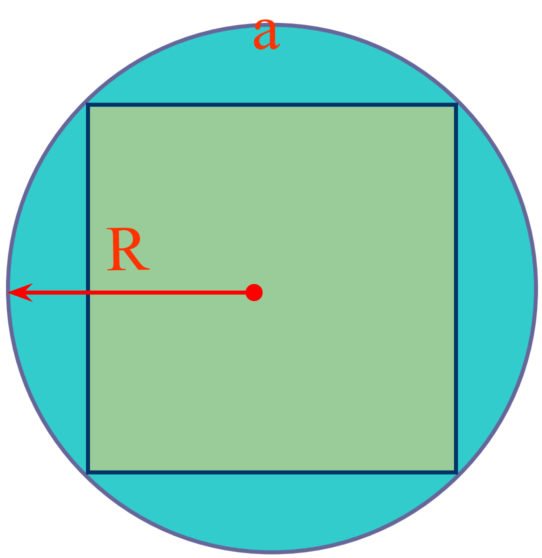
Геометрические вероятности

- Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством
- P= Длина l / Длина L

- Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру gпропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством
- P= Площадь g/ Площадь G

Внутри круга радиусом $\mathcal{R}$ наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата:

Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.



$$p = \frac{\text{Площадь квадрата}}{\text{Площадь окружности}}$$

$$p = \frac{a^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{2R^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{2}{\pi} = 0{,}64$$

№1

На отрезке АО длины L числовой оси Ох наудачу поставлены две точки: В(х) и С(у). Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

Решение:

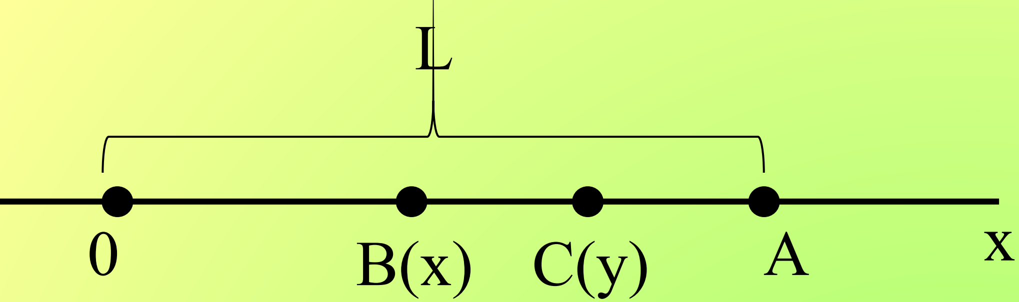
Для того чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый из отрезков должен быть меньше суммы двух других.

Сумма всех трех отрезков равна L, поэтому каждый из отрезков должен быть меньше L/2.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат хОу. Координаты любых двух точек В и С должны удовлетворять двойным неравенствам:

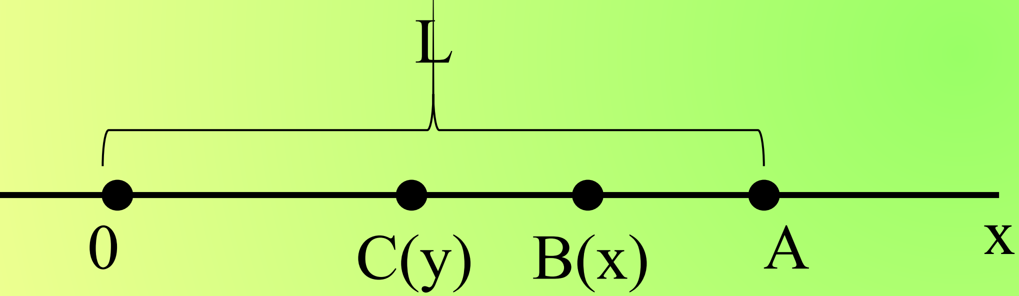
$$0 \leqslant x \leqslant L,$$
$$0 \leqslant y \leqslant L.$$

Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки М(х ; у), принадлежащей квадрату OLDL. Таким образом этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения координат точек В и С.



