 1 2 0 3 [7 8 9
- 6 5 5 4 4 3 2 1 2 0 3 [7 8 9

- 3 5 5 4 4 3 2 1 2 0 [6 7 8 9
- 5 3 5 4 4 3 2 1 2 0 [6 7 8 9
- 5 4 5 3 4 3 2 1 2 0 [6 7 8 9

- 0 4 5 3 4 3 2 1 2 [5 6 7 8 9
- 5 4 0 3 4 3 2 1 2 [5 6 7 8 9
- 5 4 3 3 4 0 2 1 2 [5 6 7 8 9

- 2 4 3 3 4 0 2 1 [5 5 6 7 8 9
- 4 2 3 3 4 0 2 1 [5 5 6 7 8 9
- 4 4 3 3 2 0 2 1 [5 5 6 7 8 9

- 2 4 3 3 4 0 2 [1 5 5 6 7 8 9
- 4 2 3 3 4 0 2 [1 5 5 6 7 8 9
- 4 4 3 3 2 0 2 [1 5 5 6 7 8 9

- 1 2 3 3 4 0 2 [4 5 5 6 7 8 9
- 3 2 1 3 4 0 2 [4 5 5 6 7 8 9
- 3 2 2 3 4 0 1 [4 5 5 6 7 8 9

- 1 2 3 3 4 0 2 [4 5 5 6 7 8 9
- 1 2 2 3 4 0 [3 4 5 5 6 7 8 9

Пирамидальная сортировка

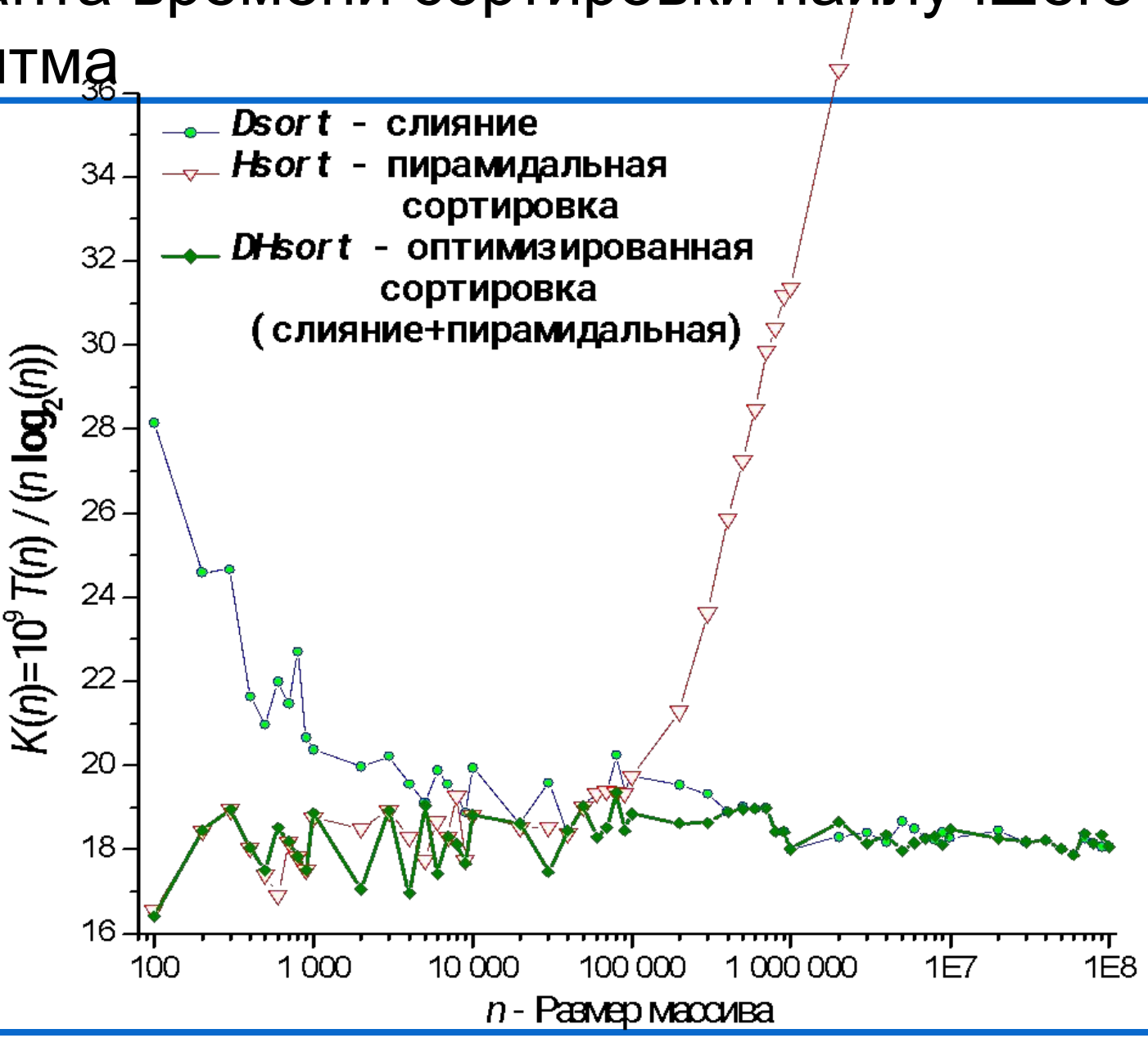
- 9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2 [
- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9
- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9
- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9

- 5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9
- 7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9
- 7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9

Оптимальный алгоритм

- Оптимальна комбинация
- H алгоритма (пирамидальная) в диапазоне
  - 10 - 50 000
- D алгоритма (слияние) в диапазоне
  - 50 000 - 100 000 000

Константа времени сортировки наилучшего алгоритма



Заключение

- Рассмотрен ряд методов сортировки массивов
- Проиллюстрирована разница между зависимостью от объема данных времени сортировки и числа выполняемых операций
- Построен «наилучший» последовательный алгоритм сортировки

Вопросы для обсуждения

- В чем причина различия характера зависимости времени сортировки и числа выполняемых операций от числа элементов сортируемого массива?
- Какие еще можно предложить варианты сортировки, улучшающие использование кеш-памяти?

Контакты

Якобовский М.В.

д.ф.-м.н.,

зав. сектором

«Программного обеспечения многопроцессорных систем и вычислительных сетей»

Института математического моделирования

Российской академии наук

mail: mail: lira@imamod.rumail: lira@imamod.ru

web: web: http://lira.imamod.ru