

# *Треугольник*

## геометрия 7 класс

Тот, кто не знает  
математики,  
не может узнать никакой  
другой науки и  
даже не может обнаружить  
своего невежества,  
а потому не ищет от него  
лекарства.

*Роджер Бэкон, 1267 г.*

*Работа учителя  
математики  
МОУ лицея №3  
Г. Кропоткина*

# План

*Понятие треугольника.*

*Медианы, биссектрисы и высоты  
треугольника.*

*Классификация треугольников.*

*Первый признак равенства треугольников.*

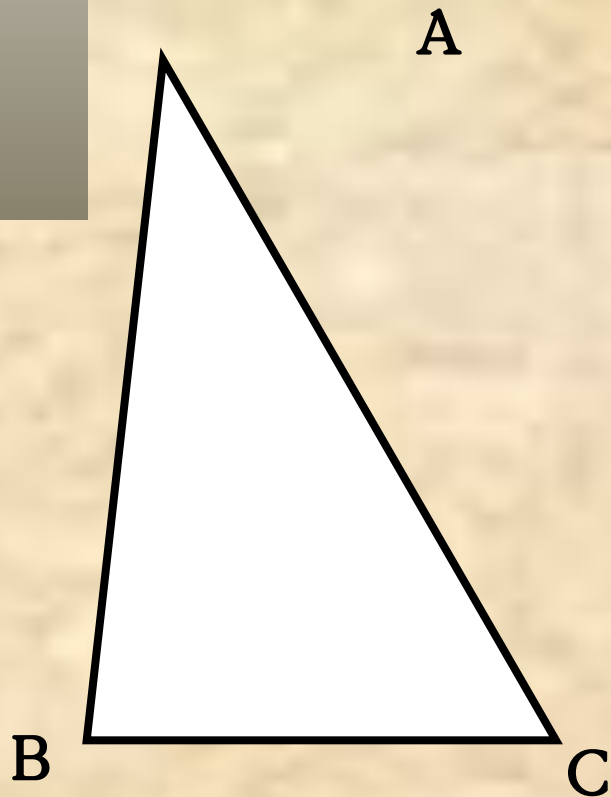
*Второй признак равенства треугольников.*

*Третий признак равенства треугольников.*

*Тест .*



# Понятие треугольника



*A, B, C - вершины  
треугольника*

*AB, BC, AC - стороны  
треугольника*

*$AB + BC + AC = P$ , где*

*P - периметр  
треугольника*



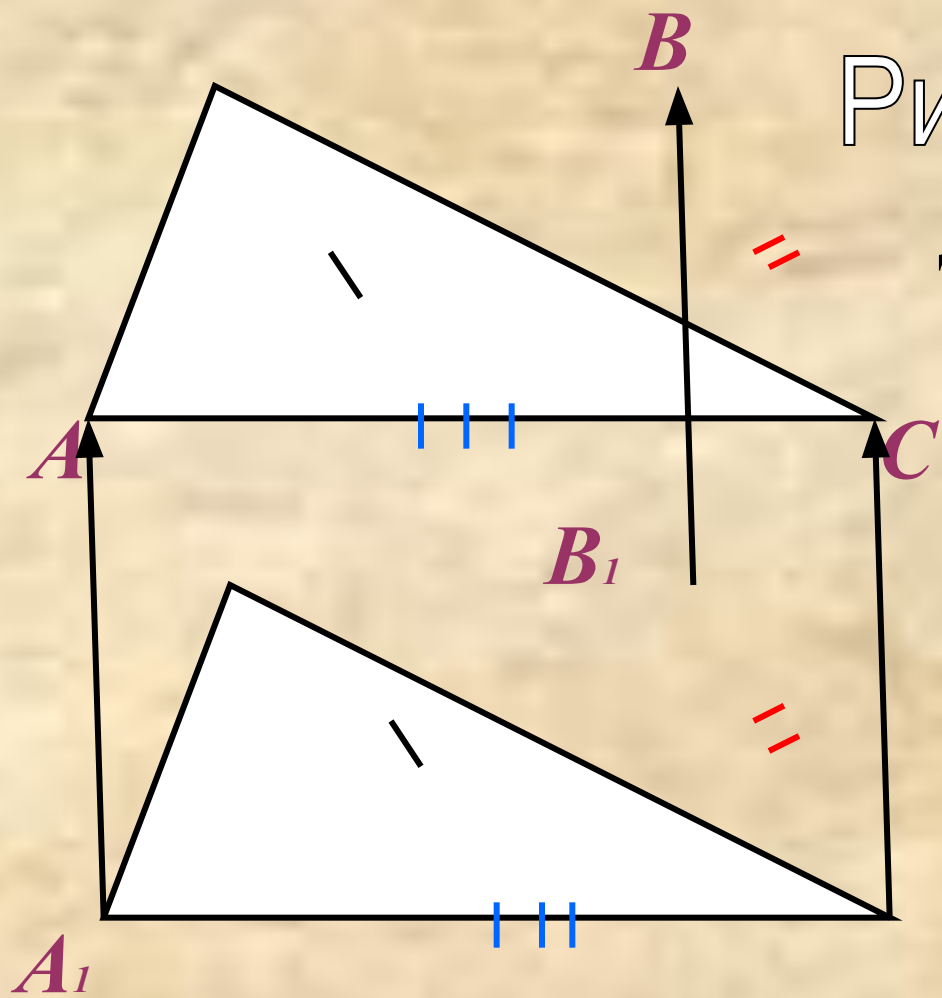


Рис 1

Два  
треугольника  
называются  
**равными**  
если их  
можно  
совместить  
наложением.

$C_1$  Рис 1.