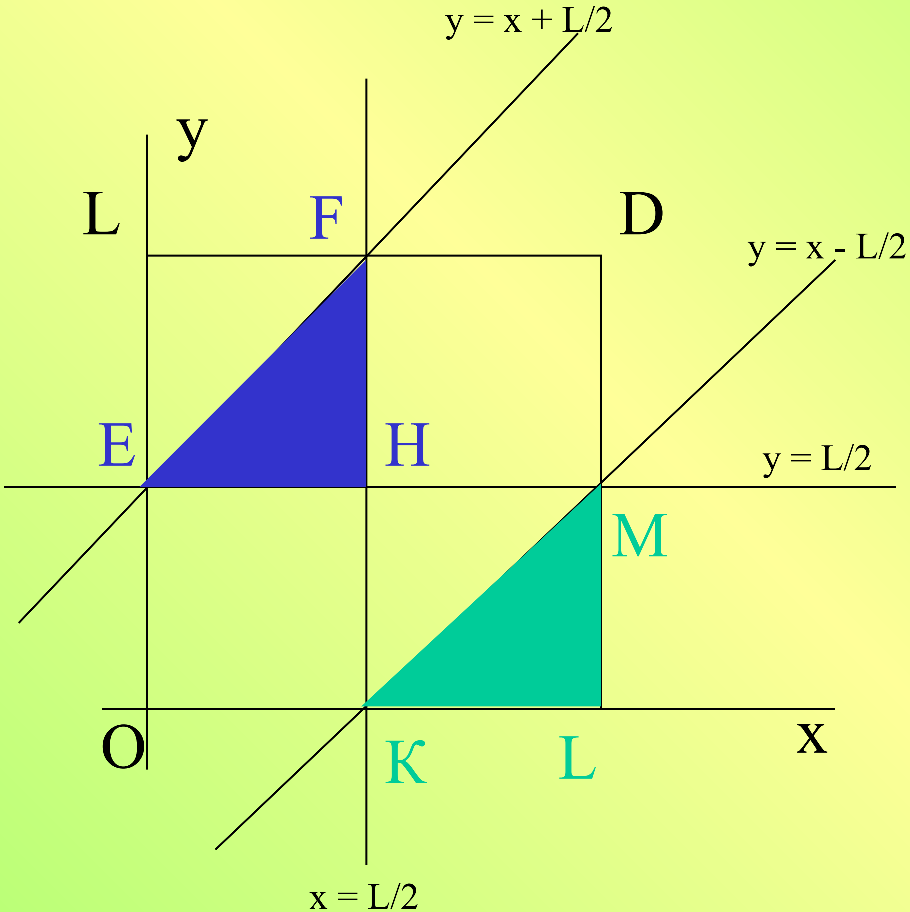
1. Пусть точка C расположена правее точки B.
Как указано выше должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} OB < L/2, \\ BC < L/2, \\ CA < L/2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < L/2, \\ y - x < L/2, \\ L - y < L/2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < L/2, \\ y < x + L/2, \\ y > L/2. \end{cases}$$



2. Пусть точка C расположена левее точки B.
Тогда должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} OC < L/2, \\ BC < L/2, \\ BA < L/2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < L/2, \\ x - y < L/2, \\ L - x < L/2. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < L/2, \\ y > x - L/2, \\ x > L/2. \end{cases}$$



1. $\begin{cases} x < L/2, \\ y < x + L/2, \\ y > L/2. \end{cases}$

Эти неравенства выполняются для координат точек треугольника EFH.

2. $\begin{cases} y < L/2, \\ y > x - L/2, \\ x > L/2. \end{cases}$

Эти неравенства выполняются для координат точек треугольника KLM..

Таким образом заштрихованные треугольники можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой благоприятствуют интересующему нас события (из трех отрезков можно построить треугольник). Искомая вероятность:

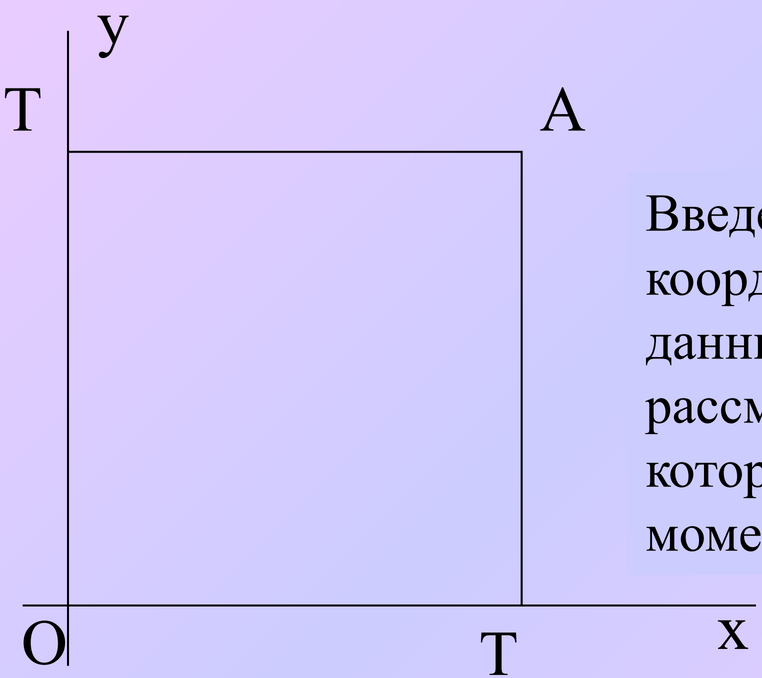
$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{S_{\triangle EFH} + S_{\triangle KHM}}{S_{OLDL}} = \frac{1}{4}$$

