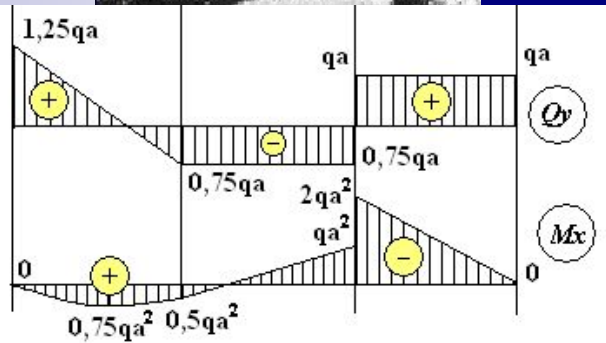


Бондаренко А.Н.

# Курс лекций по сопротивлению материалов



## Часть 1.1

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в ХабиИЖТе, СГУПСе и МИИТе (1965-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров. Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки. Завершение – Esc. Замечания и предложения можно послать по e-mail: [bond@miit.ru](mailto:bond@miit.ru).

Москва - 2007

# Аннотация

- Настоящее электронное пособие предназначено для студентов механических и строительных специальностей Московского государственного университета путей сообщения. Несмотря на наличие большого количества хороших учебников по курсу сопротивления материалов М.М. Филоненко - Бородича, Н.М. Беляева, В.И. Феодосьева, А.В. Даркова, А.Ф. Смирнова и многих других авторов студенты испытывают недостаток в учебной литературе при изучении этой дисциплины.
- Указанные курсы, отражая стремительное развитие науки и практики, от издания к изданию, увеличивали свой объем. Одновременно учебные планы по упомянутым дисциплинам насыщались другими специальными дисциплинами. При этом объем лекционного курса по сопротивлению материалов сокращался, и его содержание становилось менее полным.
- В настоящее время разрыв между объемом и содержанием учебной литературы, соответствующей достаточно полному курсу, и лекционных курсов на базе укороченной современной программы обучения приводит к тому, что использование студентами солидных учебников стало почти невозможным для изучения и усвоения основных положений механики прочности (сопротивления материалов).
- В этих условиях наиболее целесообразно использование электронных учебных материалов, отражающих программные вопросы, на основе которых возможно достаточно прочное усвоение основ механики деформируемого тела - сопротивления материалов. Последовательное предъявление материала с использованием анимации поможет студентам понять основные закономерности и методы анализа напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости.
- Содержание настоящего электронного пособия соответствует полной программе курса сопротивления материалов для механических и строительных специальностей МИИТа и опирается на учебник для вузов Александрова А.В., Потапова В.Д., Державина Б.П. Сопротивление материалов – М.: Высшая школа, 2001.
- Пособие составлено в форме конспекта лекций. По нему студенты могут проверить, исправить и дополнить свои лекционные записи. В процессе такой работы у студента появится основа для проработки лекционного материала при подготовке к экзаменам и интерес к изучению дополнительных вопросов по более полным учебникам и научной литературе.

# Содержание

- **Лекция 1.** Введение. Основные определения. Реальный объект и расчетная схема. Схематизация свойств материала и геометрии объекта. Внешние силы. Метод сечений. Внутренние усилия.
- **Лекция 2.** Напряжения. Перемещения и деформации. Виды простейших деформаций. Внутренние усилия при растяжении-сжатии. Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов.
- **Лекция 3.** Основные типы опор и балок. Чистый и поперечный изгиб. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
- **Лекция 4.** Центральное растяжение-сжатие. Принцип Сен-Венана. Напряжения и деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука. Модуль упругости. Напряжения на наклонных площадках.
- **Лекция 5.** Перемещения при растяжении сжатии. Учет собственного веса. Статически неопределимые системы при растяжении сжатии. Расчет статически неопределимых систем на действие нагрузки, температуры и неточность сборки (натяг).
- **Лекция 6.** Испытание материалов на растяжение-сжатие. Характеристики прочности и пластичности. Идеализированные диаграммы. Потенциальная энергия деформации (полная, удельная).
- **Лекция 7.** Диаграмма сжатия. Основные механические характеристики. Особенности разрушения пластических и хрупких материалов при растяжении-сжатии малоуглеродистой стали и чугуна. Понятие о ползучести и релаксации.
- **Лекция 8.** Основные сведения о расчете конструкций. Методы допускаемых напряжений и предельных состояний. Определение предельных нагрузок в статически неопределимых системах из идеального упруго-пластического материала.

## Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов для вузов. М.: Высшая школа. 1995, 2001 г. 560 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов под ред. Александрова А.В., М.: Стройиздат. 1977г. 335 с.
3. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ. Изд. МИИТ.
4. Лабораторные работы по сопротивлению материалов (Методические указания под ред. Александрова А.В., часть 1, МИИТ, 1974 г.)
5. Бондаренко А.Н. Тренажер для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Новосибирск.2004 г.  
[www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm](http://www.mii.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm)

# Лекция 1

## Введение

Сопротивление материалов является частью более общей науки – механики твердого деформируемого тела, в которую входят: теория упругости, теории пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др. Задачей сопротивления материалов является изучение методов расчета простейших элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.



**Прочностью** называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил не разрушаясь.

**Жесткостью** называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, получая лишь малые упругие деформации.

**Устойчивостью** называется способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, то есть **деформируются**. Деформации тела, исчезающие после снятия внешних сил, называются **упругими**, а не исчезающие – **остаточными** или **пластическими**.

- Определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается возможность разрушения деталей, является целью расчета на прочность.
- Определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций этих деталей, является целью расчета на жесткость.

## Реальный объект и расчетная схема

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, называется расчетной схемой. Переход от реального объекта к расчетной схеме осуществляется с помощью методов схематизации свойств материала.

## Схематизация свойств материала

Реальные материалы обладают разнообразными физическими свойствами. С целью упрощения расчетов в сопротивлении материалов вводят следующие допущения:

1. Материал считается **однородным**, если его свойства во всех точках одинаковы.
2. Материал считается **изотропным**, если его свойства во всех направлениях одинаковы.

**Изотропными** являются аморфные материалы, такие как стекло и смолы.

**Анизотропными** являются пластмассы, текстолит и т.п.

Металлы являются поликристаллическими телами, состоящими из большого количества зерен, размеры которых очень малы (порядка 0,01 мм).

Каждое зерно является анизотропным, но вследствие малых размеров зерен и беспорядочного их расположения металлы проявляют свойство изотропии.

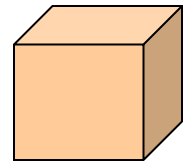
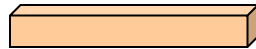
# Лекция 1 (продолжение – 1.2)

3. Материал обладает свойством **идеальной упругости**, вследствие которой деформируемое тело полностью восстанавливает свою форму и размеры после снятия нагрузки независимо от величин нагрузок и температуры тела.
4. Форма и размеры упругого тела меняются прямо **пропорционально изменению нагрузок**, то есть подчиняется закону Гука (1660 г.).
5. Материал обладает свойством **сплошности**, то есть способностью сплошь (без пустот) заполнять пространство, ограниченное поверхностью тела. Вследствие этого материал считается непрерывным, что позволяет использовать для определения напряжений и деформаций математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.
6. Упругие тела являются относительно жесткими, благодаря чему **перемещения точек тела весьма малы по сравнению** с размерами самого тела. Эта гипотеза служит основанием для использования при расчете начальных (исходных) размеров тела (по недеформированной схеме).

- **Схематизация геометрии реального объекта** – упрощает геометрию реально существующих тел, составляющих конструкцию. Большинство сооружений, механизмов и машин можно расчленить на отдельные тела простой геометрической формы:  
**Брус** - тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (стержни, стойки, валы, балки). Брус может иметь различную форму поперечного сечения (круглое, кольцевое, прямоугольное, коробчатое, двутавровое и др.). Поперечное сечение образуется при разрезе бруса плоскостью, перпендикулярной продольной оси, а продольная ось является линией, соединяющей центры тяжести поперечных сечений, и может быть прямой или криволинейной. Брус является основным объектом рассмотрения в курсе сопротивления материалов. Следующие тела являются объектами рассмотрения в других разделах механики твердого деформируемого тела (теория пластин и оболочек, теория упругости и др.):

**Оболочка, пластина** - тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими (тонкостенные резервуары, оболочки перекрытия, плиты, стенки).

**Массив** - тело, все три измерения которого мало отличаются друг от друга (фундаментные блоки, шарик подшипника, тело гравитационной плотины).



- **Схематизация силового воздействия** – представляет модель механического действия **внешних сил** на объект от других тел или сред. К внешним силам относятся также и **реакции связей**, определяемые методами теоретической механики. Схематизация силового воздействия сводится к рассмотрению трех типов нагрузки:

**Сосредоточенная сила** – сила, рассматриваемая в курсе теоретической механики как вектор, характеризуемый модулем (величиной), направлением действия и точкой приложения. Здесь такая сила является условной, поскольку механическое взаимодействие деформируемых тел не может осуществляться в точке (площадь контакта не равна нулю). Условность состоит в том, что в случае малости площадки контакта по сравнению с размерами объекта, **сила считается приложенной в точке**. Если же определяются контактные напряжения, например, в головке рельса, то учитывается фактическое распределение нагрузки на рельс по площадке контакта, размеры которой зависят от величины сжимающей силы (равнодействующей давления). Сосредоточенная сила измеряется в ньютонах (Н).

**Объемные силы** – силы, распределенные по объему (силы тяжести, силы инерции), приложенные к каждой частице объема. Для этих сил схематизация часто состоит в задании простого закона изменения этих сил по объему.

Объемные силы определяются их интенсивностью, как предел отношения равнодействующей сил в рассматриваемом элементарном объеме к величине этого объема, стремящегося к нулю:

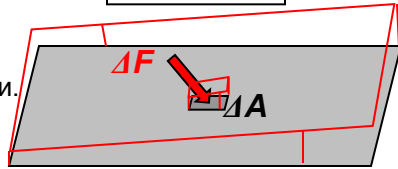
$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

и измеряются в Н/м<sup>3</sup>.

# Лекция 1 (продолжение – 1.3)

**Поверхностные силы** – силы, распределенные по поверхности (давление жидкости, газа или другого тела), характеризующиеся интенсивностью давления, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной площадке к величине площади этой площадки, стремящейся к нулю:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

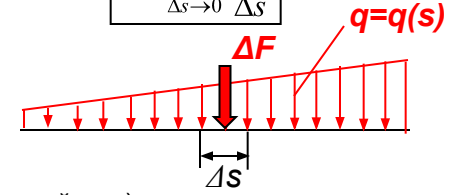


и измеряются в Н/м<sup>2</sup>.

Для этих сил схематизация часто состоит в задании простого закона изменения этих сил по поверхности.

**Линейно распределенная нагрузка** – силы, распределенные по некоторой линии (длине), характеризующаяся интенсивностью нагружения, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной длине линии к величине длины этой линии, стремящейся к нулю:

$$q = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}$$

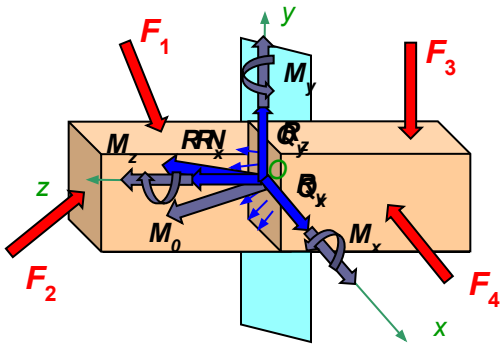


и измеряются в Н/м.

Для этих сил условность состоит в представлении области контакта в виде линии нулевой толщины. Характер изменения часто задается в виде простого закона (постоянного, линейного).

По характеру воздействия на сооружения внешние силы делятся на статические и динамические. **Динамическая нагрузка** быстро изменяется во времени (при движении подвижного состава, колебания, удар). При медленном изменении нагрузки можно пренебречь силами инерции и деформациями, возникающими в объекте, и такая нагрузка может условно считаться **статической**. По времени действия на сооружения нагрузки делятся на **постоянные** (вес пролетного строения, вес мостового полотна) и **временные** (нагрузка от проходящего подвижного состава, ветровая или снеговая нагрузка). Временные нагрузки регламентируются специальными документами (СНиП, ТУ).

- Внутренние силы** – Под действием **внешних сил** на объект происходит изменение расстояний между частицами (атомами) рассматриваемого тела и сил взаимодействия между ними. В результате возникают так называемые **внутренние силы**, которые можно определить **методом сечений**:



$$\begin{aligned} Q_x + \sum X_i^{\text{оставл. части}} &= 0; & M_x + \sum M_{xi}^{\text{оставл. части}} &= 0; \\ Q_y + \sum Y_i^{\text{оставл. части}} &= 0; & M_y + \sum M_{yi}^{\text{оставл. части}} &= 0; \\ N + \sum Z_i^{\text{оставл. части}} &= 0; & M_z + \sum M_{zi}^{\text{оставл. части}} &= 0. \end{aligned}$$

Или, как легко можно доказать:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum X_i^{\text{отброш. части}}; & M_x &= \sum M_{xi}^{\text{отброш. части}}; \\ Q_y &= \sum Y_i^{\text{отброш. части}}; & M_y &= \sum M_{yi}^{\text{отброш. части}}; \\ N &= \sum Z_i^{\text{отброш. части}}; & M_z &= \sum M_{zi}^{\text{отброш. части}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & \sum M_{xi} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & \sum M_{yi} &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; & \sum M_{zi} &= 0. \end{aligned}$$

е действие на оставшуюся часть бруса ... образом по поверхности поперечного

иведением к главному вектору и нтр тяжести поперечного сечения.

