Методика решений заданий и оформление второй части

ГИА 9

Функции и графики

Найти все значения k, при которых прямая y = kx пересекает в одной точке ломаную, заданную условием:

$$y = \begin{cases} -2x, & x < -1; \\ 2, & -1 \le x \le 2; \\ 3x - 4, & x > 2. \end{cases}$$

1) Построим ломаную.

y = - 2x, **y = 2,** **y = 3 x – 4**

X	- 2	0
y	4	0

X	0	2
y	2	2

X	0	2
y	- 4	2

Выделим указанные участки этих прямых.

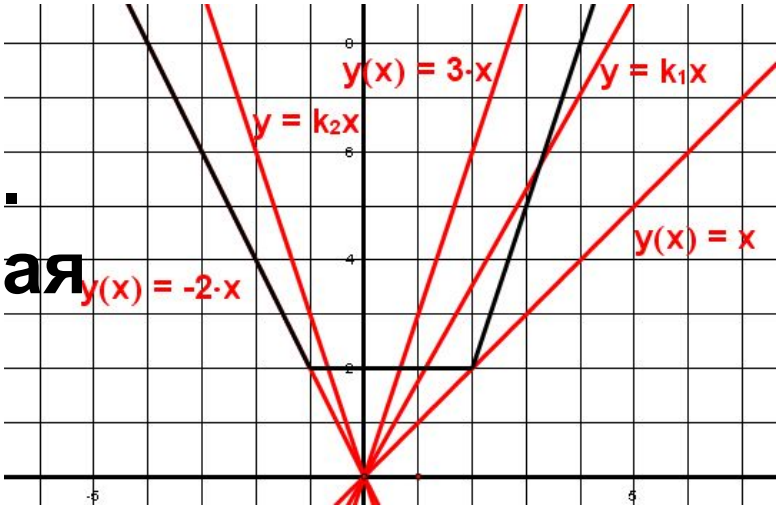
2) Прямая y = kx проходит через начало координат.

Функции и графики

Найти все значения k, при которых прямая y = kx пересекает в одной точке ломаную, заданную условием.

Прямая y = kx проходит через начало координат. Рассмотрим различные случаи расположения этих графиков.

Ж
М



Прямая y = x пересекает ломаную в одной точке (2;2).

При k = - 2 – прямая и ломаная имеют бесконечное множество общих точек.

Если k ≥ 3 и k < - 2, то прямая y = kx пересекает ломаную в одной точке.

Остальные значения k не удовлетворяют условию.

Ответ: $k \in (-\infty;-2) \cup \{1\} \cup [3;+\infty)$ **Или k < -2, k = 1, k ≥ 3.**

Функции и графики

Л.В. Кузнецова и др. № 5.34. При каких значениях p вершины парабол $y = x^2 - 2px - 1$ и $y = -x^2 + 4px + p$ расположены по разные стороны от оси Ox?

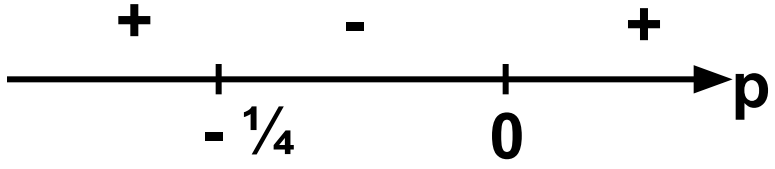
Найдем координаты вершин парабол.

1) $y = x^2 - 2px - 1$: $x_в = p$; $y_в = -1 - p^2$.
2) $y = -x^2 + 4px + p$: $x_в = 2p$; $y_в = 4p^2 + p$.

Т.к. вершины расположены по разные стороны от оси Ox, то ординаты вершин должны иметь разные знаки.

$-p^2 - 1 < 0$, то $4p^2 + p > 0$

$p(4p + 1) > 0$



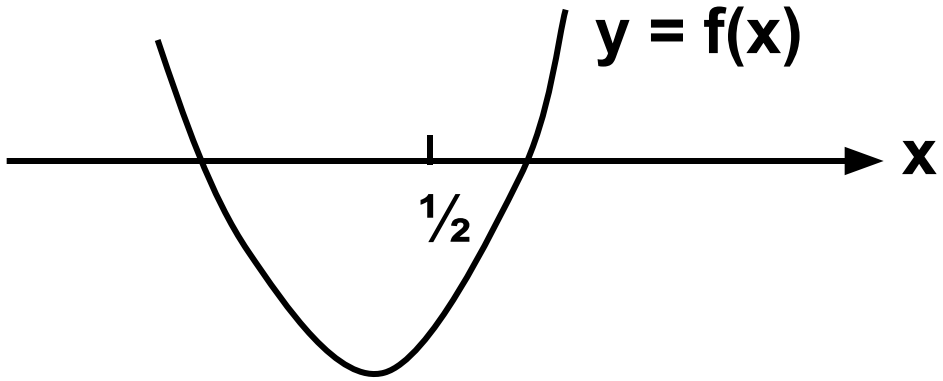
Ответ: $p < -0{,}25$; $p > 0$.