Каждый из треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т.е попарно совместятся их вершины и стороны. Таким образом, **если два треугольника равны, то элементы одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.**

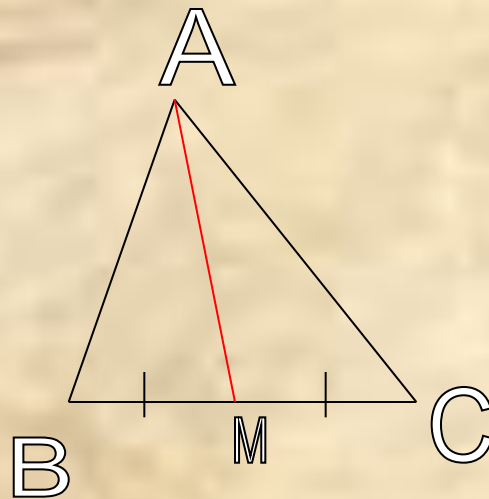
**В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.**



# Медиана

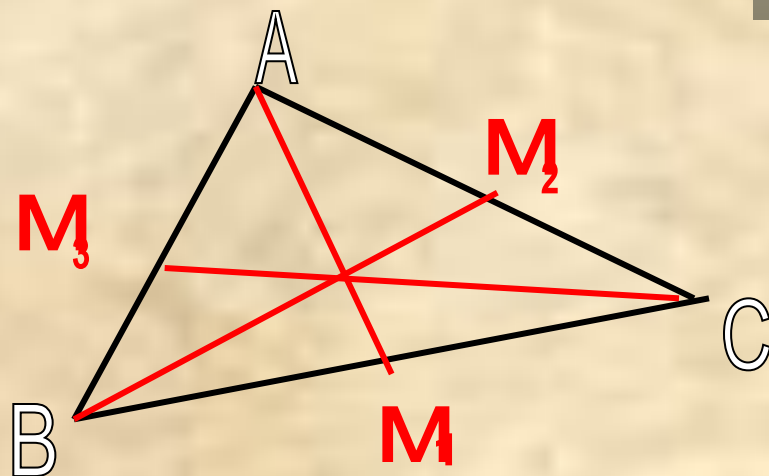
Отрезок, соединяющий  
вершину треугольника с  
серединой  
противоположной стороны,  
называется **медианой**  
**треугольника.**

AM-медиана треугольника  
ABC.



Любой треугольник  
имеет три медианы.

$AM_1$ ,  $AM_2$ ,  $AM_3$  –  
медианы  
треугольника  $ABC$ .

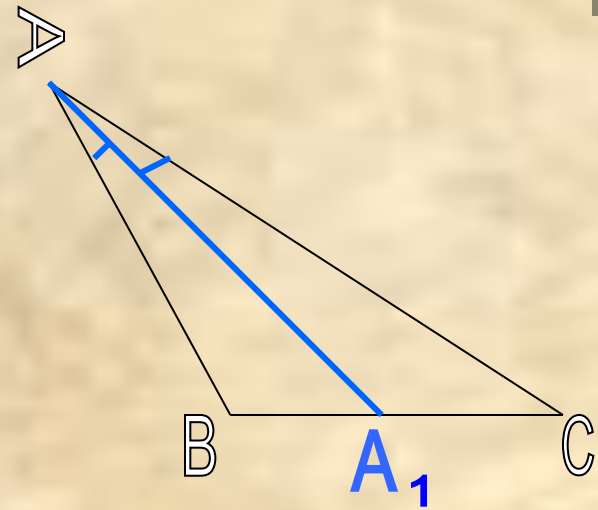




# *Биссектриса*

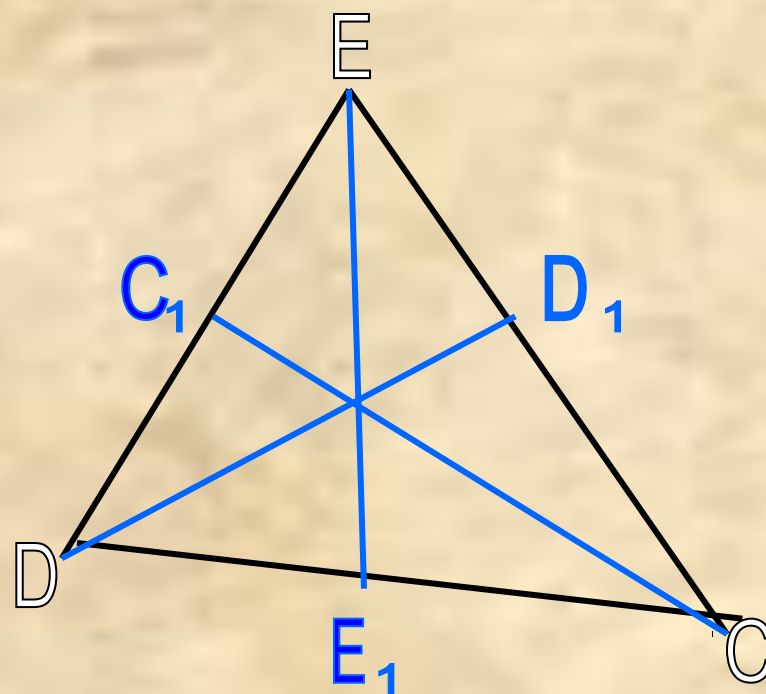
Отрезок биссектрисы угла  
треугольника,  
соединяющий вершину  
треугольника с точкой  
противоположной  
стороны,  
называется **биссектрисой**  
**угла треугольника.**

$AA_1$ - биссектриса  $\angle A$   
треугольника  $ABC$ .