5. Разложим главный вектор и главный момент на

6. Полученные компоненты имеют в сопротивлении материалов специальные названия, соответствующие видам деформации:

$R_z = N$  – нормальная сила,  $R_x = Q_x$ ,  $R_y = Q_y$  – поперечные силы и  $M_z$  – крутящий момент,  $M_x$ ,  $M_y$  – изгибающие

моменты. Поскольку оставленная часть бруса должна остаться в равновесии, полученные внутренние силовые факторы могут быть определены: из уравнений равновесия, составленных для этой части:

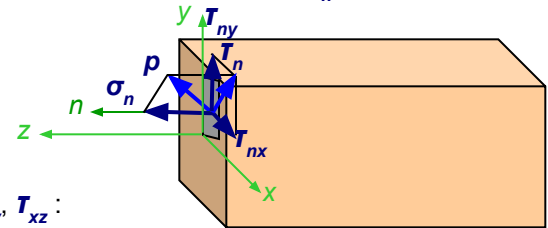
# Лекция 2

## ■ Напряжения – мера, характеризующая распределение внутренних сил по сечению.

Поскольку внутренние силы, представляют собой поверхностные силы, приложенные к поперечному сечению оставленной части, то интенсивность этих сил, называемое **полным напряжением**, определяется как указано ранее: Размерность этого напряжения совпадает с размерностью поверхностной нагрузки ( $\text{Н/м}^2$ ,  $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2$ ).

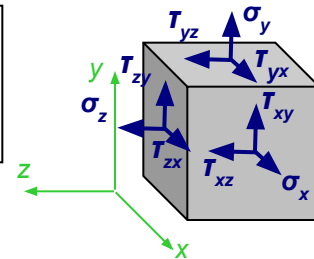
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Полное напряжение, как и равнодействующая внутренних сил, приложенных на элементарной площадке, является векторной величиной и может быть разложено на две составляющие: перпендикулярное к рассматриваемой площадке – **нормальное напряжение  $\sigma_n$**  и касательное к площадке – **касательное напряжение  $T_n$** :



Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие, параллельные координатным осям  $x, y$ , связанным с поперечным сечением –  **$T_{nx}, T_{ny}$** :

При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами  $dx, dy, dz$ ), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси  $x$  (площадка  $x$ ) –  **$\sigma_x, T_{xy}, T_{xz}$** :



Компоненты напряжений по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, описываемую так называемым **тензором напряжений**:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

Здесь пер  
нормальн  
индекс ук  
нормальн

Напомним, что **опорные реакции конструкции включаются в число внешних сил**. Для определения этих реакций в статически неопределимых системах уравнений равновесия недостаточно и следует дополнительно рассматривать **перемещения**, связанные с внутренними усилиями и напряжениями, а также физические соотношения упругости.

Задача определения напряжений в силу интегральности соотношений с внутренними усилиями всегда статически неопределима и необходимо дополнительно рассматривать **деформации** тела с целью определения закона распределения напряжений по сечению.

## ■ Связь в

связаны у  
усилия ес  
выполняет

сечении. С другой стороны внутренние  
элементарным площадкам (напряжений),  
сечению.

Выполнение этой операции для каждого из внутренних усилий приводит к следующим интегральным выражениям:

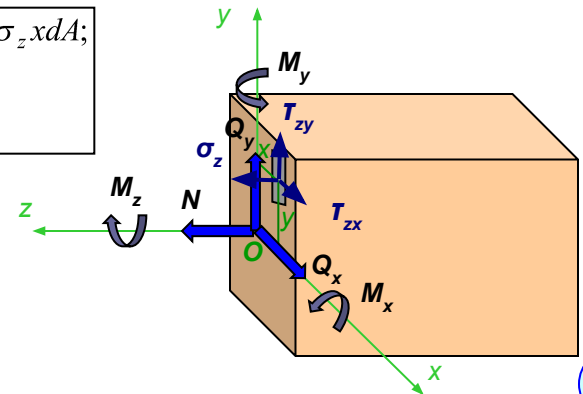
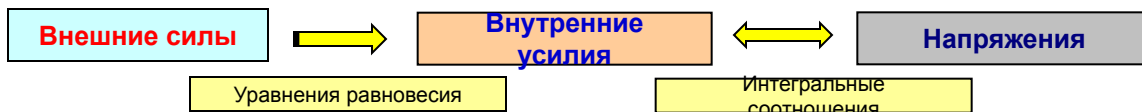
$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = -\int_A \sigma_z x dA;$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.$$

Таким образом, в целом связь внешних сил, внутренних усилий и напряжений такова:



## Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Перемещения** – переход точек тела в новое положение вследствие изменения формы и размеров тела под действием нагрузки.

Полное перемещение точки в пространстве раскладывается на компоненты  $u$ ,  $v$  и  $w$ , параллельные осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно. Перемещения рассматриваемой точки зависят от деформации всех нагруженных областей тела и включают в себя перемещения как жесткого целого ненагруженных областей. Таким образом, перемещения не могут характеризовать степень деформирования в окрестности рассматриваемой точки.

- **Деформация в точке** – мера деформирования материала в ее окрестности. Выделим в рассматриваемой точке тела элементарный объем (параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) и рассмотрим его возможные изменения размеров и формы.

Пусть за счет деформации длины его ребер получат **абсолютные удлинения**  $\Delta dx$ ,  $\Delta dy$  и

**Относительные линейные деформации** в точке:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Кроме линейных деформаций, связанных с изменением размеров линейных элементов возникают **угловые деформации** или **углы сдвига**, связанные с изменением формы.

Например, в плоскости  $xy$  могут возникнуть малые изменения первоначально прямых углов параллелепипеда:

$$\frac{\Delta x}{dy} = \operatorname{tg} \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}.$$

Такие угловые деформации в общем случае могут иметь место во всех трех плоскостях. Все относительные деформации весьма малы и имеют для реальных материалов порядок  $\approx 10^{-4}$ - $10^{-3}$ .

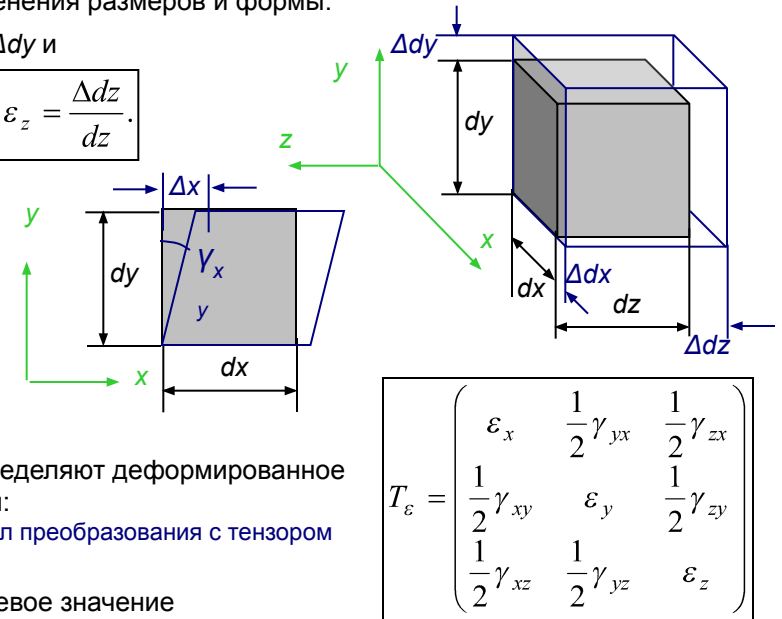
Таким образом, совокупность относительных линейных и угловых деформаций определяют деформированное состояние в точке и образуют **тензор деформаций**, подобный тензору напряжений:

*Примечание:* Половинные углы сдвига используются в целях получения аналогичных формул преобразования с тензором напряжений.

В зависимости от того, какие из компонент относительных деформаций имеют нулевое значение в рассматриваемой области или для всего тела различают следующие **простые виды деформаций**:

1. **Линейная деформация** –  $\varepsilon_z \neq 0$ , углы сдвига равны нулю, остальными линейными относительными деформациями пренебрегается (характеризуется абсолютным и относительным удлинением).
2. **Плоская деформация** –  $\varepsilon_z \neq 0$ ,  $\varepsilon_x \neq 0$  или  $\varepsilon_y \neq 0$ , остальные относительные деформации равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным сужением площади поперечного сечения). Эти виды деформаций обычно реализуются при растяжении-сжатии.
3. **Объемная деформация** –  $\varepsilon_z \neq 0$ ,  $\varepsilon_x \neq 0$ ,  $\varepsilon_y \neq 0$ , углы сдвига равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным изменением объема).
4. **Чистый сдвиг** – линейные относительные деформации равны нулю, углы сдвига не равны нулю (характеризуется изменением формы, изменение объема не происходит). Это вид деформации также возникает при кручении.

В соответствии с видом деформации вначале последовательно изучают такие простейшие напряженно-деформированные состояния как растяжение-сжатие, чистый сдвиг и кручение, чистый изгиб. Далее изучаются более сложные – поперечный изгиб, сложное сопротивление, продольный изгиб.





## Лекция 2 (продолжение – 2.3)

■ **Определение внутренних усилий** – Внутренние усилия определяются **методом сечений** в совокупности точек по длине бруса с целью обнаружения их максимальных значений. График изменения внутреннего усилия по оси бруса называется **эпюрой**.

**Общий порядок построения эпюр внутренних усилий:**

1. Если необходимо, то **определяются опорные реакции** так, как это делается в курсе теоретической механики (выбрать объект, отбросить связи, заменить отброшенные связи реакциями, составить уравнения равновесия). Реакции можно не находить, если они не входят в число внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения.

2. **Определяется число участков** бруса, на которых действует одна из сил, являющихся фактором, влияющий на резкое (скачкообразное) место расположения опоры, точка приложения начала или конец распределенной нагрузки.

3. **На каждом из участков проводится сечение** и на каждом сечении указывается текущая координата сечения. При выборе начала локальных координат сечения берется начало или конец распределенной нагрузки.

4. Для рассматриваемого сечения отбросим левую часть бруса или оставленную часть или используя установленную сторону от сечения.

5. По полученным выражениям строим эпюру внутренних усилий, откладывая другие значения координат в разрешенном направлении.

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 1:  $N^{I-I} = F_1 - F_2$ .

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения:  $0 \leq z_2 \leq b$ .

4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой  $N^{II-II}$  и составим уравнение равновесия в проекции на ось z:  $\sum Z_i = 0; -N^{II-II} - F_2 = 0$ .

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 2:  $N^{II-II} = -F_2$ .

Аналогично получаем для участка 3 ( $0 \leq z_3 \leq c$ ):  $\sum Z_i = 0; -N^{III-III} = 0$ .  $N^{III-III} = 0$ .

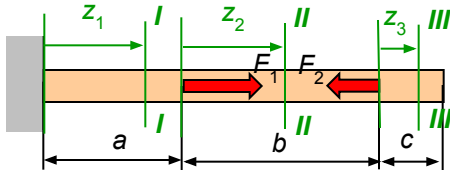
Полученные выражения показывают, что **продольная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций на ось бруса сил, взятых по одну сторону от сечения!**

$$N = \sum F_{xi}^{\text{прав}} = \sum F_{xi}^{\text{лев}}$$

**Знак слагаемых положителен, если рассматриваемая сила направлена от сечения, т.е. будучи приложена к сечению вызывает растяжение** части бруса по другую сторону от сечения.

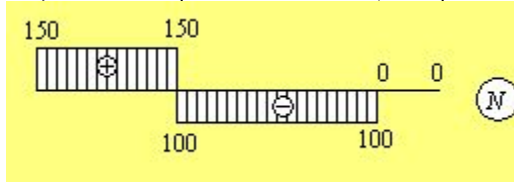
■ **Внутренние усилия при растяжении** – фактор – **продольная сила N**. В соответствии с уравнения равновесия в проекции на ось, с

■ Продольная сила считается **положительной**, если она вызывает **растяжение**, т.е. направлена от сечения (в сторону внешней нормали), и **отрицательной**, если она вызывает **сжатие**, т.е. направлено к сечению.



Используя метод сечений, построим эпюру продольных сил:

При построении **эпюры N**, положительные значения обычно откладываются вверх от базисной линии или вправо, если она вертикальна. Реакции левой опоры можно не определять, т.к. в этом примере можно ограничиться рассмотрением лишь сил, действующих на оставленную часть (справа от сечений). Пусть  $F_1 = 200$  кН,  $F_2 = 100$  кН. Откладывая на каждом из участков значения продольной силы в некотором выбранном направлении, получаем эпюру N:



Проведем сечение I-I на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения:  $0 \leq z_1 \leq a$ . Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой  $N^{I-I}$  и составим уравнение равновесия в проекции на ось z:

$$\sum Z_i = 0; -N^{I-I} + F_1 - F_2 = 0$$

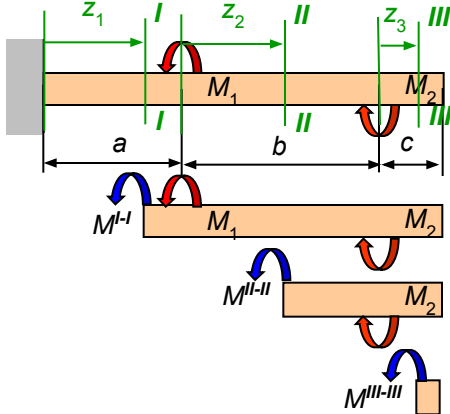
## Лекция 2 (продолжение – 2.4)

- Внутренние усилия при кручении** – При кручении в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор – **крутящий момент  $M_z$** . В соответствии с методом сечений величина и направление крутящего момента может быть найдены из уравнения равновесия в моментах относительно оси, совпадающей с осью стержня, составленного для оставленной части:

- Крутящий момент считается **положительным**, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он поворачивает сечение **по ходу часовой стрелки**.

Внимание! Это правило знаков условное и не совпадает с принятыми правилами знаков моментов, углов поворота в теоретической механике и математике, поскольку связано не с системой координат, а с видом деформации оставленной части, точно также, как правило знаков для продольного усилия связано не с направлением оси  $z$ , а с видом деформации рассматриваемой части бруса.

- Построение эпюры крутящих моментов** принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил. Положительные значения откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз.