или $p \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; +\infty)$

Функции и графики

Л.В. Кузнецова и др. № 2.59. При каких значениях а один корень квадратного уравнения $x^2 – (a + 1)x + 2a^2 = 0$ больше ½, а другой меньше ½?

Введем функцию $f(x) = x^2 – (a + 1)x + 2a^2$.
Графиком этой функции является парабола ветви которой направлены вверх. Нули функции должны быть расположены по разные стороны от числа ½.



Значит $f(½) < 0$.

$2a^2 - ½ (a + 1) + ¼ < 0$

$2a^2 - ½ a - ¼ < 0$

$8a^2 – 2a – 1 < 0$

Ответ: $- ¼ < a < ½$

Функции и графики

Л.В. Кузнецова и др. № 5.39. При каких значениях p прямая y = 0,5x + p образует с осями координат треугольник площадь которого равна 81?

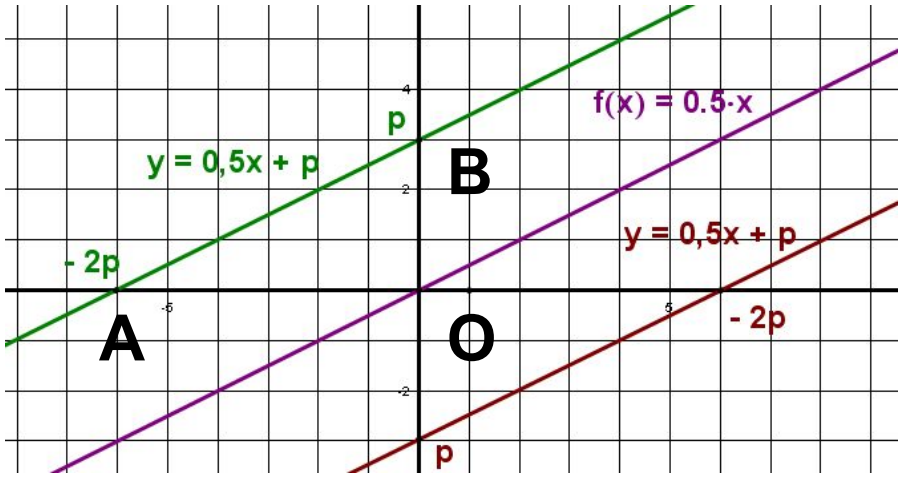
Прямая y = 0,5x + p параллельна прямой y = 0,5x и пересекает оси координат в точках (0; p) и (- 2p; 0)

ΔAOB – прямоугольный.

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}|p| \cdot |-2p|$$

$$S_{\Delta ABO} = |p|^2$$

$$|p|^2 = 81$$



Ответ: p = - 9; p = 9.

Задачи на « концентрацию», « смеси и сплавы».

- масса смеси (сплава);
- концентрация (доля чистого вещества в смеси);
- количество чистого вещества в смеси (сплаве).

Масса смеси х концентрация = количество вещества

Задачи на « концентрацию», « смеси и сплавы».

№ 7.50 1). В лаборатории имеется 2 кг раствора кислоты одной концентрации и 6 кг этой же кислоты другой концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, концентрация которого 36%. Если же смешать равные количества этих растворов, то получится раствор, содержащий 32 % кислоты. Какова концентрация каждого из двух имеющихся растворов?

Решение:

Пусть концентрация первого раствора – x%, а концентрация второго раствора – y%, тогда:

№ раствора	Масса раствора, кг	Концентрация кислоты	Количество кислоты, кг
1	2	0,01x	0,02x
2	6	0,01y	0,06y
3	8	0,36	8*0,36

0,02x + 0,06y = 2,88

Задачи на « концентрацию», « смеси и сплавы».

Примем за 1 одинаковую массу растворов, тогда:

№ раствора	Масса раствора, кг	Концентрация кислоты	Количество кислоты, кг
1	1	0,01x	0,01x
2	1	0,01y	0,01y
3	2	0,32	0,64

0,01x + 0,01y = 0,64

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,02x + 0,06y = 2,88, \\ 0,01x + 0,01y = 0,64. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 40, \\ x = 24. \end{cases}$$

Ответ: Концентрация первого раствора – 24%, концентрация второго раствора – 40%.