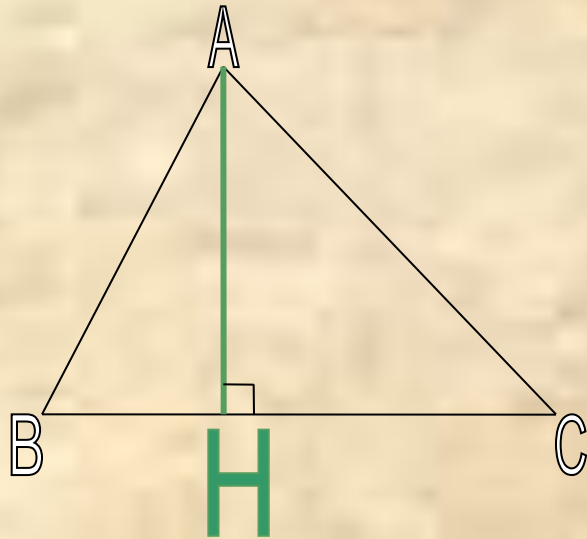




Любой треугольник  
имеет три  
биссектрисы.  
 $CC_1$ ,  $DD_1$  и  $EE_1$ -  
биссектрисы  
треугольника  $CDE$ .



# Высота

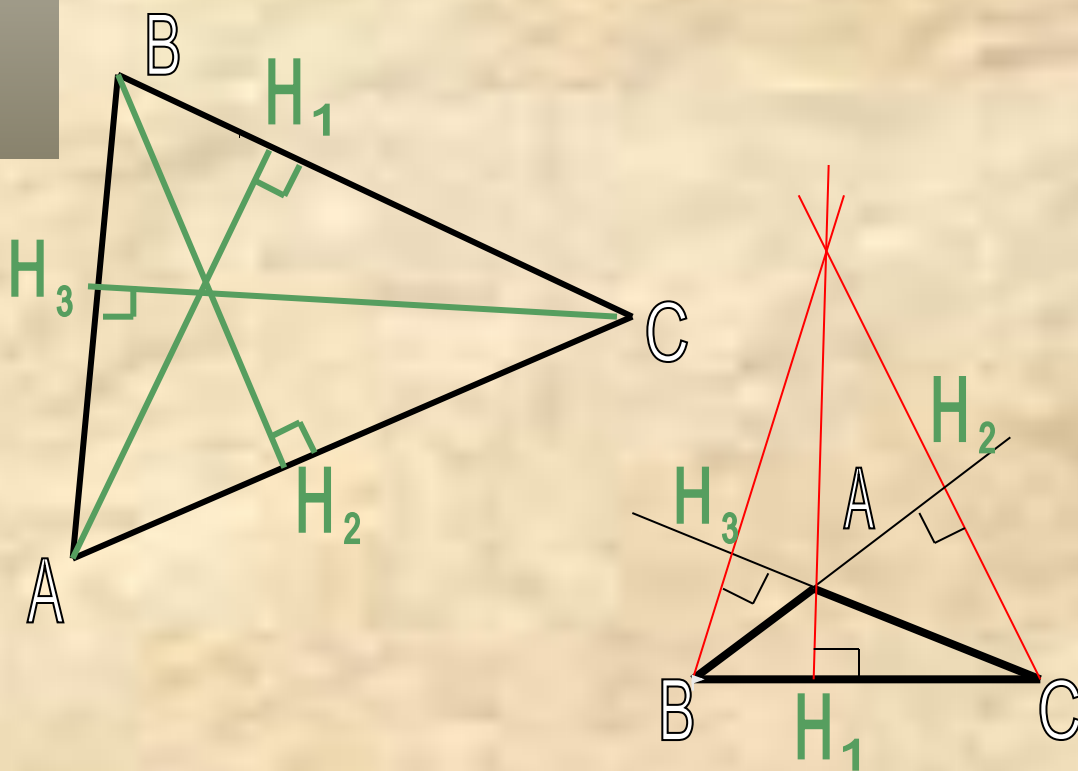


Перпендикуляр,  
проведенный из  
вершины  
треугольника  
к прямой, называется  
**высотой**  
треугольника.

АН-высота треугольника  
ABC



Любой треугольник имеет три высоты.



На рисунках  
отрезки  $AN_1$ ,  
 $BN_2$ ,  $CN_3$  –  
высоты  
треугольника  
ABC.



*Медианы, биссектрисы и высоты  
треугольника обладают  
замечательными свойствами:*

---

**в любом треугольнике медианы  
пересекаются в одной точке;  
биссектрисы пересекаются в одной  
точке; высоты или их продолжения  
также пересекаются в одной точке**

---



# Классификация треугольников

*По сторонам*

*разносторонний*

*равнобедренный*

*равносторонний*

*По углам*

*остроугольн  
ый*

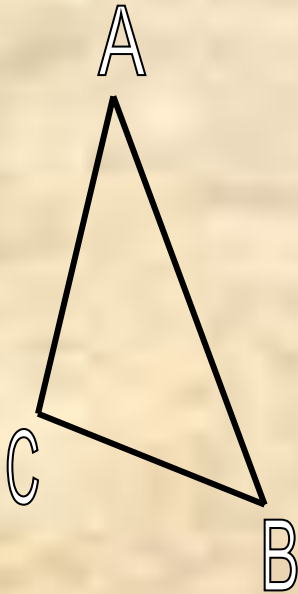
*тупоугольн  
ый*

*прямоугольн  
ый*



# Разносторонний

Треугольник называется  
**разносторонним**, если он  
имеет разные стороны и углы.



$$\angle A \neq \angle B \neq \angle C$$

$$AB \neq BC \neq CA$$



# Равнобедренный

Треугольник называется  
*равнобедренным,*

если две его стороны равны.