Пусть прямолинейный брус нагружен внешними сосредоточенными крутящими моментами  $M_1, M_2$ :

Используя полученные выражения для крутящего момента построим эпюру крутящих моментов: Пусть  $M_1=250$  Нм,  $M_2=100$  Нм. Откладывая на каждом из участков значения крутящего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюру  $M_z$ :

Обратите внимание, что **скачки на эпюре  $M_z$  располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных моментов и равны величинам этих моментов**. Соответственно скачок на левом конце эпюры дает величину опорного момента.

в моментах относительно оси  $z$ .  $\sum M_{zi} = 0; -M_z^{I-I} - M_1 + M_2 = 0.$

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 1 :  $M_z^{I-I} = -M_1 + M_2.$

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение **II-II** на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее действия:  $0 \leq z_2 \leq b.$

бросим левую часть, заменим ее действие крутящим моментом  $M_z^{II-II}$   $\sum M_i = 0; -M_z^{II-II} + M_2 = 0.$

тавим уравнение равновесия в моментах относительно оси  $z$  :  $M_z^{II-II} = M_2.$

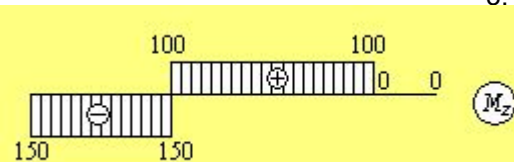
анвения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 2 :  $M_z^{III-III} = 0.$

Аналогично получаем для участка 3 ( $0 \leq z_3 \leq c$ ):  $\sum M_{zi} = 0; -M_z^{III-III} = 0.$

Полученные выражения показывают, что **крутящий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси бруса, взятых по одну сторону от сечения!**

$$M_z = \sum M_{zi}^{\text{прав}} = \sum M_{zi}^{\text{лев}}$$

**Знак слагаемых положителен, если рассматриваемый внешний крутящий момент вращает сечение по часовой стрелке при взгляде на сечение со стороны внешней нормали.**



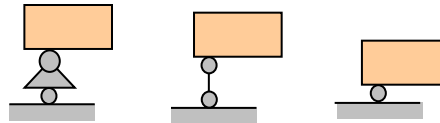
# Лекция 3

■ **Основные типы опор и балок** – Стержни, работающие главным образом на изгиб, называются **балками**. Балки являются простейшими несущими конструкциями в мостах, промышленных и гражданских сооружениях. Балки опираются на другие конструкции или основание (стены, колонны, устои и др.).

■ **Схематизация опорных устройств** – упрощает реальные конструкции опорных устройств с сохранением функций ограничения перемещений. Схематизация большинства из опорных устройств рассмотрена в курсе теоретической механике и сводится к к нескольким типам опор:

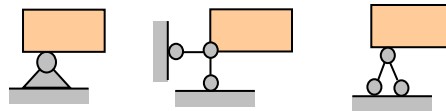
**Шарнирно-подвижная (катковая) опора** – ограничивает перемещение объекта по нормали к опорной плоскости (не препятствует повороту и перемещению по касательной к опорной плоскости).

Другие схематические изображения шарнирно-подвижной опоры:

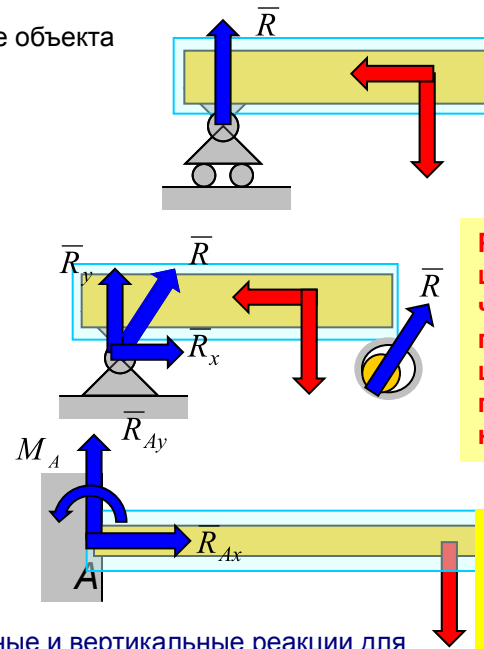


**Шарнирно-неподвижная опора** – ограничивает перемещение объекта как по нормали к опорной плоскости, так и по касательной (не препятствует повороту).

Другие схематические изображения шарнирно-неподвижной опоры:



**Жесткое защемление (жесткая заделка)** – ограничивает как поступательные, так и вращательные движения (линейные и угловые перемещения) объекта. В случае плоской системы сил (плоская заделка) ограничиваются перемещения по осям  $x$ ,  $y$  и поворот в плоскости  $x$ ,  $y$ .

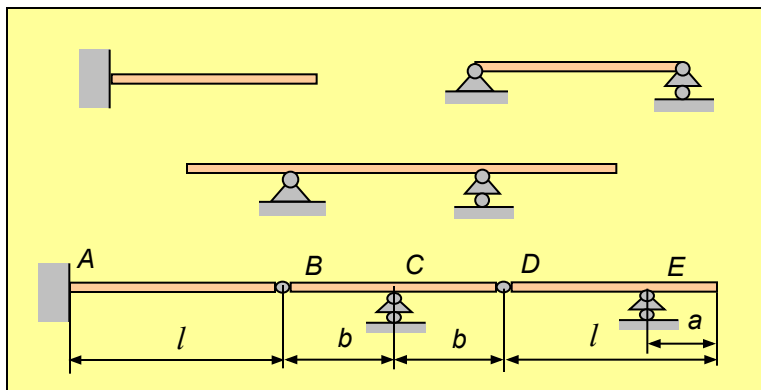


Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира

Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие, например,  $R_x$  и  $R_y$ .

В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , а также реактивный момент (пара сил)  $M_A$ .



...нике горизонтальные и вертикальные реакции для (horizontal) и  $V_A$  (vertical).  
...кции по направлению трех координатных осей и три

...я обеспечения неподвижности балки (плоские системы – 3, пространственные – 6)  
...о изменяемость системы.

- **Основные типы балок** – различаются способом закрепления:
- **Консоль** – один конец жестко защемлен, второй свободен.
- **Простая (двух опорная)** – по обоим концам шарнирные опоры.
- **Консольная (двух опорная)** – простая балка с консольными частями.
- **Составная балка** – составленная из двух или более простых, консольных балок и консолей.

# Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- **Определение опорных реакций в балках** – выполняется методами теоретической механики.
- **Уравнения равновесия** могут быть составлены в виде одной из трех форм:

$\sum X_i = 0;$	$\sum X_i = 0;$	$x$	$\sum M_{iC} = 0;$	$C$
$\sum Y_i = 0;$	$\sum M_{iB} = 0;$	$\perp$	$\sum M_{iB} = 0;$	$\notin$
$\sum M_{iA} = 0$	$\sum M_{iA} = 0$	$AB$	$\sum M_{iA} = 0$	$AB$

Поскольку найденные опорные реакции участвуют в дальнейших расчетах (построение эпюр внутренних усилий, определение напряжений и перемещений) следует активно пользоваться этими формами уравнений так, чтобы в каждое из уравнений входила лишь **одна определяемая реакция**, чтобы исключить подстановку ранее найденных и не проверенных реакций. После независимого вычисления всех реакций **обязательно должна быть сделана проверка** составлением такого уравнения равновесия, в котором бы присутствовали все или большинство из найденных реакций. Поскольку балки несут преимущественно вертикальную нагрузку, то в общем случае рекомендуется воспользоваться **формой II** и проверить вертикальные реакции составлением **уравнения в проекциях на вертикальную ось**.

**Помните, что неверно найденные реакции в любом случае приведут к неверным результатам при построении эпюр, определении напряжений и перемещений!**

- **Внутренние усилия при изгибе** – При изгибе возникают в общем случае изгибающие моменты  $M_x, M_y$  и поперечные силы  $Q_x, Q_y$ . Если в поперечном сечении возникает только один изгибающий момент  $M_x$ , то такой изгиб называется **чистым**. В большинстве случаев дополнительно к изгибающему моменту возникает поперечная сила  $Q_y$ , и такой изгиб называется **поперечным**.

Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, то такой изгиб называется **плоским**.

- **Правила знаков для изгибающего момента** – Изгибающий момент принимается положительным, если он изгибает элемент балки так, нижние волокна оказываются растянутыми, т.е. ось балки искривляется выпуклостью вниз.

- **Правила знаков для поперечной силы** – Поперечная сила принимается положительной, если она стремится повернуть элемент балки по ходу движения.

- **Дифференциальные зависимости** – Рассмотрим элемент балки длиной  $dz$ , нагруженный равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , и заменим действующие на него силы и моменты. Выделенный элемент находится в равновесии и удовлетворяет уравнения равновесия: Из первого уравнения получаем:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y.$$

**Производная от поперечной силы по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.**

С использованием этих основных зависимостей получаем:

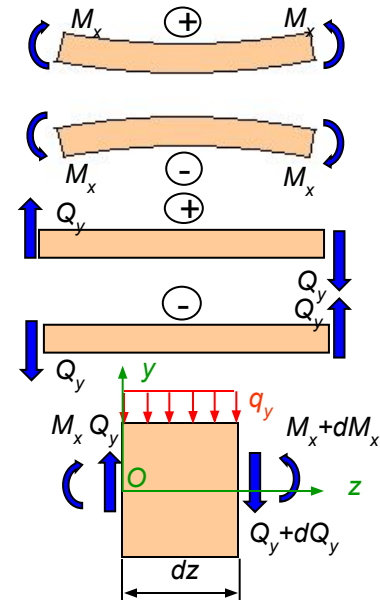
$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y.$$

**Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.**

Из второго уравнения, пренебрегая малыми второго порядка получаем:

**Производная от изгибающего момента по продольной координате равна поперечной силе.**

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

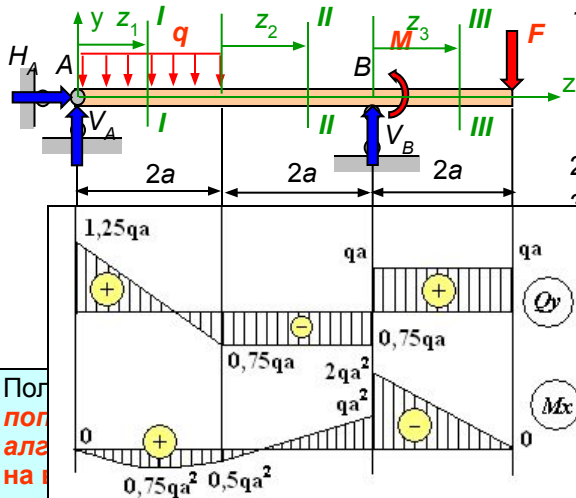


# Лекция 3 (продолжение – 3.3)

- Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил** – принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил и крутящих моментов. Положительные значения поперечной силы  $Q_y$  откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз. Положительные значения изгибающих моментов  $M_x$  откладываются **вниз** – со стороны растянутого волокна. Таким образом расположение ординат эпюры  $M_x$  указывают, какие волокна растянуты.

Примечание: Это правило принято в строительных и транспортных вузах в то время, как в машиностроительных и авиационных вузах используется обратное правило (положительный момент откладывается со стороны сжатого волокна).

Пусть балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , сосредоточенной силой  $F=qa$  и крутящим моментом  $M=qa^2$ :



- Определяем опорные реакции:
 
$$\sum Z_i = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -F6a + M + V_B 4a - (q2a)a = 0; \quad V_B = 1,75qa$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -F2a + M + (q2a)3a - V_A 4a = 0; \quad V_A = 1,25qa$$
- Количество участков – 3.
 
$$F6a - M + q2a^2 \quad qa6a - qa^2 + q2a^2$$

Используя полученные выражения для поперечной силы и изгибающего момента построим эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подставляя значения реакций и координаты начала и конца участков. В случае квадратичного изменения величины (изгибающий момент на первом участке) дополнительно подставляется координата точки внутри интервала, например, посередине. Откладывая на каждом из участков значения поперечных сил и изгибающего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ :

Отсюда получаем:

$$Q_y^{I-I} = V_A - qz_1.$$

$$M_x^{I-I} = V_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}.$$

повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее  $2a \leq z_2 \leq 4a$ .

вторую часть, заменим ее действие поперечной силой  $Q_y^{II-II}$  и изгибающим моментом  $M_x^{II-II}$  уравнения равновесия в проекциях и в моментах относительно оси  $x$ , проходящей через это сечения (т.е. относительно точки D):

$$\sum Y_i = 0; \quad V_A - q2a - Q_y^{II-II} = 0; \quad \sum M_{Di} = 0; \quad -V_A(2a + z_2) + q2a(a + z_2) + M_x^{II-II} = 0.$$

получаем:

$$Q_y^{II-II} = V_A - q2a.$$

$$M_x^{II-II} = V_A(2a + z_2) - q2a(a + z_2).$$

получаем для участка 3 ( $0 \leq z_3 \leq 2a$ ):

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_y^{III-III} - F = 0; \quad \sum M_{Ei} = 0; \quad -M_x^{III-III} - F(2a - z_3) = 0.$$

$$Q_y^{III-III} = F.$$

$$M_x^{III-III} = -F(2a + z_2).$$

Свойства эпюр:

- Равномерно распределенная нагрузка на участке своего действия вызывает на эпюре  $Q$  наклонную прямую линию, падающую в сторону действия нагрузки, а на эпюре  $M$  – параболу с выпуклостью в ту же сторону.
- Сосредоточенная сила вызывает на эпюре  $Q$  скачок в точке приложения силы в сторону действия силы, а на эпюре  $M$  – перелом в ту же сторону.
- Сосредоточенный момент не вызывает на эпюре  $Q$  в точке его приложения никаких особенностей, а на эпюре  $M$  вызывает скачок в ту же сторону.

