

*Методика решений заданий
и
оформление второй части*

ГИА 9

Функции и графики

Найти все значения k , при которых прямая $y = kx$ пересекает в одной точке ломаную, заданную условием:

$$y = \begin{cases} -2x, & x < -1; \\ 2, & -1 \leq x \leq 2; \\ 3x - 4, & x > 2. \end{cases}$$

1) Построим ломаную.

$$y = -2x,$$

$$y = 2,$$

$$y = 3x - 4$$

X	-2	0
y	4	0

X	0	2
y	2	2

X	0	2
y	-4	2

Выделим указанные участки этих прямых.

2) Прямая $y = kx$ проходит через начало координат.

Функции и графики

Найти все значения k , при которых прямая $y = kx$ пересекает в одной точке ломаную, заданную условием.

Прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Рассмотрим различные случаи расположения этих графиков.

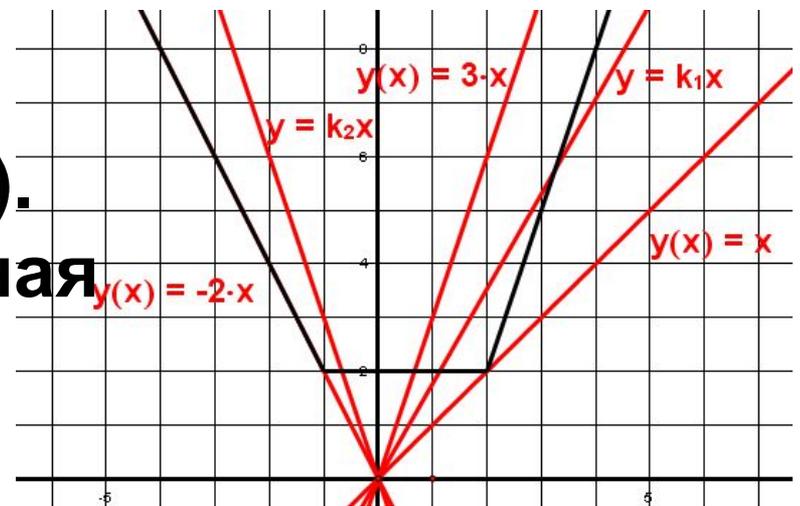
Прямая $y = x$ пересекает ломаную в одной точке (2;2).

При $k = -2$ – прямая и ломаная имеют бесконечное множество общих точек.

Если $k \geq 3$ и $k < -2$, то прямая $y = kx$ пересекает ломаную в одной точке.

Остальные значения k не удовлетворяют условию.

Ответ: $k \in (-\infty; -2) \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$ Или $k < -2$, $k = 1$, $k \geq 3$.



Функции и графики

Л.В. Кузнецова и др. № 5.34. При каких значениях p вершины парабол $y = x^2 - 2px - 1$ и $y = -x^2 + 4px + p$ расположены по разные стороны от оси Ox ?

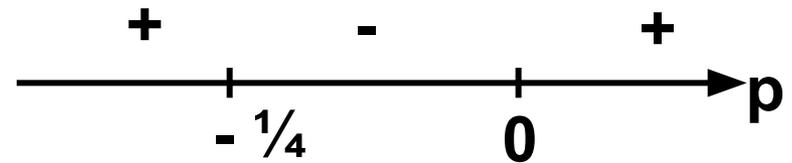
Найдем координаты вершин парабол.

1) $y = x^2 - 2px - 1$: $x_B = p$; $y_B = -1 - p^2$.

2) $y = -x^2 + 4px + p$: $x_B = 2p$; $y_B = 4p^2 + p$.

Т.к. вершины расположены по разные стороны от оси Ox , то ординаты вершин должны иметь разные знаки.

$$\begin{aligned} -p^2 - 1 < 0, \text{ то } 4p^2 + p > 0 \\ p(4p + 1) > 0 \end{aligned}$$



Ответ: $p < -0,25$; $p > 0$.

или $p \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; +\infty)$

Функции и графики

Л.В. Кузнецова и др. № 2.59. При каких значениях a один корень квадратного уравнения $x^2 - (a + 1)x + 2a^2 = 0$ больше $\frac{1}{2}$, а другой меньше $\frac{1}{2}$?

Введем функцию $f(x) = x^2 - (a + 1)x + 2a^2$.

Графиком этой функции является парабола ветви которой направлены вверх. Нули функции должны быть расположены по разные стороны от числа $\frac{1}{2}$.