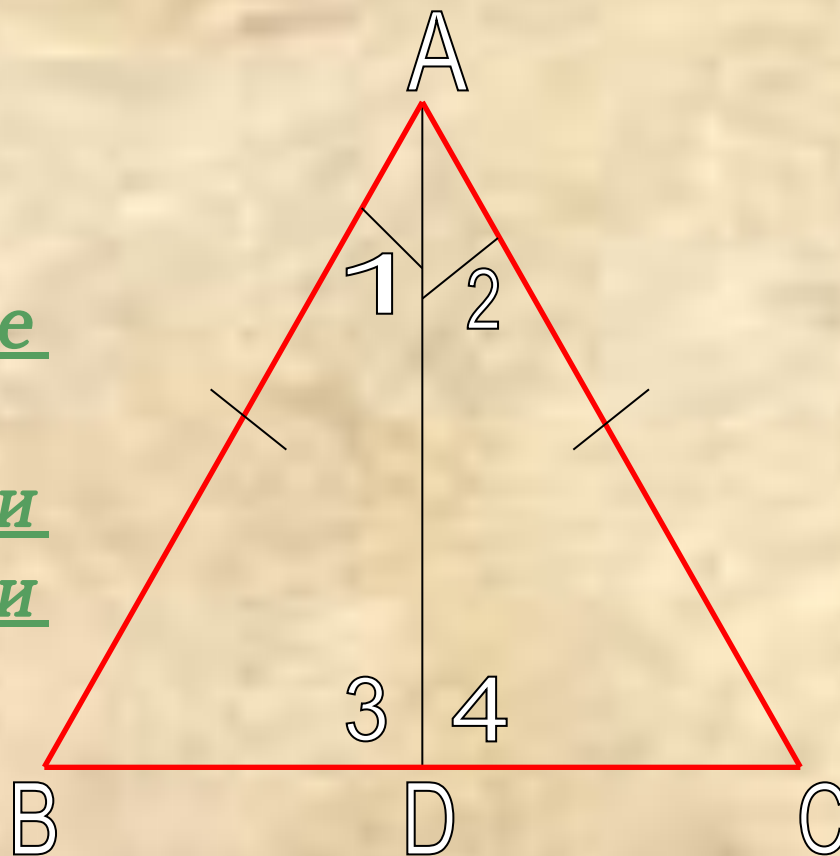
Равные стороны  
называются *боковыми*  
*сторонами*, а третья  
сторона – *основанием*  
равнобедренного  
треугольника.





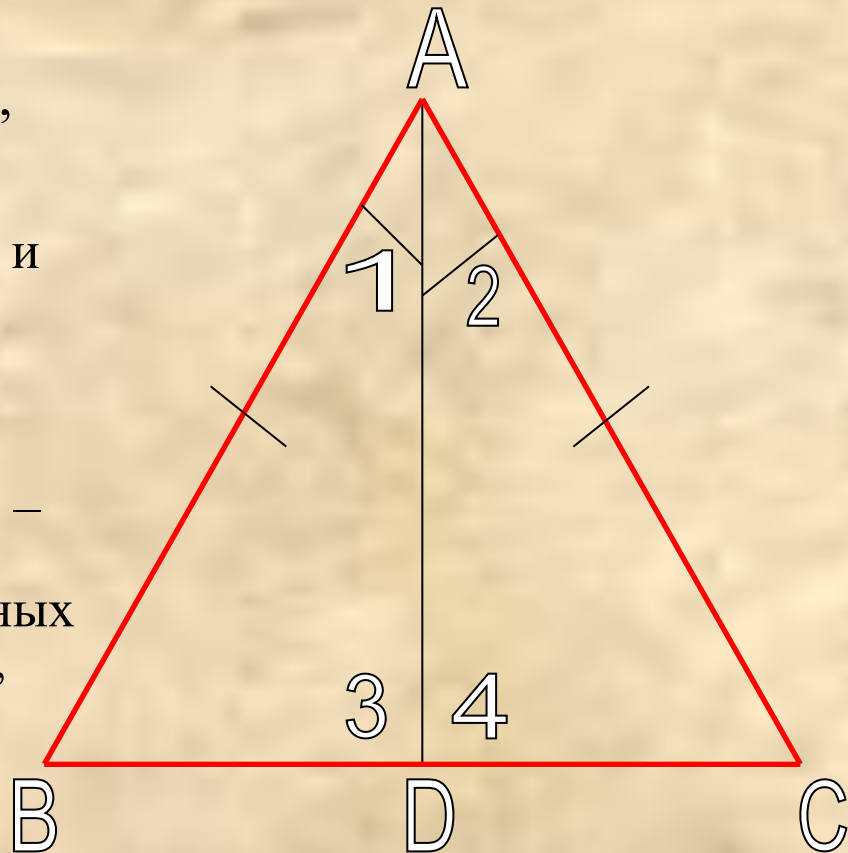
# Теорема

В  
равнобедре  
нном  
треугольни  
ке углы при  
основании  
равны.