**Смотрите и удивляйтесь!**

# Лекция 4

- **Центральное растяжение-сжатие** – Во многих элементах конструкций возникают только продольные усилия, вызывающие в них деформации растяжения или сжатия (стойки, элементы ферм, тяги, тросы и т.п.). При этом в местах приложения условно сосредоточенных сил характер распределения деформаций достаточно сложный и отличается от распределения деформаций на удалении от этой локальной области. Размер этой области равен примерно наибольшему из размеров поперечного сечения.
- **Принцип Сен-Венана** - Если совокупность некоторых сил, приложенных к небольшой части поверхности тела, заменить статически эквивалентной системой других сил, то такая замена не вызовет существенных изменений в условиях нагружения частей тела, достаточно удаленных от мест приложения исходной системы сил.
- Как показывает опыт, за пределами этой области деформации практически постоянны и поперечные сечения перемещаются параллельно своим начальным положениям. На основании этого вводится **гипотеза плоских сечений** (Я. Бернулли):  
**Поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными после деформации.**

- **Напряжения и деформации** – Как было ранее сказано, задача определения напряжений всегда является *статически неопределимой*. Такие задачи решаются последовательным рассмотрением статической, геометрической и физической сторон. В данном случае имеем *статическое* уравнение, связывающее внутреннее усилие – продольную силу с напряжением:

$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

Для вычисления интеграла необходимо знать закон изменения напряжений по сечению. Этот закон можно установить изучением непосредственно наблюдаемых перемещений (деформаций). Поскольку принимается гипотеза плоских сечений, то при отсутствии внешней *распределенной* продольной нагрузки **деформации постоянны по сечению и по длине стержня (геометрия)**. Из введенного ранее определения деформаций в точке :

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{dz} = const. \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{прод}} = \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{где } \Delta l \text{ – абсолютная продольная деформация (удлинение), } l \text{ - длина (базовая длина) стержня.}$$

Опытным путем установлена фундаментальная (*физическая*) связь усилий и удлинений (Р. Гук) и в дальнейшем, напряжений и деформаций (Коши, Навье) в виде:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{где } E \text{ – модуль упругости (физическая постоянная материала, определяемая экспериментально).}$$

Подстановка последнего соотношения – **закона Гука** в интегральное выражение с учетом постоянства деформации и напряжения дает:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A; \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{N}{A}. \quad \text{Нормальное напряжение в поперечном сечении прямо пропорционально величине продольного усилия и обратно пропорционально площади сечения.}$$

**Абсолютную деформацию** (удлинение) стержня также можно определить через продольное усилие:  $\Delta l = \varepsilon_z l = \frac{\sigma}{E} l. \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$

Формула для абсолютного удлинения справедлива лишь при постоянной по длине стержня продольной силе и неизменной площади поперечного сечения! В случае переменной продольной силы, например, при учете собственного веса вертикальных стержней, и/или переменной площади необходимо использовать интегральное выражение:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EA}.$$

# Лекция 4 (продолжение – 4.2)

- Коэффициент Пуассона** – При растяжении стержня наряду с продольной деформацией (удлинением), определяемой законом Гука, возникает поперечная деформация (сужение поперечного сечения), выражающаяся в уменьшении поперечных размеров стержня. Относительные поперечные деформации вычисляются как

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_x = -\frac{\Delta b}{b}, \quad \text{где } b, h - \text{размеры поперечного сечения.}$$

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_y = -\frac{\Delta h}{h},$$

Экспериментально установлено, что имеется линейная связь между продольной и поперечной деформацией:

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{прод}}, \quad \text{где } \mu - \text{коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Пуассона.}$$

Коэффициент Пуассона для данного материала в пределах упругих деформаций имеет постоянное значение и находится в пределах от 0 до 0,5.

По **закону Гука**, определяющему связь нормальных напряжений с продольными деформациями:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}.$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Материал	$\mu$
Сталь	0,25-0,33
Медь, бронза	0,31-0,35
Чугун	0,23-0,27
Бетон	0,08-0,18
Древесина вдоль волокон	0,5
поперек волокон	0,02
Алюминий	0,32-0,36
Резина, каучук	0,47-0,5

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Как упоминалось ранее, в *общем случае нагружения* по граням выделенного элемента возникают нормальные и касательные напряжения. Последние, вызывая деформации сдвига, не влияют на линейные деформации, поскольку не изменяют длин сторон элемента. Используя *принцип независимости действия сил*, справедливый для изотропного и линейно упругого материала, можно записать **обобщенный закон Гука**, учитывающий одновременное действие нормальных напряжений по всем граням элемента:

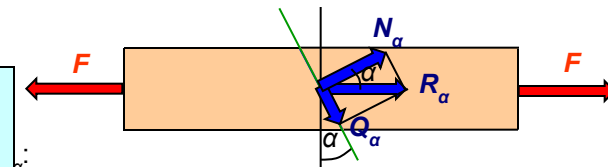
- Напряжения по наклонным площадкам** – При растяжении стержня в его поперечном сечении возникают только нормальные напряжения. Посмотрим какие напряжения возникают в сечении, не перпендикулярном оси стержня.

Анализ полученных соотношений показывает:

- При  $\alpha = 0$  (наклонная площадка совпадает с поперечным сечением): Касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения максимальны.
- При  $\alpha = 45^\circ$  касательные напряжения максимальны, а нормальные напряжения равны касательным.
- При  $\alpha = 90^\circ$  (продольная площадка) нормальные и касательные напряжения обращаются в ноль (продольные волокна не давят друг на друга и не сдвигаются).
- На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине.

$$\sigma_\alpha = \sigma_z; \quad \tau_\alpha = 0.$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}.$$



$$N_\alpha = R_\alpha \cos \alpha = F \cos \alpha;$$

$$Q_\alpha = R_\alpha \sin \alpha = F \sin \alpha.$$

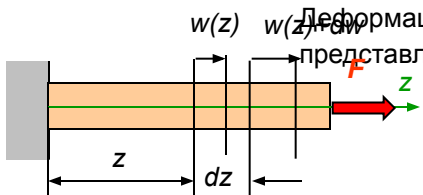
в сечении равна  
А есть  
да получаем:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha.$$

# Лекция 5

- Определение перемещений при растяжении-сжатии** – Рассмотрим стержень, нагруженный растягивающей силой  $F$ . Выделим на расстоянии  $z$  участок длиной  $dz$ . Удлинение этого участка  $\Delta dz$  равно перемещению второй его границы относительно первой  $dw$ .



Деформация на этом участке определяется выражением, представляющим собой дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{w(z) + dw - w(z)}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

Разделим переменные и сведем решение этого уравнения к интегрированию левой и правой частей:

$$dw = \varepsilon_z dz \quad \Rightarrow \quad \int_{w_0}^w dw = \int_{z_0}^z \varepsilon_z dz \quad \Rightarrow \quad w|_{w_0}^w = \int_{z_0}^z \varepsilon_z dz$$

Подставим пределы и выражение для деформации, следующего из закона Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} \quad \Rightarrow \quad w - w_0 = \int_{z_0}^z \frac{N}{EA} dz \quad \Rightarrow \quad w = w_0 + \int_{z_0}^z \frac{N}{EA} dz$$

Здесь  $w_0$  – перемещение левой границы рассматриваемого участка на расстоянии  $z_0$ ,  $EA$  – жесткость стержня при растяжении-сжатии,  $N$  – продольное усилие.

В случае постоянства продольного усилия и площади поперечного сечения имеем:

$$w = w_0 + \frac{N}{EA} (z - z_0)$$

Отсюда, как частный случай, получается выражение для абсолютного удлинения стержня ( $w_0 = 0, z_0 = 0, z = l$ ):

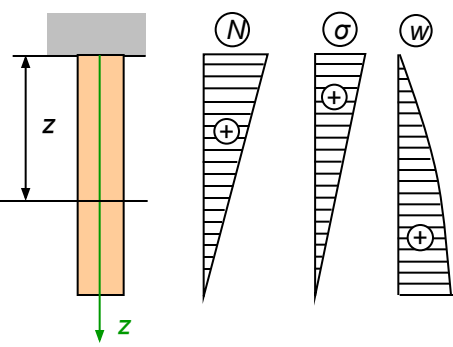
$$w = \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Общая формула вычисления перемещений на рассматриваемом участке  $[z_0, z]$  (второе перемещение всего участка, как жесткого тела). Если площадь сечения постоянна, то определение перемещений из участков от неподвижного сечения до

Таким образом, учет равномерно распределенной продольной нагрузки (собственный вес) может быть выполнен непосредственным интегрированием по рассматриваемому участку или **использованием выражения, подобного абсолютному удлинению стержня при постоянной продольной силе, в котором сила уменьшена вдвое!** (см. результат определения перемещения конца стержня).

- Учет собственного веса** – Рассмотрим стержень, нагруженный собственным весом. Продольное усилие от собственного веса  $N$  и **линейно** зависит от координаты. Эпюры

Например, второй результат (перемещение сечения посередине длины стержня) может быть получен, как **сумма перемещений рассматриваемого сечения стержня от действия собственного веса верхней части, учитываемого как распределенная нагрузка, и перемещения его от веса нижней части, действующего на верхнюю часть как внешняя сила:**



$$w = \frac{\left(\frac{G}{2}\right) \frac{l}{2}}{2EA} + \frac{\left(\frac{G}{2}\right) \frac{l}{2}}{EA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{G}{2EA} l$$

Определим перемещения конца стержня и сечения на расстоянии половины длины:

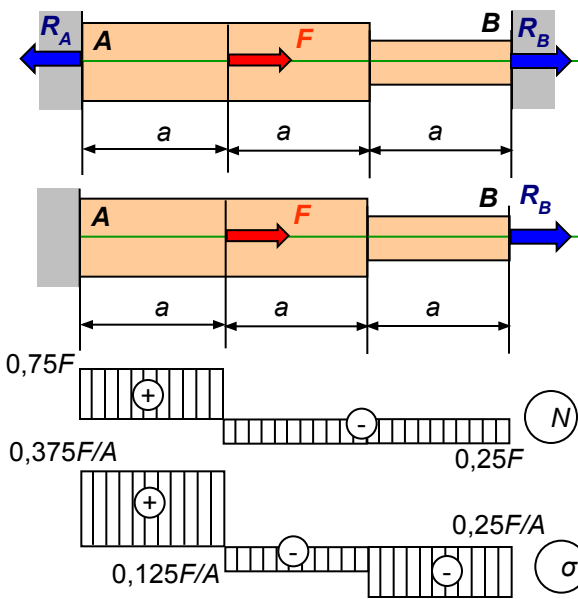
$$w = \frac{\gamma A}{2EA} (2l - z) z \Big|_{z=l} = \frac{\gamma A}{2EA} l^2 = \frac{G}{2EA} l, \quad w = \frac{\gamma A}{2EA} (2l - z) z \Big|_{z=l/2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma A}{2EA} l^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{G}{2EA} l$$

Здесь  $G$  – вес стержня.



# Лекция 5 (продолжение – 5.2)

- Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии – В статически неопределимых системах число наложенных связей больше числа независимых уравнений равновесия. Как указывалось выше, такие задачи решаются последовательным рассмотрением *статической, геометрической и физической* сторон, в результате чего получается полная система уравнений, позволяющая найти искомые усилия. Общий порядок решения определяется вышесказанным, конкретные шаги и особенности рассмотрим на примерах:
- Пример 1.** Стержень переменного сечения ( $2A$  и  $A$ ) жестко заделан с двух сторон и нагружен продольной силой. Построить эпюры  $N$  и  $\sigma$ .



1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:  
 2. **Статика:** Составляем **уравнение равновесия:**  $\sum Z_i = 0; \quad -R_A + F + R_B = 0.$

Это единственное уравнение равновесия, которое можно составить для линейной системы сил. Следовательно система один раз статически неопределима.

3. **Геометрия:**  
 z Составляем **уравнение совместности деформаций:**  $\Delta l = 0; \quad \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$

Это уравнение устанавливает неизменность общей длины стержня при любых воздействиях, которую обеспечивали связи (жесткие заделки) до их удаления.

4. **Физика:** Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями:**  

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA}.$$

Получили полную систему уравнений, решающую данную задачу (5 уравнений и 5 неизвестных – 2 реакции и 3 перемещения). Подставляем соотношения упругости в уравнения совместности:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} = 0. \implies R_A + 3R_B = 0. \implies R_A = -3R_B.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия:  $3R_B + F + R_B = 0 \implies R_B = -\frac{F}{4}; \quad R_A = \frac{3F}{4}.$

После определения опорных реакций можно построить **эпюру продольных сил** вычисление значений по участкам:  
 $N_1 = R_A = 3F/4,$   
 $N_2 = N_3 = R_B = F/4.$   
 В сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, получился скачок, равный величине этой силы.  
**Эпюра нормальных напряжений** также строится вычислением значений напряжений по участкам:  
 $\sigma_1 = N_1 / A_1 = 3F/8A,$   
 $\sigma_2 = N_2 / A_2 = F/8A,$   
 $\sigma_3 = N_3 / A_3 = F/4A.$   
 В сечении резкого изменения площади получился скачок.

...ки определяемой отбрасываем  
 Составляем **уравнение совместности деформаций:**  
 $\Delta l = 0; \quad \Delta l_F + \Delta l_R = 0.$  или  $\Delta l_R = -\Delta l_F.$

Если имелся первоначальный зазор, например между правым концом стержня и заделкой, или напротив натяг (первоначальный размер стержня превышает расстояние между опорами), то это учитывается лишь в **уравнениях совместности деформаций:**  
 $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \Delta.$  ( $\Delta > 0$  зазор,  $\Delta < 0$  натяг)  
 Если вместо силового нагружения, или дополнительно к нему, действует температурная нагрузка (**нагрев**), то это учитывается **введением температурных удлинений в уравнения совместности деформаций.**

# Лекция 5 (продолжение – 5.3)

- Расчет статически неопределимых систем на действие температуры** – В статически неопределимых системах нагрев (охлаждение) элементов вызывает дополнительные внутренние усилия (напряжения), которые могут значительно превышать усилия от действия силового нагружения. Общий порядок решения задачи сохраняется, но уравнения совместности деформаций (удлинений) содержат удлинения от действия разности температур  $\Delta t$ :  $\Delta l_i = \alpha l \cdot \Delta t$   $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала,  $l$  – длина стержня.
- Пример 2.** Стержень переменного сечения (2A и A), рассмотренный в примере 1, дополнительно нагревается на  $\Delta t$  градусов.

- Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:
- Статика:** Составляем **уравнение равновесия:**  $\sum Z_i = 0; \quad -R_A + F + R_B = 0.$
- Геометрия:** Составляем **уравнение совместности деформаций:**  $\Delta l = 0; \quad \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_t = 0.$

Это уравнение устанавливает неизменность общей длины стержня при любых воздействиях, в том числе от нагрева, которую обеспечивали связи (жесткие заделки) до их удаления.

- Физика:** Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями и температурным воздействием:**

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA}; \quad \Delta l_t = \alpha 3a \cdot \Delta t.$$

Подставляем соотношения упругости и температурного удлинения в уравнения совместности:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} + \alpha 3a \Delta t = 0. \quad \Rightarrow \quad R_A + 3R_B = -6\alpha \Delta t EA. \quad \Rightarrow \quad R_A = -3R_B - 6\alpha \Delta t EA.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия:

$$3R_B + 6\alpha \Delta t EA + F + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = -\frac{F + 6\alpha \Delta t EA}{4};$$

$$R_A = 3 \frac{F + 6\alpha \Delta t EA}{4} - 6\alpha \Delta t EA = 3 \frac{F - 2\alpha \Delta t EA}{4}.$$

Теперь, при температурном воздействии, в выражения для реакций входят абсолютные значения модуля упругости  $E$  и площади  $A$ . Вычислим величины реакций для конкретных данных:  $F = 10$  кН,  $A = 1$  см<sup>2</sup>,  $\Delta t = 10^\circ$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\alpha = 10^{-5}$  (сталь):

$$R_B = -\frac{10 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4} = -5.5 \cdot 10^3 = -5.5 \text{ кН};$$

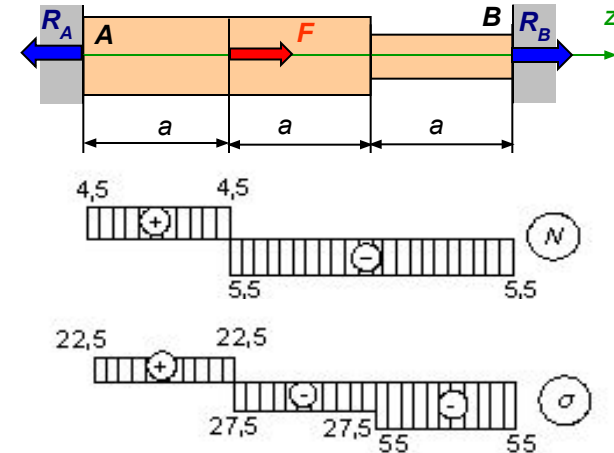
$$R_A = 3 \frac{10 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4} = 4.5 \cdot 10^3 = 4.5 \text{ кН}.$$

При отсутствии нагрева реакции получаются равными -2.5 кН и 7.5 кН соответственно.

**Эпюру продольных сил** строим вычислением значений по участкам:

$N_1 = R_A = 4.5$  кН,  $N_2 = N_3 = R_B = -5.5$  кН. В сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, получился скачок, равный величине этой силы.

**Эпюра нормальных напряжений** также строится вычислением значений напряжений по участкам:  $\sigma_1 = N_1 / A_1 = 22.5$  МПа,  $\sigma_2 = N_2 / A_2 = -27.5$  МПа,  $\sigma_3 = N_3 / A_3 = -55$  МПа.



При отсутствии нагрева значения напряжений получаются равными 37.5 МПа, -12.5 МПа, и -25 МПа соответственно (вид эпюры напряжений см. в примере 1).

Таким образом, нагрев всего на  $10^\circ$  привел к увеличению сжимающей силы и максимальных сжимающих напряжений больше, чем в 2 раза.

**Статически неопределимые системы всегда реагируют на изменение температуры изменением внутренних усилий.**

Это же происходит при взаимных смещениях опор (неравномерная осадка опор).

# Лекция 5 (продолжение – 5.4)

**Расчет статически неопределимых систем на неточность сборки** – В статически неопределимых системах несоответствие длин изготовленных элементов проектным вызывает дополнительные внутренние усилия, которые могут заметно влиять на результат определения усилий от действия внешних сил. Более того, даже при отсутствии внешних сил, при сборке могут возникать начальные (монтажные) усилия. Общий порядок решения задачи сохраняется, но уравнения совместности деформаций (удлинений) содержат дополнительные удлинения (укорочения) необходимые для осуществления сборки неточно изготовленных элементов.

**Пример 2.** Абсолютно жесткая балка подвешивается на двух медных и одном стальном ( $E_M/E_C=1/2$ ) стержнях одинаковой длины. Стальной стержень при изготовлении был сделан длиннее на величину  $\Delta$ . Определить монтажные усилия после сборки и усилия при нагружении силой  $F$ .

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:

2. **Статика**: Составляем **уравнение равновесия**:  $\sum Z_i = 0$ ;  $2R_M + R_C = 0$ .

Реакции от медных стержней равны из-за симметрии системы.

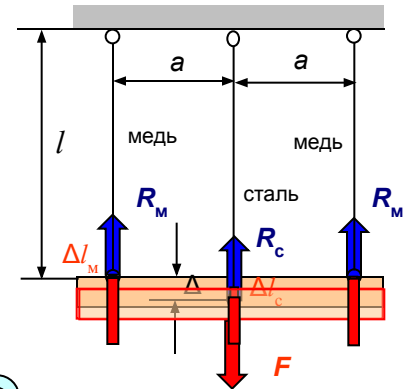
3. **Геометрия**: Задаем промежуточное положение балки и составляем **уравнение совместности деформаций**:

$$\Delta l_M + \Delta l_C = \Delta.$$

4. **Физика**: Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями**:

$$\Delta l_M = \frac{N_M l}{E_M A} = \frac{R_M l}{E_M A}; \quad \Delta l_C = \frac{N_C l}{E_C A} = -\frac{R_C l}{E_C A}.$$

Знак минус присваивается, поскольку стальной стержень должен укоротиться и внутреннее усилие должно быть отрицательным (сжатие).



Подставляем соотношения упругости в уравнения совместности:

$$\frac{R_M l}{E_M A} + \left(-\frac{R_C l}{E_C A}\right) = \Delta. \implies R_M = \left(\Delta + \frac{R_C l}{E_C A}\right) \frac{E_M A}{l} \implies R_M = \Delta \frac{E_M A}{l} + R_C \frac{E_M}{E_C} = \Delta \frac{E_M A}{l} + R_C \frac{1}{2}.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия:

$$2\left(\Delta \frac{E_M A}{l} + R_C \frac{1}{2}\right) + R_C = 0 \implies$$

$$R_C = \frac{-2\Delta \frac{E_M A}{l}}{2} = -\frac{\Delta}{l} A E_M.$$

Из этого же уравнения равновесия следует:

$$R_M = -\frac{R_C}{2} = \frac{\Delta}{2l} A E_M.$$

Подстановка соотношений упругости в уравнения совместности приводит к ранее полученному выражению для  $R_M = R_M(R_C)$ . Подстановка в уравнение равновесия дает:

В выражения для реакций входят абсолютные значения модуля упругости  $E_M$ , длины и площади стержней.

Вычислим величины реакций для конкретных данных:  $l = 2$  м,  $A = 20$  см<sup>2</sup>,  $\Delta = 0.5$  мм,  $E_M = 10^5$  МПа:

$$R_C = -\frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11} = -5 \cdot 10^4 = -50 \text{ кН}; \quad R_M = -\frac{-50}{2} = 25 \text{ кН}.$$

При нагружении балки силой  $F$  посередине балка получает дополнительное перемещение б:

Уравнения равновесия, совместности деформаций и соотношения упругости принимают вид:  $\sum Z_i = 0$ ;  $2R_M + R_C - F = 0$ ;  $\Delta l_M - \Delta l_C = \Delta$ .

$$\Delta l_M = \frac{N_M l}{E_M A} = \frac{R_M l}{E_M A}; \quad \Delta l_C = \frac{N_C l}{E_C A} = \frac{R_C l}{E_C A}.$$

Из выражения  $R_M = R_M(R_C)$ :

$$R_M = \Delta \frac{E_M A}{l} + \left(\frac{F - \Delta \frac{A E_M}{l}}{2} - \Delta \frac{A E_M}{l}\right) \frac{1}{2} = \frac{F}{4} + \Delta \frac{A E_M}{2l}.$$

После подстановки значений силы  $F = 500$  кН получаем  $R_C = 200$  кН и  $R_M = 150$  кН.

# Лекция 5 (продолжение 5.5 – дополнительный материал)

**Пример 3.** В предыдущем примере рассматриваемая система была симметричной. Если система несимметричная по геометрии, нагружению, материалам стержней, то перемещение жесткой балки при деформации будет не поступательное, а плоское (с поворотом вокруг некоторого центра). Рассмотрим решение такой задачи, подобной предыдущей, но со следующими данными: Левый медный стержень изготовлен короче остальных на величину  $\Delta$ , сила  $F$  приложена на расстоянии  $c > a$  от левого стержня. Найти усилия в стержнях.

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:

2. Статика: Составляем **уравнение равновесия**:  $\sum Z_i = 0; R_{1M} + R_c + R_{2M} - F = 0.$   
 $\sum M_{Ai} = 0; R_c a + R_{2M} 2a - Fc = 0.$

3. Геометрия: Задаем произвольное наклонное положение балки и составляем **уравнения совместности деформаций**:  
 $\Delta l_{1M} = \Delta + \delta; \Delta l_c = \delta + \varphi \cdot a; \Delta l_{2M} = \delta + \varphi \cdot 2a.$

4. Физика: Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями**:

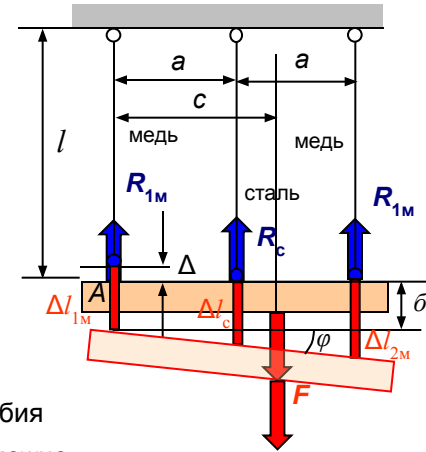
$$\Delta l_{1M} = \frac{N_{1M} l}{E_M A} = \frac{R_{1M} l}{E_M A}; \quad \Delta l_c = \frac{N_c l}{E_c A} = \frac{R_c l}{E_c A}; \quad \Delta l_{2M} = \frac{N_{2M} l}{E_M A} = \frac{R_{2M} l}{E_M A};$$

Получили полную систему уравнений, решающую данную задачу (8 уравнений и 8 неизвестных – 3 реакции и 5 перемещений, два из которых поступательное перемещение балки, угловое перемещение - поворот).

Последние неизвестные можно исключить, составляя одно, но более сложное, уравнение совместности из подобия треугольников в виде:

$$\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)}{\Delta l_{2M} - (\Delta l_{1M} - \Delta)} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку решать вручную 5 уравнений тоже достаточно сложно можно оставить первоначальную систему из 8 уравнений и решить ее численно, например, в системе **MathCAD**, в которой не требуются какие-либо подстановки и преобразования ([посмотреть](#)).



Если направления одного или двух стержней отличны от вертикального, то эта задача становится

статически определимой (для плоской системы уравнений равновесия) и несоответствия начальных (монтажных) усилий (балка

**Удлинения наклонных стержней** определяются отрезками, отсекаемые перпендикулярами, опущенными из **нового положения узла** (конца стержня) на **старое направление стержня**.

**Пример 4.** Пусть к такой системе добавим еще два наклонных стержня. Система становится статически неопределимой, для которой можно составить 3 уравнения равновесия и 4 уравнения совместности деформаций (вместе с 4 соотношениями упругости получается система 11 уравнений):

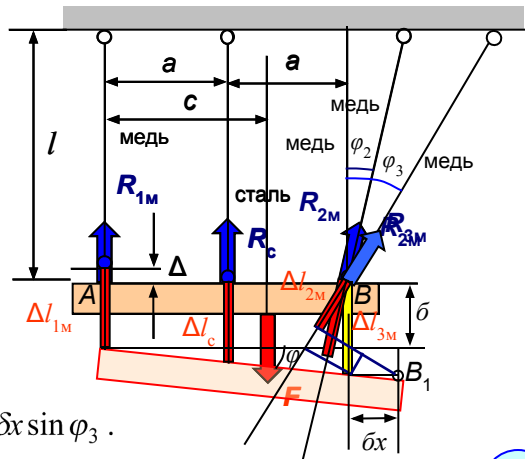
$$\sum X_i = 0; R_{2M} \sin \varphi_2 + R_{3M} \sin \varphi_3 = 0.$$

$$\sum Z_i = 0; R_{1M} + R_c + R_{2M} \cos \varphi_2 + R_{3M} \cos \varphi_3 - F = 0.$$

$$\sum M_{Ai} = 0; R_c a + R_{2M} \cos \varphi_2 2a + R_{3M} \cos \varphi_3 2a - Fc = 0.$$

$$\Delta l_{1M} = \Delta + \delta; \Delta l_c = \delta + \varphi \cdot a; \Delta l_{2M} = (\delta + \varphi \cdot 2a) \cos \varphi_2 - \delta x \sin \varphi_2; \Delta l_{3M} = (\delta + \varphi \cdot 2a) \cos \varphi_3 - \delta x \sin \varphi_3.$$

Теперь в соотношениях упругости длины 2-го и 3-го медных стержней:  $l_2 = l / \cos \varphi_2; l_3 = l / \cos \varphi_3$



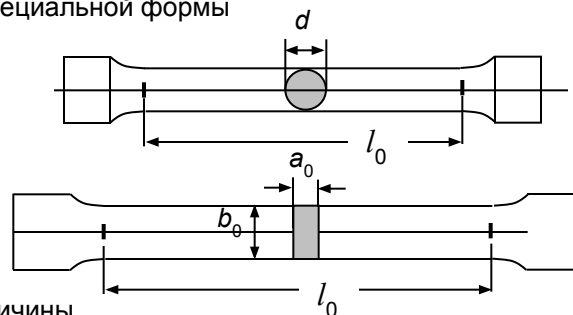
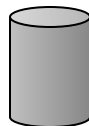
([Посмотреть решение этой задачи в системе MathCAD](#))

# Лекция 6

- **Испытание материалов на растяжение – сжатие** – При проектировании конструкций, машин и механизмов необходимо знать прочностные и деформационные свойства материалов. Их определяют экспериментально на специальных испытательных машинах. Из всех прочих свойств (твёрдость, сопротивляемость ударным нагрузкам, противодействие высоким или низким температурам и т.п.) основными является сопротивление на растяжение и сжатие, дающие наибольшую и важнейшую информацию о механических свойствах металлов.