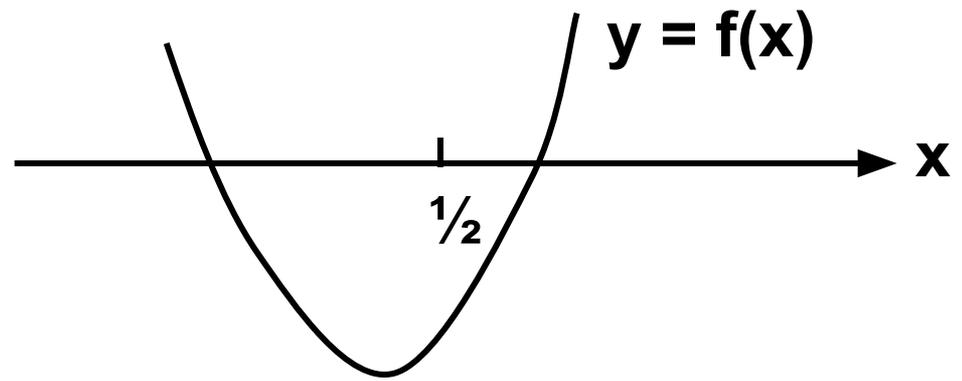
Значит $f(\frac{1}{2}) < 0$.

$$2a^2 - \frac{1}{2}(a + 1) + \frac{1}{4} < 0$$

$$2a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} < 0$$

$$8a^2 - 2a - 1 < 0$$

Ответ: $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$



Функции и графики

Л.В. Кузнецова и др. № 5.39. При каких значениях p прямая $y = 0,5x + p$ образует с осями координат треугольник площадь которого равна 81?

Прямая $y = 0,5x + p$ параллельна прямой $y = 0,5x$ и пересекает оси координат в точках $(0; p)$ и $(-2p; 0)$

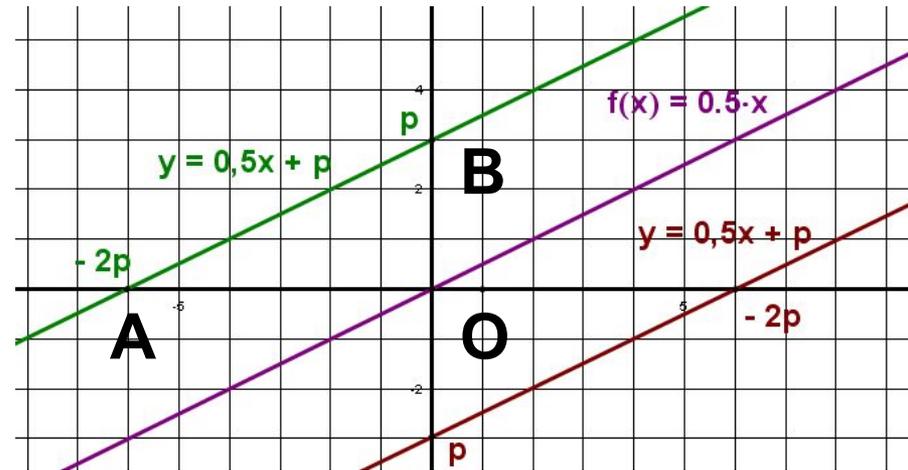
$\triangle AOB$ – прямоугольный.

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} |p| \cdot |-2p|$$

$$S_{\triangle ABO} = |p|^2$$

$$|p|^2 = 81$$

Ответ: $p = -9$; $p = 9$.



Задачи на «концентрацию», «смеси и сплавы».

- масса смеси (сплава);
- концентрация (доля чистого вещества в смеси);
- количество чистого вещества в смеси (сплаве).

Масса смеси \times концентрация = количество вещества

Задачи на «концентрацию», «смеси и сплавы».

№ 7.50 1). В лаборатории имеется 2 кг раствора кислоты одной концентрации и 6 кг этой же кислоты другой концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, концентрация которого 36%. Если же смешать равные количества этих растворов, то получится раствор, содержащий 32 % кислоты. Какова концентрация каждого из двух имеющихся растворов?

Решение:

Пусть концентрация первого раствора – $x\%$, а концентрация второго раствора – $y\%$, тогда:

№ раствора	Масса раствора, кг	Концентрация кислоты	Количество кислоты, кг
1	2	$0,01x$	$0,02x$
2	6	$0,01y$	$0,06y$
3	8	0,36	$8*0,36$

$$0,02x + 0,06y = 2,88$$

Задачи на «концентрацию», «смеси и сплавы».

Примем за 1 одинаковую массу растворов, тогда:

№ раствора	Масса раствора, кг	Концентрация кислоты	Количество кислоты, кг
1	1	0,01x	0,01x
2	1	0,01y	0,01y
3	2	0,32	0,64

$$0,01x + 0,01y = 0,64$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,02x + 0,06y = 2,88, \\ 0,01x + 0,01y = 0,64. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 40, \\ x = 24. \end{cases}$$

Ответ: Концентрация первого раствора – 24%,
концентрация второго раствора – 40%.