# Доказательство:

Рассмотрим равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC$  и докажем, что  $\angle B = \angle C$ . Пусть  $AD$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Треугольники  $ABD$  и  $ACD$  равны по первому признаку равенства треугольников ( $AB = AC$  по условию,  $AD$  – общая сторона,  $\angle 1 = \angle 2$ , так как  $AD$  – биссектриса). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому  $\angle B = \angle C$ . **Теорема доказана.**

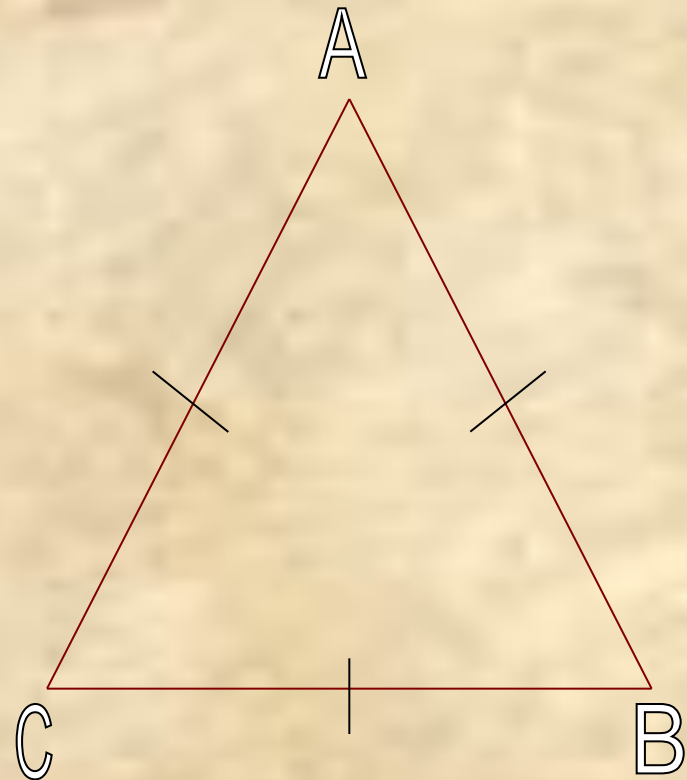


# Равносторонний

Треугольник, все  
стороны которого  
равны, называется  
**равносторонним**  
или **правильным**

$$AB=BC=CA$$

$$\angle A \neq \angle B \neq \angle C$$



# *Первый признак равенства треугольников*

## ТЕОРЕМА

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



# Первый признак равенства треугольников

Дано:

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$

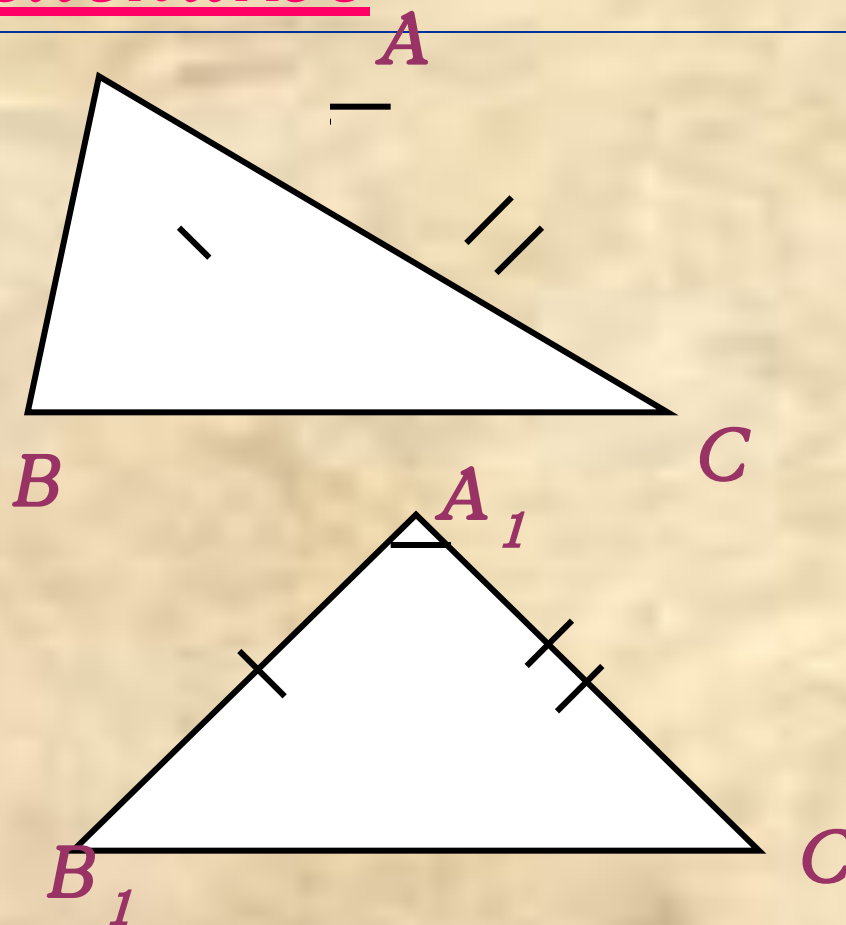
$AB = A_1B_1,$

$AC = A_1C_1,$

$\angle A = \angle A_1.$

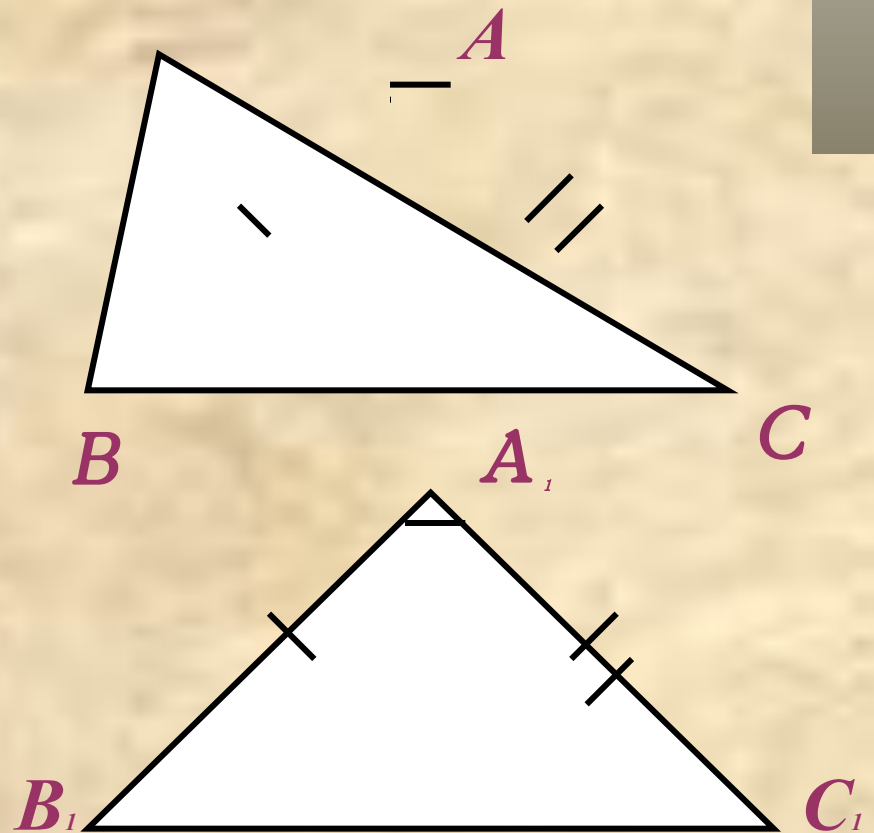
Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1.$



# Доказательство

Так как  $\angle A = \angle A_1$ , то треугольник  $ABC$  можно наложить на треугольник  $A_1B_1C_1$  так, что вершина  $A$  совместится с вершиной  $A_1$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  наложатся соответственно на лучи  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ . Поскольку  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ , то сторона  $AB$  совместится со стороной  $A_1B_1$ , а сторона  $AC$  - со стороной  $A_1C_1$ ; в частности, совместятся точки  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$ . Следовательно, совместятся стороны  $BC$  и  $B_1C_1$ . Итак, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  полностью совместятся, значит, они равны. **Теорема доказана.**



## *Второй признак равенства треугольников*

### ТЕОРЕМА

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны





## Второй признак равенства треугольников

Дано:

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$

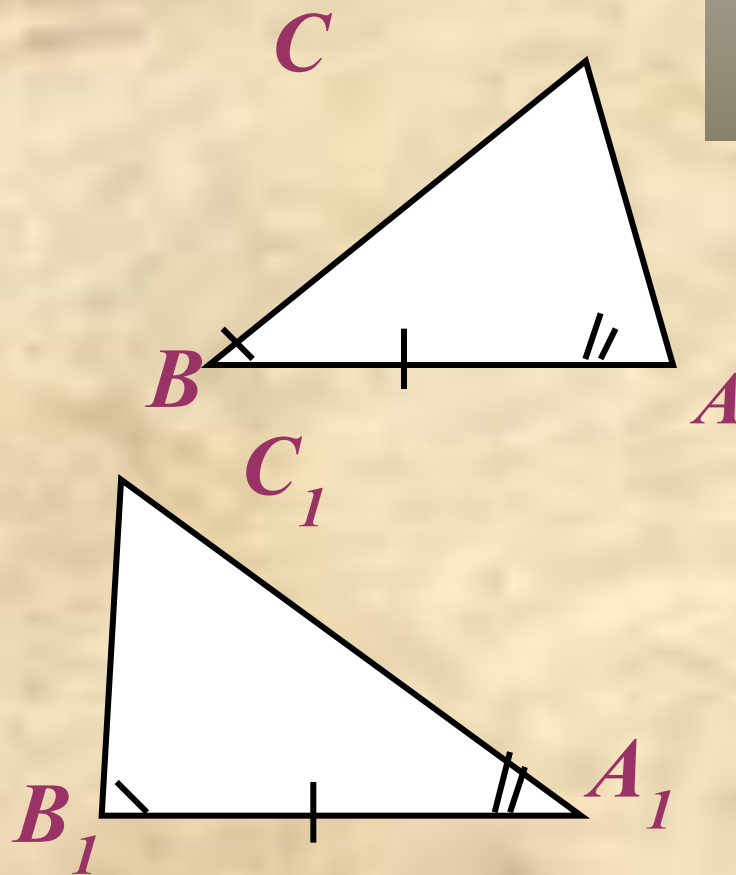
$BA = B_1A_1,$

$\angle B = \angle B_1,$

$\angle A = \angle A_1.$

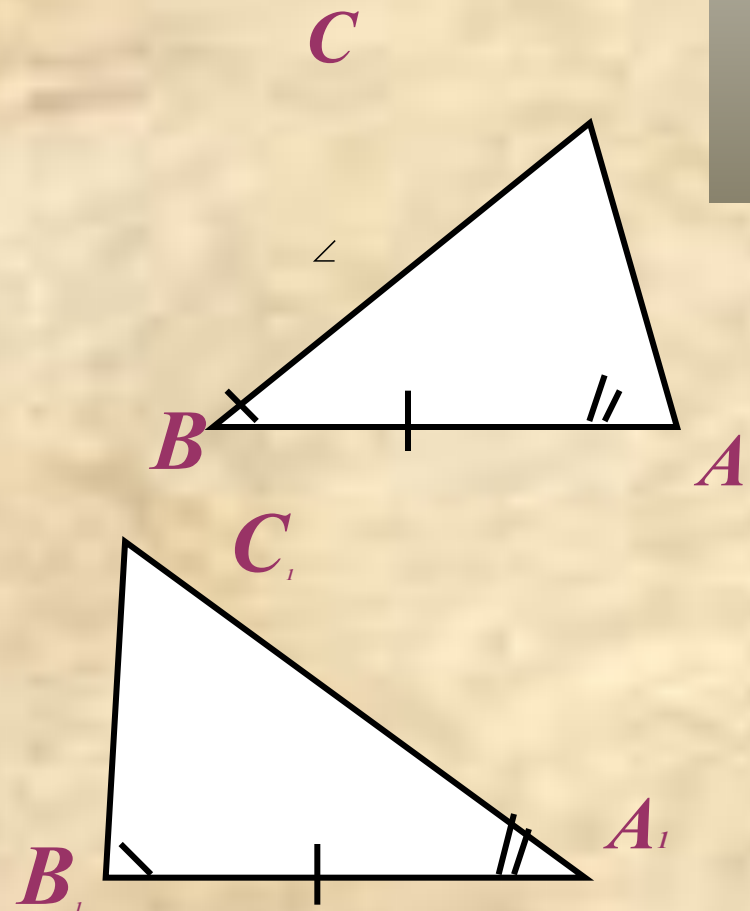
Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