- **Испытание на растяжение** – проводят на разрывных или универсальных машинах, имеющих специальные захваты для передачи усилия. Используются стандартные образцы специальной формы ( $l_0$  – длина рабочей части,  $l_0/a_0 = 5$  – короткие,  $l_0/a_0 = 10$  – длинные):

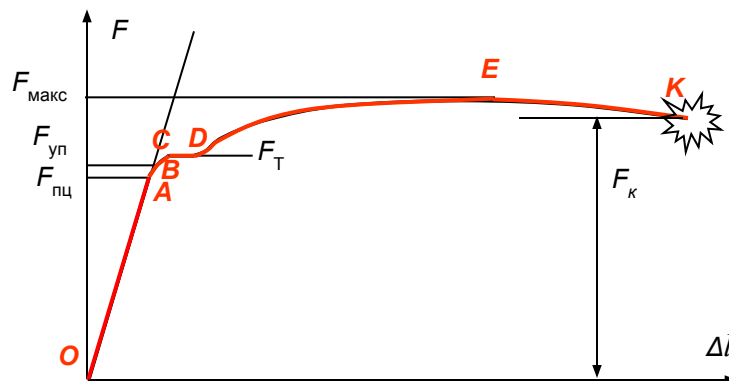
При испытаниях на сжатие применяются цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру  $h/d = 1,5 - 3$ . Образцы устанавливаются на опорную поверхность с использованием смазки для ослабления влияния сил трения.



Все машины снабжены устройством для автоматической записи в определенном масштабе диаграммы-графика зависимости величины растягивающей силы от удлинения образца.

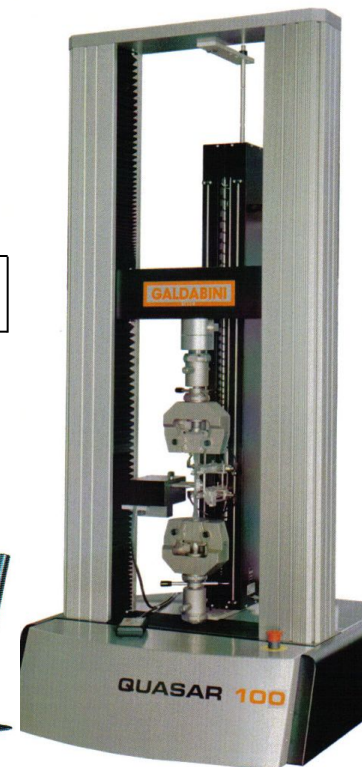
Современные машины компьютеризированы и имеют средства управления процессом нагружения по различным задаваемым программам, вывода данных на экран и сохранения их в файлах для последующей обработки:

- **Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов** – Характерной диаграммой пластичных материалов является диаграмма растяжения *низкоуглеродистой стали* ( $< 0,25\% C$ ):



1. В начальной стадии (OA, до  $F_{пц}$ ) нагрузка и удлинение растут *прямопропорционально* величине нагрузки (на этой стадии справедлив закон Гука).
2. Далее (AB, до  $F_{уп}$ ) деформации начинают расти *быстрее* и не линейно, но остаются *малыми и упругими* (исчезающими после снятия нагрузки).
3. При дальнейшем нагружении (BC, до  $F_T$ ) криволинейная часть переходит в горизонтальную площадку CD, на которой деформации растут без увеличения нагрузки (*текучесть*). Зона BCD – зона *общей* текучести.
4. При дальнейшем нагружении (DE, до  $F_{макс}$ ) изменяется структура металла и материал вновь может воспринимать возрастание нагрузки (*упрочнение*) вплоть до максимальной.
5. Далее (EK, до  $F_k$ ) в наиболее слабом месте возникает и развивается локальное уменьшение поперечного сечения (*шейка*). Зона EK – зона *местной* текучести.

В точке K образец **внезапно разрушается** с резким ударным звуком, но без световых эффектов.



# Лекция 6 (продолжение – 6.2)

**Характеристики прочности и пластичности** – Рассмотренная только что диаграмма растяжения, связывающая нагрузку с удлинением не может непосредственно характеризовать прочность и пластичность материала, поскольку нагрузка зависит от площади поперечного сечения образца, а удлинение – от базовой его длины. Для получения объективных механических характеристик материала, не зависящих от сечения и длины образца, необходимо перейти к напряжениям и относительным удлинениям. Для этого нагрузка делится на начальную или текущую площадь поперечного сечения образца, а по оси абсцисс откладывается соответствующее относительное удлинение для каждой их характерных точек.

В результате получается *диаграмма напряжений*, подобная диаграмме растяжения:

В этой диаграмме характерные точки определяют следующие механические свойства материала:

1. **Предел пропорциональности**  $\sigma_{пц}$  – наибольшее напряжение, до которого существует пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией (для Ст3  $\sigma_{пц} = 195-200$  МПа).

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}$$

2. **Предел упругости**  $\sigma_{уп}$  – наибольшее напряжение, при котором в материале не обнаруживаются признаков пластической (остаточной) деформации (для Ст3  $\sigma_{уп} = 205-210$  МПа).

$$\sigma_{уп} = \frac{F_{уп}}{A_0}$$

3. **Предел текучести**  $\sigma_T$  – наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки (для Ст3  $\sigma_T = 220-250$  МПа).

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}$$

**предела прочности** или **временное сопротивление**  $\sigma_B$  – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению (для Ст3  $\sigma_B = 370-470$  МПа).

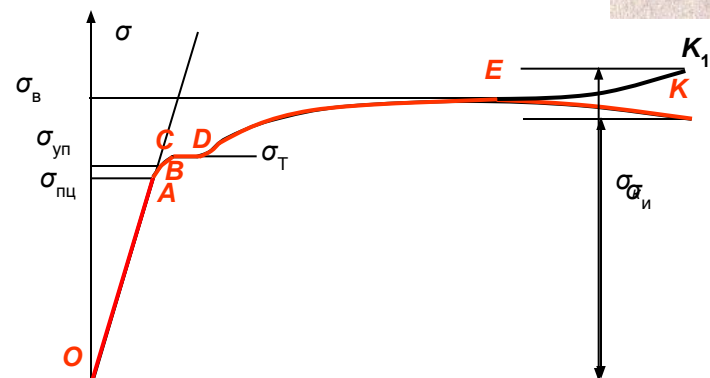
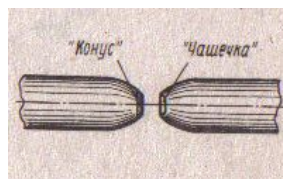
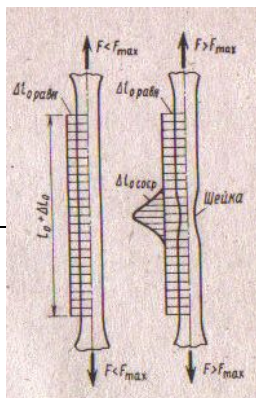
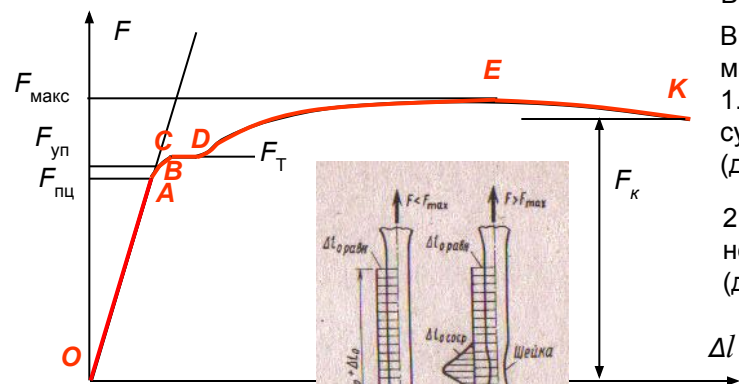
$$\sigma_B = \frac{F_{макс}}{A_0}$$

**предела прочности** или **истинное сопротивление разрыву**  $\sigma_{и1}$ , соответствующее разрушающей силе  $F_{K1}$ , вычисленное для площади поперечного сечения образца в месте разрыва  $A_1$  (для Ст3  $\sigma_{и1} = 900-1000$  МПа). Поскольку на участке *EK* образуется шейка и площадь поперечного сечения быстро уменьшается, напряжение увеличивается ( $EK_1$ ) при регистрируемом падении усилия.

$$\sigma_{и1} = \frac{F_{K1}}{A_1}$$

**Механизм разрушения:** в области шейки образуются мелкие продольные трещины, которые затем сливаются в одну центральную трещину, перпендикулярную оси растяжения, далее трещина распространяется к поверхности шейки, разворачиваясь примерно на  $45^\circ$ , и при выходе на поверхность образует коническую часть излома.

В результате получается поверхность излома в виде “конуса” и “чашечки”. Стадия образования конической поверхности показывает, что материал в вершине трещины начинает разрушаться по механизму скольжения (по площадкам максимальных касательных напряжений), характерному для хрупких материалов.



# Лекция 6 (продолжение – 6.3)

- **Характеристики пластичности** – Пластичность материала является важным механическим свойством материала при его сопротивлении переменным динамическим нагрузкам, а также технологическим свойством при его обработке (штамповка и др.).
- К характеристикам пластичности относятся:

1. **Относительное удлинение после разрыва  $\delta$  (%)** – отношение

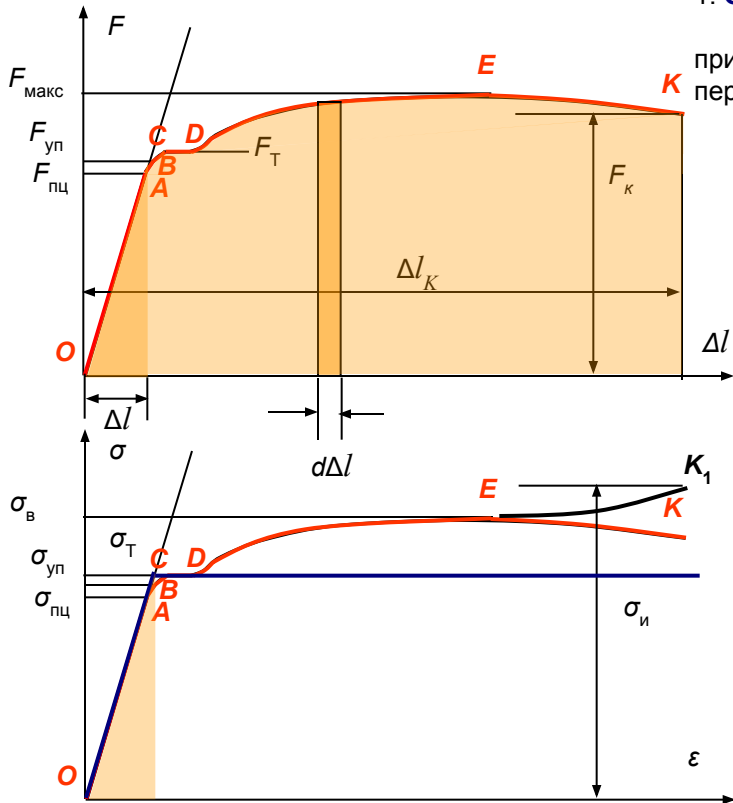
приращения расчетной длины образца после разрыва к ее первоначальному значению (для Ст3  $\delta = 25-27\%$ ).

$$\delta = \frac{\Delta l_K}{l_0} 100\% = \frac{l_K - l_0}{l_0} 100\%.$$

2. **Относительное сужение после разрыва  $\psi$  (%)** – отношение

уменьшения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади поперечного сечения (для Ст3  $\psi = 60-70\%$ ).

$$\psi = \frac{\Delta A_K}{A_0} 100\% = \frac{A_K - A_0}{A_0} 100\%.$$



**Идеализированные диаграммы** – При решении статически неопределимых задач рассматривается физическая сторона задачи, в которой необходимо иметь аналитическую зависимость между напряжениями и деформациями. Такую зависимость,

**Удельная потенциальная энергия** (на ед. объема) характеризует способность поглощения механической энергии при деформации (вязкость) материала ( $V$  – объем стержня):

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N^2 l}{2EA} \cdot \frac{1}{Al} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{\sigma(E\varepsilon)}{E} = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon.$$

Таким образом, удельная потенциальная энергия численно равна площади треугольника на диаграмме напряжений ( в пределах соблюдения закона Гука).

**Потенциальная энергия деформации** – Эта величина характеризует способность материала совершить работу при переходе его из деформированного состояния в исходное. При деформации внешние силы совершают работу  $W$ , которая превращается в потенциальную энергию внутренних упругих сил  $U$  (например, при сжатии пружины). При снятии нагрузки внутренние силы возвращают материал в исходное (недеформированное) состояние (пружина распрямляется).