Задачи на «концентрацию», «смеси и сплавы».

№ 7.49 1). В свежих яблоках 80% воды, а сушеных – 20%. На сколько процентов уменьшается масса яблок при сушке?

Решение:

Примем за 1 массу свежих яблок и пусть масса яблок при сушке уменьшится на x кг, тогда имеем:

	Масса яблока, кг	Концентрация воды	Количество воды, кг
свежие	1	0,8	0,8
сушеные	$1 - x$	0,2	$0,2(1 - x)$

При сушке потеря массы яблок происходит за счет потери массы воды. Имеем уравнение:

$$x = 0,8 - 0,2(1 - x)$$

$$x = 0,6 + 0,2x$$

$$0,8x = 0,6$$

$$x = 0,75.$$

Яблоки при сушке теряют 0,75 от своей массы, т. е. 75%.

Ответ: 75%.

Задачи на «концентрацию», «смеси и сплавы».

№ 7.51 1). При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты 1 и 2 раствора?

Решение:

Пусть масса первого раствора – x , а масса второго раствора – y , тогда:

№ раствора	Масса раствора, кг	Концентрация кислоты	Количество кислоты, кг
1	x	0, 2	$0,2x$
2	y	0, 5	$0,5y$
3	$x + y$	0,3	$0,3(x + y)$

Количество кислоты в смеси складывается из количества кислоты первого и второго растворов, поэтому имеем уравнение:

$$0,2x + 0,5y = 0,3(x + y)$$

$$x : y = 2 : 1$$

$$2x + 5y = 3x + 3y,$$

$$2y = x,$$

Ответ: первый и второй растворы взяты в отношении 2 : 1.

Прогрессии

Кузнецова Л.В. № 6.30 (2). Решите

уравнение:
$$\frac{x-1}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-3}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{15}$$

1. Рассмотрим последовательность (a_n) :

$$\frac{x-1}{x^2}; \frac{x-2}{x^2}; \frac{x-3}{x^2}; \dots; \frac{1}{x^2}$$

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = -1/x^2 = d$$

(a_n) – арифметическая прогрессия по определению.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{x^2} (n-1) \\ \frac{7 \times 2}{15} = \left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ n = 14 \end{cases}$$

X =
15.

Ответ: x =
15

Прогрессии

Кузнецова Л.В. № 6.28 (1).

Найти сумму первых 20 совпадающих членов двух арифметических прогрессий: 3, 8, 13, ... и 4, 11, 18, ...
 $d_1 = 5$ $d_2 = 7$.

Решение 1. Пусть (a_n) – последовательность совпадающих членов арифметических прогрессий, тогда она тоже является арифметической прогрессией с разностью d . НОК $(d_1, d_2) = 35 = d$. Первый совпадающий член равен 18, $n = 20$, то

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \times n$$

$$S_{20} = \frac{2 \times 18 + 35 \times 19}{2} \times 20 = 7010$$

Решение 2. Рассмотрим прогрессии:

3, 8, 13, **18**, 23, 28, 33, 38, 43, 48, **53**, ...

4, 11, **18**, 25, 32, 39, 46, **53**... Далее решение №1.

Возможна вычислительная ошибка!

Наименьшее и наибольшее значение

Кузнецова Л.В. № 2.62. Докажите, что уравнение $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 1$ не имеет корней.

1. Рассмотрим функции: а) $y = (x + 1)^2 + 1$ - которая принимает наименьшее значение равно 1 при $x = -1$

б) $y = (x - 2)^2 + 1$ - которая принимает наименьшее значение равно 1 при $x = 2$

2. Произведение двух множителей равно 1 тогда и только тогда, когда каждый из них равен 1, либо множители принимают взаимно – обратные значения.

3. Т.к. наименьшее значение равно 1, взаимно – обратными они быть не могут .

4. Каждый из них равен 1 при различных значениях x , т.е. одновременно они не могут быть равны 1.

Ответ: Уравнение не имеет корней.

Наименьшее и наибольшее значение

Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{12}{(x-y+3)^2 + |x+y-5| + 3} . \text{ При каких значениях } x \text{ и } y \text{ оно достигается.}$$

Решение. Дробь принимает наибольшее значение, когда знаменатель принимает наименьшее значение.

Наименьшее значение выражения $(x-y+3)^2 + |x+y-5| + 3$ равно 3, при $(x-y+3)^2 + |x+y-5| = 0$.

Т.к. $(x-y+3)^2 \geq 0, |x+y-5| \geq 0$, то выполняется условие:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Наибольшее значение выражения равно 4, при $x = 1, y = 4$.