Задачи на « концентрацию», « смеси и сплавы».

№ 7.49 1). В свежих яблоках 80% воды, а сушеных – 20%. На сколько процентов уменьшается масса яблок при сушке?

Решение:

Примем за 1 массу свежих яблок и пусть масса яблок при сушке уменьшится на x кг, тогда имеем:

	Масса яблок, кг	Концентрация воды	Количество воды, кг
свежие	1	0,8	0,8
сушеные	1 - x	0,2	0,2(1 – x)

При сушке потеря массы яблок происходит за счет потери массы воды. Имеем уравнение:

$$x = 0{,}8 - 0{,}2(1 - x)$$

$$x = 0{,}6 + 0{,}2x$$

$$0{,}8x = 0{,}6$$

$$x = 0{,}75.$$

Яблоки при сушке теряют 0,75 от своей массы, т. е. 75%.

Ответ: 75%.

Задачи на « концентрацию», « смеси и сплавы».

№ 7.51 1). При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты 1 и 2 растворы?

Решение:

Пусть масса первого раствора – x, а масса второго раствора – y, тогда:

№ раствора	Масса раствора, кг	Концентрация кислоты	Количество кислоты, кг
1	x	0, 2	0,2x
2	y	0, 5	0,5y
3	x + y	0,3	0,3(x + y)

Количество кислоты в смеси складывается из количества кислоты первого и второго растворов, поэтому имеем уравнение:

$0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}3(x + y)$

$2x + 5y = 3x + 3y,$

$2y = x,$

$x : y = 2 : 1$

Ответ: первый и второй растворы взяты в отношении 2 : 1.

Прогрессии

Кузнецова Л.В. № 6.30 (2). Решите уравнение:

$$\frac{x-1}{x^2}+\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-3}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^2}=\frac{7}{15}$$

1. Рассмотрим последовательность (a_n):

$$\frac{x-1}{x^2};\frac{x-2}{x^2};\frac{x-3}{x^2};\ldots\frac{1}{x^2}$$

$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = -1/x^2 = d$

(a_n) – арифметическая прогрессия по определению.

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}-\frac{1}{x^2}(n-1)\\ \frac{7\times 2}{15}=(\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{x^2})n\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=15\\ n=14\end{cases}$$

X = 15.

Ответ: x = 15

Прогрессии

Кузнецова Л.В. № 6.28 (1).

Найти сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий: 3, 8, 13, … и 4, 11, 18,..

$d_1 = 5$ $d_2 = 7$.

Решение 1.Пусть (a_n) –последовательность совпадающих членов арифметических прогрессий, тогда она тоже является арифметической прогрессией с разностью d. НОК (d_1, d_2) = 35 = d. Первый совпадающий член равен 18, n =20, то

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \times n$$

$$S_{20} = \frac{2 \times 18 + 35 \times 19}{2} \times 20 = 7010$$

Решение 2. Рассмотрим прогрессии:

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53,…

4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53… Далее решение №1.

Возможна вычислительная ошибка!

Наименьшее и наибольшее значение

Кузнецова Л.В. № 2.62. Докажите, что уравнение $(x^2+2x+2)(x^2-4x+5)=1$ **не имеет корней.**

1. Рассмотрим функции: а) $y=(x+1)^2+1$ **- которая принимает наименьшее значение равное 1 при x -1**

б) $y=(x-2)^2+1$ **- которая принимает наименьшее значение равное 1 при x = 2**

2. Произведение двух множителей равно 1 тогда и только тогда, когда каждый из них равен 1, либо множители принимают взаимно – обратные значения.

3.Т.к. наименьшее значение равно 1, взаимно – обратными они быть не могут .

4. Каждый из них равен 1 при различных значениях x, т.е. одновременно они не могут быть равны 1.

Ответ: Уравнение не имеет корней.

Наименьшее и наибольшее значение

Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{12}{(x-y+3)^2+|x+y-5|+3}$$

. При каких значениях x и y оно достигается.

<u>Решение.</u> Дробь принимает наибольшее значение, когда знаменатель принимает наименьшее значение.

Наименьшее значение выражения $(x-y+3)^2+|x+y-5|+3$ **равно 3, при** $(x-y+3)^2+|x+y-5|$ **= 0.**

Т.к. $(x-y+3)^2 \geq 0, |x+y-5| \geq 0$**, то выполняется условие:**

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Наибольшее значение выражения равно 4, при x = 1, y = 4.