# Доказательство

Наложим треугольник  $ABC$  на  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $A_1$ , сторона  $AB$  – с равной ей стороной  $A_1B_1$ , а вершины  $C$  и  $C_1$  оказались по одну сторону от прямой  $A_1B_1$ . Так как  $\angle A = \angle A_1$  и  $AB = A_1B_1$ , то сторона  $AC$  наложится на луч  $A_1C_1$ , а сторона  $BC$  – на луч  $B_1C_1$ . Поэтому вершина  $C$  – общая точка сторон  $AC$  и  $BC$  – окажется лежащей как на луче  $A_1C_1$ , так и на луче  $B_1C_1$  и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей – вершиной  $C_1$ . Значит, совместятся стороны  $AC$  и  $A_1C_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ . Итак, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  полностью совместятся, поэтому они равны. **Теорема доказана.**



# Третий признак равенства треугольников

## ТЕОРЕМА

---

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

---



# Третий признак равенства треугольников

Дано:

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$

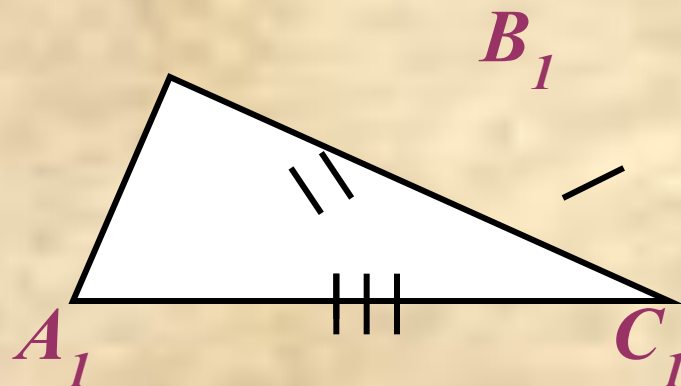
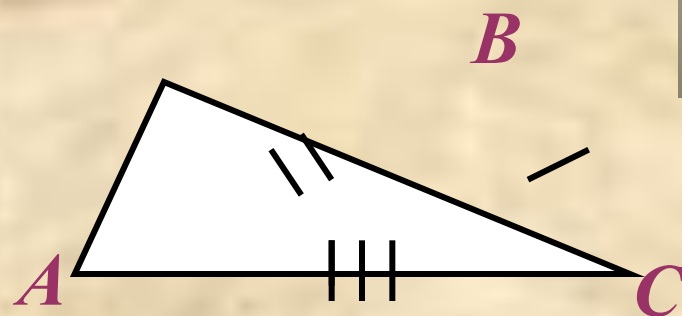
$AC = A_1C_1$

$AB = A_1B_1$

$BC = B_1C_1$

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

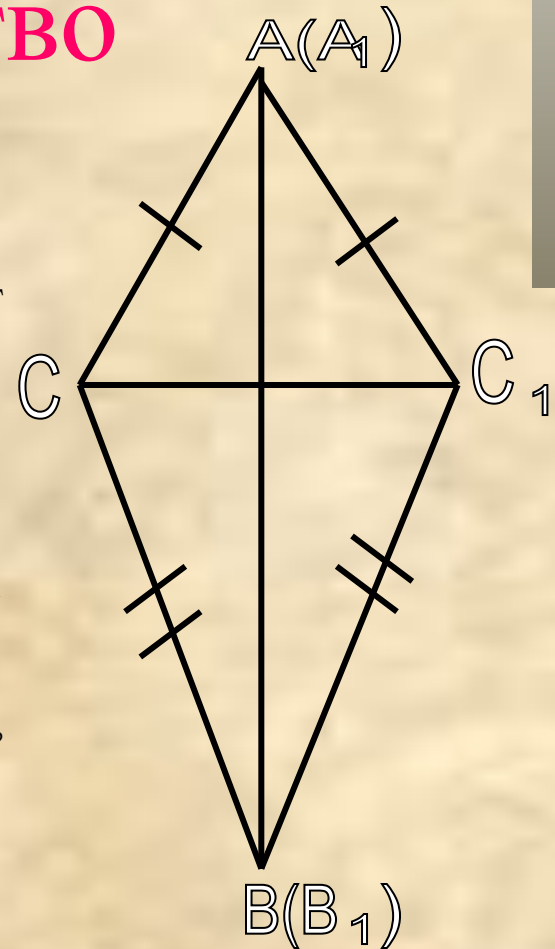


# Доказательство

Приложим треугольник  $ABC$  к треугольнику  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $A_1$ , вершина  $B$  – с вершиной  $B_1$ , а вершины  $C$  и  $C_1$  оказались по разные стороны от прямой  $A_1B_1$ .