Таким образом, для упругих материалов процесс полностью обратим:

$$U = W.$$

При *статическом* растяжении образца силой  $F$  элементарная работа на малом перемещении равна:

$$dW = Fd\Delta l.$$

Полная работа равна:

$$W = \int_0^{\Delta l} Fd\Delta l. \quad \text{- площадь, ограниченная кривой растяжения}$$

В пределах соблюдения закона Гука потенциальная энергия деформации равна:

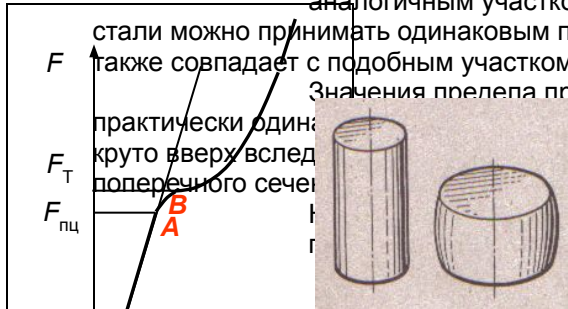
$$U = W = \frac{1}{2} F\Delta l = \frac{1}{2} F \left( \frac{Fl}{EA} \right) = \frac{F^2 l}{2EA}.$$

В случае переменной величины продольной силы и/или площади поперечного сечения по длине стержня:

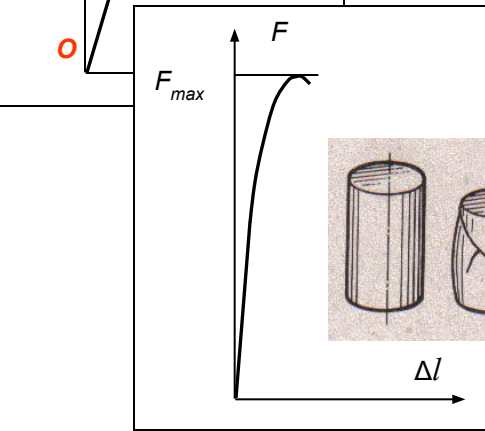
$$dU = \frac{F^2 dz}{2EA} \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}.$$

# Лекция 7

- **Диаграммы сжатия различных материалов** – При сжатии поведение материала образца отличается от его поведения при растяжении.
- **Диаграмма низкоуглеродистой стали** – Начальный участок диаграммы является прямолинейным ( до точки А) и совпадает с аналогичным участком диаграммы растяжения. Это свидетельствует о том, что модуль упругости у стали можно принимать одинаковым при растяжении и сжатии. Нелинейный участок до площадки текучести также совпадает с подобным участком на диаграмме растяжения.



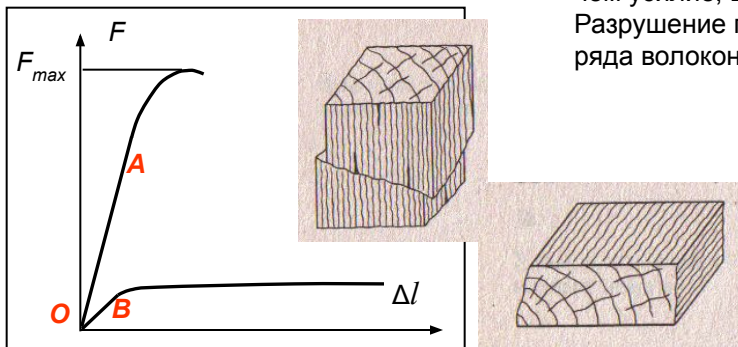
Значения предела пропорциональности и предела текучести при растяжении и сжатии практически одинаковы. При сжатии кривая уходит все более круто вверх вследствие значительных пластических деформаций, приводящих к увеличению площади поперечного сечения образца. В конце концов образец принимает бочкообразную форму.



- **Диаграмма чугуна** – Начальный участок диаграммы имеет почти линейную зависимость, на этом участке форма и размеры образца меняются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке кривая становится более полой и образец принимает слегка бочкообразную форму. При достижении нагрузкой наибольшего значения появляются трещины под углом примерно  $45^\circ$  и наступает разрушение по площадкам с наибольшими касательными напряжениями (хрупкое разрушение).

Другие хрупкие материалы (камень, бетон) имеют подобную диаграмму и такой характер разрушения. Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению, например, предел прочности серого чугуна на сжатие 560-900 МПа, а на растяжение – 120-190 МПа.

- **Диаграмма древесины** – Древесина – анизотропный материал. Сопротивляемость при сжатии зависит от расположения волокон относительно направления сжимающей силы. При сжатии *вдоль волокон* на участке *ОА* древесина работает почти упруго, деформации растут пропорционально увеличению сжимающей силы. Далее деформации начинают расти более быстро, чем усилие, вследствие возникновения пластических деформаций в отдельных волокнах. Разрушение происходит при максимальной нагрузке в результате потери местной устойчивости ряда волокон, сопровождаемой сдвигом с образованием продольных трещин.



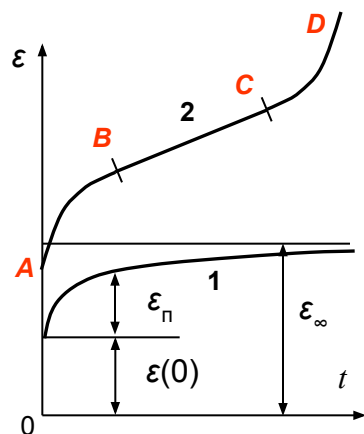
При сжатии *поперек волокон* на участке *ОВ* древесина работает почти упруго, деформации растут пропорционально увеличению сжимающей силы. Далее деформации начинают расти очень быстро при малом увеличении силы, вследствие уплотнения (спрессовывания) отдельных волокон. При наличии сучков и других пороков (трещин) образец может разрушиться раскалыванием. Разрушающая нагрузка определяется условно при достижении деформации сжатия, при которой высота образца уменьшается на треть исходной высоты.



## Лекция 7 (продолжение – 7.2)

**Понятия о ползучести и релаксации** – Многие строительные конструкции при эксплуатации деформируются при длительном действии постоянных нагрузок. Это обуславливается *способностью материалов деформироваться во времени при действии постоянных нагрузок*, называемой **ползучестью**.

Ползучесть присуща таким материалам, как кирпич, древесина, полимеры, камень, резина, грунты и т.п. Металлы также обнаруживают ползучесть при высоких температурах, а цветные металлы – и при обычной (комнатной) температуре. Ползучесть может возникать и при малых нагрузках, которые при кратковременном действии вызывают только упругие деформации.



Результаты испытаний на ползучесть представляются графиками изменения деформаций во времени (*кривые ползучести*). В начальный момент времени деформации имеют ненулевое значение  $\varepsilon(0)$ , равное упругой деформации или сумме упругой и пластической деформаций. Считается, что время предварительной нагрузки (или разгрузки) пренебрежимо мало по сравнению со временем выдерживания нагрузки, поэтому можно принять, что деформации  $\varepsilon(0)$  и напряжения появляются как бы мгновенно.

При определении характера процесса ползучести анализируется **скорость деформации**, вычисляемая как *производная по времени*.

Если скорость деформации монотонно уменьшается со временем, то деформация ползучести стремится к некоторому пределу (кривая 1). Это характерно, например, при деформациях, связанных с уплотнением материала с течением времени под нагрузкой (осадка грунта под фундаментом, бетон).

Ползучесть, представленная кривой 2, характеризуется на первом участке (AB) уменьшением скорости деформации, соответствующей обжатию локальных зон, на втором участке (BC) стабилизацией скорости деформации (установившаяся ползучесть). Для хрупких материалов в точке C испытание заканчивается хрупким разрушением, для пластичных материалов – вязким разрушением с образованием локальных пластических деформаций (третий участок CD, на котором возрастает скорость деформации).

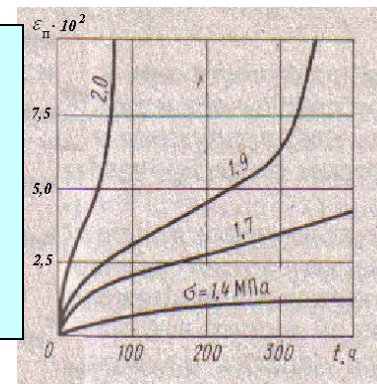
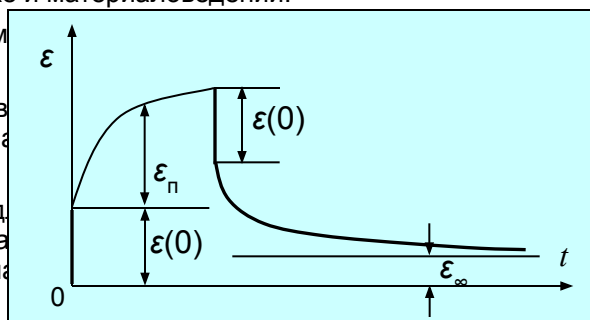
Интересно заметить, что кривой типа 2 описывается процесс накопления повреждений, в том числе износа, в механике разрушения, диагностике и материаловедении.

Характер ползучести зависит от действующих напряжений. Например, может иметь кривые ползучести как типа 1, так и типа 2 [1].

Если деформации ползучести увеличиваются пропорционально увеличению напряжений (при малых напряжениях), то ползучесть – **линейная**, в противном случае – **нелинейная**.

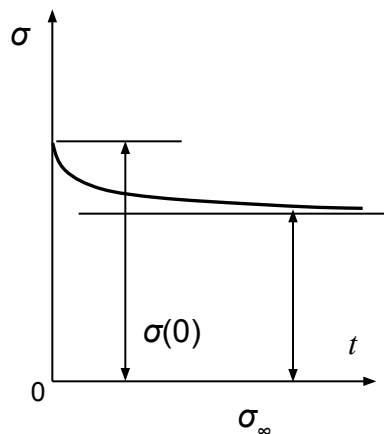
В некоторых материалах (бетон, пластмассы, каучук) происходят деструктивные химические или окислительные процессы, в результате которых материал теряет свои свойства, так называемое “старение”. В таких материалах деформация ползучести увеличивается со временем.

При снятии нагрузки упругая часть деформаций материала исчезает, накопленная деформация ползучести начинает уменьшаться, асимптотически стремясь к некоторому пределу, подобно перевернутой кривой 1. Такое явление носит название **обратной ползучести**. Если при неограниченном увеличении времени образец полностью восстанавливает свои первоначальные размеры, то это явление называется **упругим последствием**.



## Лекция 7 (продолжение – 7.3)

**Релаксация напряжений** – Если образец выдерживается в течении некоторого длительного времени в состоянии, при котором деформация остается постоянной, то напряжения в материале, имевшие в начальный момент значение  $\sigma(0)$ , *снижаются* асимптотически до некоторого значения. *Явление медленного уменьшения напряжений в образце при постоянной деформации* называется **релаксацией**.



Таким образом, явление *релаксации* в некоторой степени обратное *ползучести*, но природа этих двух явлений одна – энергия тепловых упругих колебаний атомов добавляется к энергии, обеспечивающейся внешними силами, вызывающими деформацию.

При свободной деформации под действием приложенных сил происходит дополнительное движение дислокаций (*дислокации* – дефекты кристаллической решетки) и деформация прирастает. Поскольку при обыкновенной температуре эта энергия незначительна, то ползучесть (прирост деформации) происходит в этом случае медленно.

При постоянной деформации поступление дополнительной энергии тепловых колебаний атомов приводит к перераспределению дислокаций с частичным восстановлением регулярности кристаллической решетки. При этом энергия деформации уменьшается, что приводит к уменьшению напряжений, если деформация остается постоянной.



Результат в терминах сопротивления материалов и означает релаксацию. Многие предпочитают другое вместо молока.

# Лекция 8

- Основные сведения о расчете конструкций. Методы допускаемых напряжений и предельных состояний** – Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации. Прочность конструкции, выполненной из *хрупких* материалов, считается обеспеченной, если **во всех поперечных сечениях фактические напряжения меньше предела прочности** материала. Величины нагрузки, напряжения в конструкции и механические характеристики материала не могут быть установлены совершенно точно из-за того, что имеют место такие факторы, как случайный характер нагружения, приближенность расчета, погрешность испытаний, разброс механических свойств реальных материалов и т.д.
- Поэтому необходимо, чтобы *наибольшие* напряжения, полученные в результате расчета (расчетные напряжения) не превышали некоторой величины, меньшей предела прочности. Эта величина называется **допускаемым напряжением** и устанавливается делением предела прочности на коэффициент, больший единицы, называемый **коэффициентом запаса**.

В соответствии с этим **условие прочности**:

$$\sigma_{\text{раст}}^{\text{max}} \leq [\sigma_{\text{раст}}];$$

$$\sigma_{\text{сж}}^{\text{max}} \leq [\sigma_{\text{сж}}],$$

где  $\sigma_{\text{раст}}^{\text{max}}$  – **наибольшие** расчетные растягивающие и сжимающие напряжения в конструкции;

$[\sigma_{\text{раст}}]$  и  $[\sigma_{\text{сж}}]$  – **допускаемые** напряжения при растяжении и сжатии соответственно.

**Допускаемые напряжения** связаны с пределами прочности на растяжение и сжатие отношениями:

$$[\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_{\text{В}}^{\text{раст}}}{n_{\text{В}}}; \quad [\sigma_{\text{сж}}] = \frac{\sigma_{\text{В}}^{\text{сж}}}{n_{\text{В}}},$$

где  $n_{\text{В}}$  – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности, определяемый в зависимости от класса конструкции (капитальная, временная и т.п.), от предполагаемого (задаваемого) срока службы, от характера нагрузки (статическая, динамическая и т.п.), от условий работы конструкции, от качества изготовления материалов и других факторов. Величина  $n_{\text{В}}$  в большинстве случаев принимается в диапазоне от 2,5 до 5.

Для конструкций из *пластических* материалов, имеющих одинаковые пределы прочности на растяжение и сжатие, условие прочности:

$$\sigma^{\text{max}} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma^{\text{max}}$  – наибольшие по абсолютной величине сжимающие или растягивающие напряжения в конструкции.