Ответ:1/4

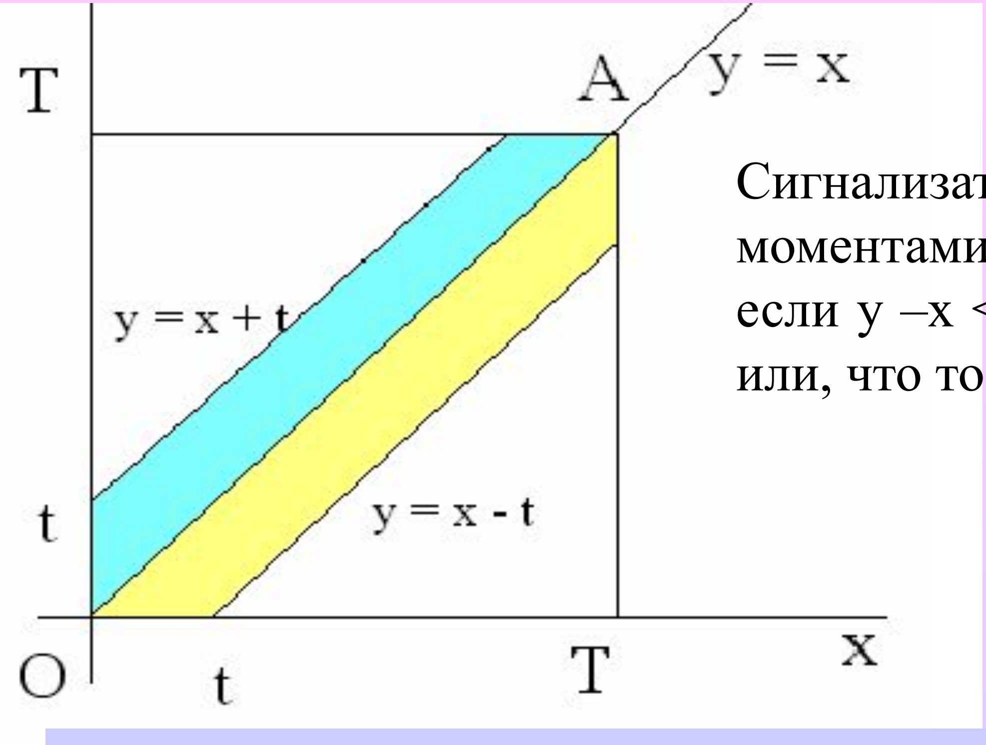
№2 В сигнализатор поступают сигналы то двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найдите вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному из сигналов.

Решение: Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств через x и y соответственно. В силу условия задачи:

$$0 \leqslant x \leqslant T,$$
$$0 \leqslant y \leqslant T.$$



Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. Точки квадрата OTAT удовлетворяют данным неравенствам. Этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения моментов поступления сигналов.



Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т.е., если $y - x < t$ при $y > x$ и $x - y < t$ при $x > y$, или, что то же,

$$y < x + t \text{ при } y > x,$$
$$y > x - t \text{ при } y < x.$$

Как видно из рисунка, все точки, координаты которых удовлетворяют этим неравенствам принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими срабатыванию сигнализатора моментами времени x и y.

Искомая вероятность:

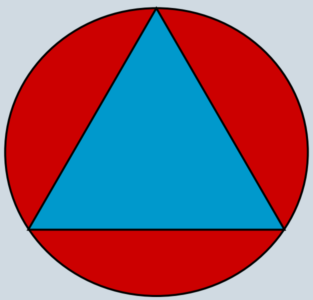
$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{T^2 - 2(T - t)^2/2}{T^2} = \frac{T(2T - t)}{T^2}$$

№3

В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наугад брошены четыре точки. Найти вероятности следующих событий:

а) все четыре точки попадут внутрь треугольника;

б) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый «малый сегмент».



Решение:

а) Найдем вероятность попадания всех точек в треугольник.

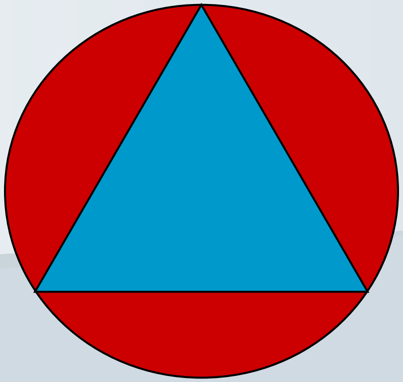
$$R=\frac{a}{\sqrt{3}} \qquad S_{круга}=\pi R^2$$

$$S_{треугольника}=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Вероятность попадания одной точки в треугольник равна:

$$P=\frac{S_{треугольника}}{S_{круга}}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

Вероятность попадания четырех точек в треугольник равна: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$



б) Найдем вероятность, что одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый «малый сегмент».

Вероятность попадания одной точки в треугольник равна: $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

$$S_{сегмента} = (S_{круга} - S_{треугольника}):3 = \left(\pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right)/3 = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$$

Вероятность попадания одной точки в сегмент равна:

$$P = \frac{S_{одного\ сегмента}}{S_{круга}} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12\pi R^2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}$$

Вероятность попадания по одной точке на каждый сегмент равна: $\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$

Искомая вероятность $P = n!\,\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$