Возможны три случая: луч  $C_1C$  проходит внутри угла  $A_1C_1B_1$ . Луч  $C_1C$  совпадает с одной из сторон этого угла. Луч  $C_1C$  проходит вне угла  $A_1C_1B_1$ . Рассмотрим первый случай. Так как по условию теоремы стороны  $AC$  и  $A_1C_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$  равны, то треугольники  $A_1C_1C$  и  $B_1C_1C$  – равнобедренные. По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника  $\angle AC_1C = \angle A_1C_1C$ , угол  $\angle BC_1C = \angle B_1C_1C$ , поэтому  $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$ . Итак,  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ .

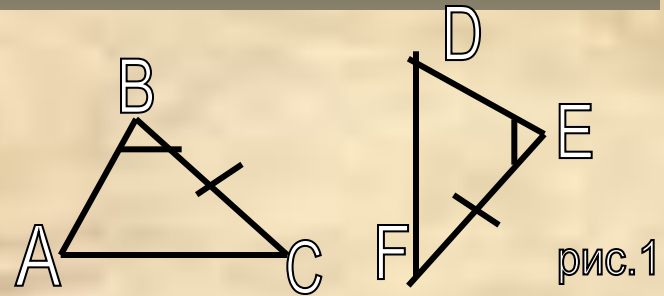
Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по первому признаку равенства треугольников. **Теорема доказана.**



# Тест.

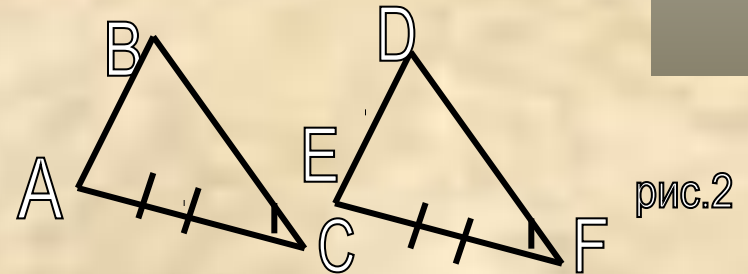
1. Для доказательства равенства треугольников ABC и DEF (рис 1) достаточно знать, что:

- а)  $AB=DF$ ; б)  $AC=DE$ ; в)  $AB=DE$ .



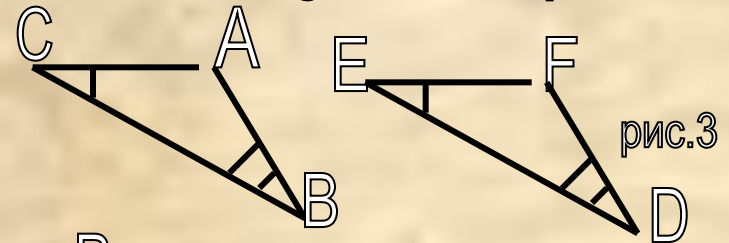
2. Для доказательства равенства треугольников ABC и EDF (рис 2) достаточно доказать, что:

- а)  $\angle A = \angle D$       б)  $\angle B = \angle D$       в)  $\angle A = \angle E$   
 $\angle A = \angle E$        $\angle B = \angle D$        $\angle A = \angle E$



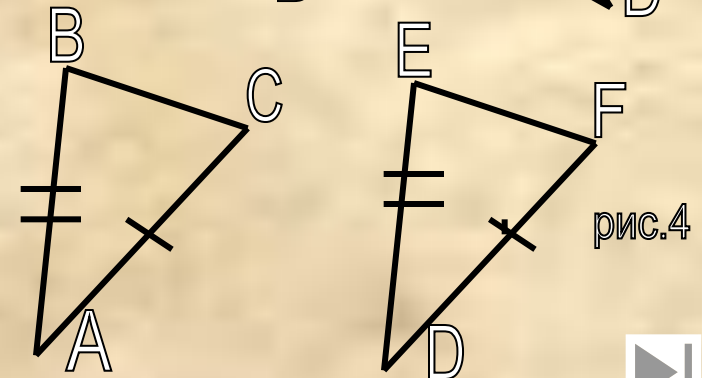
3. Из равенства треугольников ABC и FDE (рис 3) следует, что:

- а)  $AB=FD$       б)  $AC=DF$       в)  $AB=EF$ .



4. Из равенства треугольников ABC и DEF (рис 4) следует, что:

- а)  $\angle B = \angle D$       б)  $\angle A = \angle E$   
 $\angle C = \angle F$        $\angle C = \angle F$        $\angle A = \angle E$





5. В треугольнике ABC все стороны равны, и в треугольнике DEF все стороны равны. Чтобы доказать равенство треугольников ABC и DEF достаточно доказать, что :

а)  $\angle B = \angle D$ ;                      б)  $AB = DE$ ;                      в)  $P_{ABC} = P_{DEF}$  .

6. «Медиана в равнобедренном треугольнике является биссектрисой и высотой». Это утверждение :

а) верно всегда;                      б) всегда неверно;                      в) может быть верно.

7. В каком треугольнике только одна его высота делит треугольник на два равных треугольника?

а) в любом;                      б) в равнобедренном;                      в) в равностороннем.

8. Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник:

а) равнобедренный;                      б) равносторонний;                      в) прямоугольный.

9. Если треугольник равносторонний, то:

а) он равнобедренный;                      б) все его углы равны;

в) любая его биссектриса является медианой и высотой.





## Ответы к тесту.

1. В
2. В
3. А
4. В
5. Б
6. В
7. Б
8. А
9. А,Б,В