Допускаемые напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$$

где  $n_{\text{Т}}$  – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести ( $n_{\text{Т}} = 1,5 - 2,5$ ).

Итак, **условие прочности по методу допускаемых напряжений** при растяжении-сжатии стержней имеет вид:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} \leq [\sigma],$$

При подборе сечения принимаемые сечения должны удовлетворять неравенству, вытекающему из условия прочности:

$$A \geq \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]}.$$

При определении грузоподъемности вычисляется

допускаемая продольная сила

в наиболее нагруженном стержне:

$$[N] \geq A[\sigma].$$

По полученной допускаемой силе определяется далее величина допускаемой нагрузки  $[F]$ . Условие прочности принимает вид:

$$F \leq [F].$$

# Лекция 8 (продолжение – 8.2)

**Определение предельных нагрузок в статически неопределимых системах из идеального упруго-пластического материала** – Ранее (лекция 5) был рассмотрен расчет статически неопределимых стержневых систем при их работе в упругой стадии. Целью расчета было определение усилий, возникающих в стержнях, знание которых позволяет подобрать сечения. Поскольку в упругом расчете соотношение жесткостей (и, значит, площадей) задается предварительно, то всегда оказывается, что в некоторых стержнях, или участках стержней переменного сечения, напряжения будут меньше предельных (или допускаемых), чем в стержне (или на участке), в котором напряжения максимальны и которые были использованы при составлении условия прочности и определения требуемой площади поперечного сечения. Все это составляет существо *метода расчета по допускаемым напряжениям*.

Статически неопределимые системы имеют “лишние” связи и выход одной из них из строя при увеличении нагрузки не означает, что система больше не может оставаться в равновесии. Таким образом, **предельным состоянием для статически неопределимых систем не является возникновение напряжений больше расчетных (допускаемых) в самом нагруженном стержне** (или на участке ступенчатого стержня).

**Метод разрушающих нагрузок** – Поскольку при достижении в одном из стержней напряжений больше расчетных (предела текучести) несущая способность статически системы не исчерпывается, то следует принять за **опасное состояние такое, при котором во всех стержнях, обеспечивающих неизменяемость системы** (равновесие при отсутствии каких-либо перемещений) **возникают напряжения, равные пределу текучести**. Для такого состояния **система перестает быть статически неопределимой**, т.к. теперь известны усилия в этих стержнях. Они равны произведению поперечной площади сечения на напряжение, равное пределу текучести. Все это справедливо при использовании идеализированной диаграммы растяжения-сжатия (диаграммы Прандтля), которая не учитывает упрочнение материала после прохождения площадки текучести.

Таким образом, предельная нагрузка может быть определена из условий равновесия. Естественно, что такая нагрузка не может быть допущена во избежание разрушения системы. Поэтому ее величина делится на коэффициент запаса  $n$ , подобно тому, как предельное напряжения при упругом расчете делится на коэффициент запаса  $n$ .

**Условие прочности по методу разрушающих нагрузок** при растяжении-сжатии стержней статически неопределимых систем

Теперь при  $F_{пред} = [F]n$  возникает текучесть еще на третьем участке и система уже не может воспринимать нагрузку (второй участок будет перемещаться вследствие текучести на первом и третьем участках). Грузоподъемность, определенная по методу разрушающих нагрузок, больше, чем определенная по методу допускаемых напряжений, на  $(0,375-0,25)/0,25)100\%=50\%$ , т.е. в 1,5 раза.

**Это последняя лекция данной части. Для продолжения работы вызовите вторую часть.**

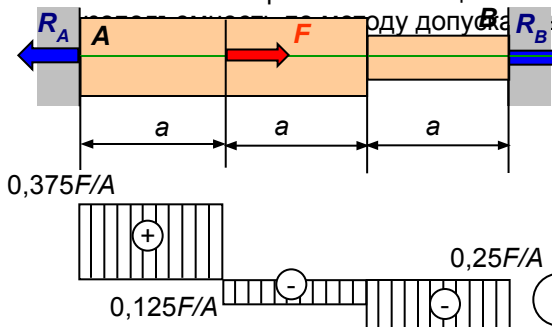
Условие прочности по допускаемым напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{0,375F}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} \implies F \leq \frac{\sigma_T A}{0,375n}$$

Здесь при  $F_{пред} = Fn$  возникает текучесть на первом участке, но система может еще воспринимать нагрузку, т.к. на других участках напряжения меньше  $\sigma_T$ .

Условие прочности по разрушающим нагрузкам:

$$F_{max} \leq [F] = \frac{F_{пред}}{n} \implies \sigma_T = \frac{0,25F_{пред}}{A} \implies F \leq [F] = \frac{\sigma_T A}{0,25n}$$

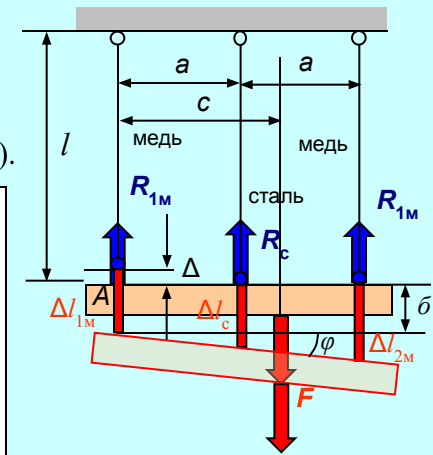


# Примеры документов MathCAD

**Пример 3.** При использовании уравнения совместности в виде  $\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)}{\Delta l_{2M} - (\Delta l_{1M} - \Delta)}$  система уравнений решается, т. к., блок Given.....Find реализует итерационный процесс решения и неизвестные не должны находиться в знаменателе выражений. Проблему решает небольшое преобразование уравнения к виду:  $2(\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)) = \Delta l_{2M} - (\Delta l_{1M} - \Delta)$ .

$$\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)}{\Delta l_{2M} - (\Delta l_{1M} - \Delta)}$$

$$2(\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)) = \Delta l_{2M} - (\Delta l_{1M} - \Delta)$$



При использовании первого варианта составления уравнений совместности никаких преобразований не требуется. Результат получается тот же:

Документ позволяет легко получать решение при любых разумных исходных данных. Например, при отсутствии силы  $F$  (монтажные усилия) или при ее симметричном действии:

Интересно отметить, что в силу симметрии схемы по расположению и материалу стержней монтажные усилия (и деформации стержней) получаются симметричными, однако положение балки после сборки не будет горизонтальным (повернутым на угол  $\phi$  по часовой стрелке) в силу несимметричного расположения начального зазора  $\Delta$ . Такое же будет и при симметричном действии нагрузки ( $c = a$ ).

```

Δ := 5·10-4  F := 500·103  A := 20·10-4  Es := 2·1011  Em := 1011  l := 2  a := 1  c := 1.5·a
Rm1 := 1  Rs := 1  Rm2 := 1  Δl1 := 1  Δl2 := 1
Given  Rm1 + Rm2 + Rs - F = 0  -F·c + Rs·a + Rm2·(2·a) = 0
      2·(Δls - (Δl1 - Δ)) = (Δl2 - (Δl1 - Δ))
      Δl1 =  $\frac{Rm1 \cdot l}{Em \cdot A}$   Δls =  $\frac{Rs \cdot l}{Es \cdot A}$   Δl2 =  $\frac{Rm2 \cdot l}{Em \cdot A}$ 
Find(Rm1, Rs, Rm2, Δl1, Δls, Δl2) =

```

$1.25 \cdot 10^4$
$2.25 \cdot 10^5$
$2.625 \cdot 10^5$
$1.25 \cdot 10^{-4}$
0.001125
0.002625

```

Rm1 := 1  Rs := 1  Rm2 := 1  Δl1 := 1  Δl2 := 1  δ := 1  φ := 1
Given  Rm1 + Rm2 + Rs - F = 0  -F·c + Rs·a + Rm2·(2·a) = 0

```

```

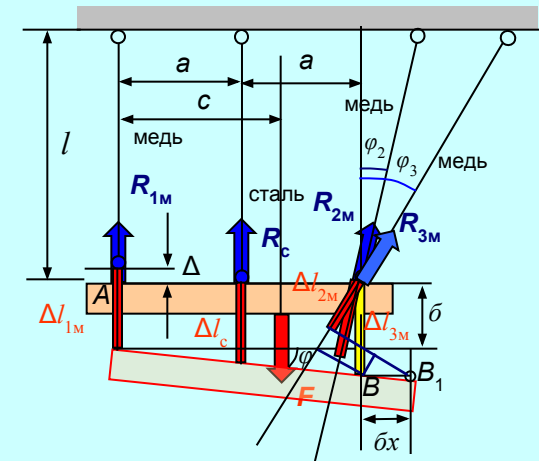
F := 0·103  Rm1 := 1  Rs := 1  Rm2 := 1  Δl1 := 1  Δl2 := 1  δ := 1  φ := 1
Given  Rm1 + Rm2 + Rs - F = 0  -F·c + Rs·a + Rm2·(2·a) = 0
      Δl1 = δ + Δ  Δls = δ + φ·a  Δl2 = δ + φ·2·a
      Δl1 =  $\frac{Rm1 \cdot l}{Em \cdot A}$ 
      Δls =  $\frac{Rs \cdot l}{Es \cdot A}$ 
      Δl2 =  $\frac{Rm2 \cdot l}{Em \cdot A}$ 
Find(Rm1, Rs, Rm2, Δl1, Δls, Δl2, δ, φ) =

```

$1.25 \cdot 10^4$
$-2.5 \cdot 10^4$
$1.25 \cdot 10^4$
$1.25 \cdot 10^{-4}$
$-1.25 \cdot 10^{-4}$
$1.25 \cdot 10^{-4}$
$-3.75 \cdot 10^{-4}$
$2.5 \cdot 10^{-4}$

# Примеры документов MathCAD

- Пример 4.** При использовании уравнения совместности в виде в предложенном виде система уравнений состоит из 11 уравнений. Дополнительными неизвестными являются поступательное перемещение (горизонтальное и вертикальное смещение) балки и ее поворот вокруг полюса А.



Исходные данные: ORIGIN := 1

$\Delta := 5 \cdot 10^{-4}$     $F := 500 \cdot 10^3$     $A := 20 \cdot 10^{-4}$     $E_s := 2 \cdot 10^{11}$     $E_m := 10^{11}$     $l := 2$

$a := 1$     $c := a \cdot 1.5$     $\phi_2 := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$     $\phi_3 := 45 \cdot \frac{\pi}{180}$     $l_2 := \frac{l}{\cos(\phi_2)}$     $l_3 := \frac{l}{\cos(\phi_3)}$

Задание начальных значений:

$\delta := 0$     $\delta x := 0$     $\phi := 0$     $R_{m1} := 1$     $R_s := 1$     $R_{m2} := 1$     $R_{m3} := 1$

$\Delta l_{m1} := 1$     $\Delta l_s := 1$     $\Delta l_{m2} := 1$     $\Delta l_{m3} := 1$

Given      Уравнения равновесия:

$R_{m2} \cdot \sin(\phi_2) + R_{m3} \cdot \sin(\phi_3) = 0$     $R_{m1} + R_s + R_{m2} \cdot \cos(\phi_2) + R_{m3} \cdot \cos(\phi_3) - F = 0$

$R_s \cdot a + R_{m2} \cdot \cos(\phi_2) \cdot 2 \cdot a + R_{m3} \cdot \cos(\phi_3) \cdot 2 \cdot a - F \cdot c = 0$

Уравнения совместности деформаций:

$\Delta l_{m1} = \delta + \Delta$     $\Delta l_{m2} = (\delta + \phi \cdot 2 \cdot a) \cdot \cos(\phi_2) - \delta x \cdot \sin(\phi_2)$

$\Delta l_s = \delta + \phi \cdot a$     $\Delta l_{m3} = (\delta + \phi \cdot 2 \cdot a) \cdot \cos(\phi_3) - \delta x \cdot \sin(\phi_3)$

Соотношения упругости:

$\Delta l_{m1} = \frac{R_{m1} \cdot l}{E_m \cdot A}$     $\Delta l_{m2} = \frac{R_{m2} \cdot l_2}{E_m \cdot A}$

$\Delta l_s = \frac{R_s \cdot l}{E_s \cdot A}$     $\Delta l_{m3} = \frac{R_{m3} \cdot l_3}{E_m \cdot A}$

Find(  $R_{m1}, R_s, R_{m2}, R_{m3}, \Delta l_{m1}, \Delta l_s, \Delta l_{m2}, \Delta l_{m3}, \delta, \delta x, \phi$  ) =

	1
1	-1.879 · 10 <sup>5</sup>
2	6.257 · 10 <sup>5</sup>
3	1.698 · 10 <sup>5</sup>
4	-1.2 · 10 <sup>5</sup>
5	-0.002
6	0.003
7	0.002
8	-0.002
9	-0.002
10	0.011
11	0.006

Документ позволяет легко получать решение при любых разумных исходных данных. Например, при отсутствии силы F (монтажные усилия) или при другом расположении стержней и силы. Достаточно скорректировать исходные данные и уравнения. Дерзай, студент!

При использовании этого варианта составления уравнений совместности никаких дополнительных преобразований не требуется. Конечно при ручном счете можно исключить перемещения балки как жесткого тела, например, составить из подобия треугольников соотношения:

$$\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)}{(\Delta l_{2M} + \delta x \sin \phi_2) - (\Delta l_{1M} - \Delta)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)}{(\Delta l_{3M} + \delta x \sin \phi_3) - (\Delta l_{1M} - \Delta)} = \frac{1}{2}$$

или

$$2(\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)) = (\Delta l_{2M} + \delta x \sin \phi_2) - (\Delta l_{1M} - \Delta),$$

$$2(\Delta l_c - (\Delta l_{1M} - \Delta)) = (\Delta l_{3M} + \delta x \sin \phi_3) - (\Delta l_{1M} - \Delta)$$

и далее исключить  $\delta x$ . Получатся достаточно сложные выражения. А зачем? Для MathCAD не имеет никакого значения число уравнений (11 или 8, или того меньше).