

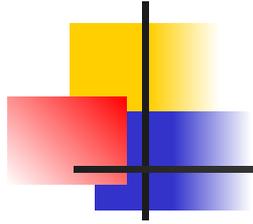
Целочисленные

задачи

Выполнили:

Красилич Надежда

Ведерникова Анастасия



Методы

решения

- Нелинейные уравнения



1) Разложение на множители

- Решить уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$ в целых числах.



Решение:

- Приведем данное уравнение к виду $X(2x^2+y)=7$.

Так как $7=1*7=7*1=-1*(-7)=-7*(-1)$, то рассмотрим четыре системы

$$1) x=1$$

$$2x^2+y=7$$

$$3) x=-1$$

$$2x^2+y=-7$$

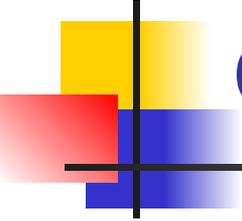
$$2) x=7$$

$$2x^2+y=1$$

$$3) x=-7$$

$$2x^2+y=-1$$

Ответ: $(1;5), (-1;-9), (7;-97), (-7;-99)$



2) Применение формул сокращенного умножения

- Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55



Решение:

- Запишем условие задачи в виде уравнения $x^2 - y^2 = 55$ или $(x-y)(x+y) = 55$
- Поскольку $x-y < x+y$ и $55 = 1 * 55 = 5 * 11$, то возможны 2 случая

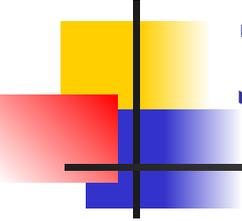
$$x-y=1$$

$$x+y=55$$

$$x-y=5$$

$$x+y=11$$

Ответ: $(28; 27), (8; 3)$



3) Способ группировки

- Решите уравнение $xу+3x-y=6$ в целых числах



Решение:

- Запишем уравнение в виде
- $X(y+3)-(y+3)=3$ или $(x-1)(x+3)=3$
- Рассмотрим 4 системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=1 \\ x+3=3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=-1 \\ x+3=-3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=3 \\ x+3=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=-3 \\ x+3=-1 \end{array} \right.$$

Ответ: $(4;-2), (-2;-4), (2;0), (0;-6)$

4) Разложение квадратного трехчлена

- Решите уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 11$ в
целых числах



Решение:

- Решим уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ относительно неизвестной x :

$$x_1 = y \text{ и } x_2 = 2y$$

$$\text{Тогда получаем } (x-y)(x-2y) = 11$$

Рассмотрим 4 системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=11 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-1 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-11 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

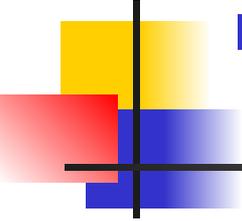
$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=11 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-11 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-1 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

Ответ: $(21; 10)$, $(-9; -10)$, $(-21; -10)$, $(9; 10)$



- **Метод решения
относительно одной
переменной**



1) Выделение целой части

- Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению
- $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$



Решение:

- Выразим из данного уравнения y через x :

$$y = -(14x + 71) / (3x + 17)$$

$$\text{ОДЗ: } 3x + 17 \neq 0$$

Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя)

- $y = -(4(3x+17)+2x+3)/(3x+17)$

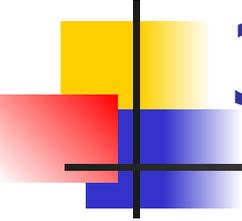
- $y = -4 - (2x+3)/(3x+17)$

- Умножим обе части последнего равенства на 3:

$$3y = -12 - (6x+9)/(3x+17) = -12 - 2 + 25/(3x+17)$$

Поскольку числа $3y$ и 14 -целые, то $3x+17$ должно быть делителем числа $25: 1, -1, 5, -5, 25, -25$

Ответ: $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$

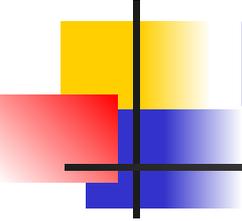


Замечание!!!

В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при x в знаменателе. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

2) Использование дискриминанта (неотрицательность)

- Решите уравнение $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$
в целых числах



Решение:

- Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x :

$$3x^2 + (3y-1)x + 3y^2 - 8y = 0$$

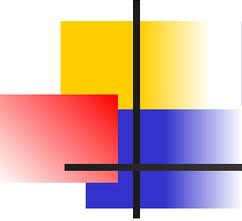
- Найдем дискриминант

$D = -27y^2 + 90y + 1$. данное уравнение имеет корни, если $D \geq 0$, т.е. $-27y^2 + 90y + 1 \geq 0$.

Так как y принадлежит целым числам, то получаем $0 \leq y \leq 3$. перебирая эти значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решения $(0;0)$ и $(1;1)$

3) Использование дискриминанта (полный квадрат)

- Решите уравнение $x^2 - xy + y^2 = x + y$ в целых числах



Решение:

- Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x : $x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$
- $D = -3y^2 + 6y - 1 = a^2$ должен быть квадратом некоторого числа a .
получаем новое уравнение $3y^2 + 6y - 1 + a^2 = 0$. Из последнего уравнения следует, что $a^2 \leq 4$, т.е. $a \leq 2$

1) Если $a^2=0$, то уравнение $3(y-1)^2=4$ не имеет целого решения y

2) Если $a^2=1$, то уравнение $3(y-1)^2=3$ имеет целые решения $y_1=2$ и $y_2=0$.

- при $y=2$ получаем квадратное уравнение $x^2-3x+2=0$

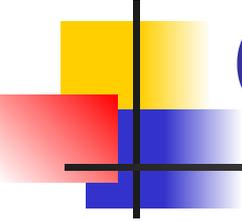
$$x_1=1, x_2=2.$$

- при $y=0$ получаем квадратное уравнение $x^2-x=0$

$$x_3=0, x_4=1$$

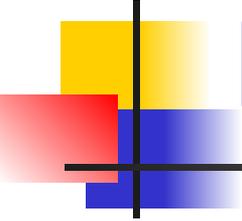
3) Если $a^2=4$, то уравнение $3(y-1)^2=0$ имеет одно целое решение $y=1$. при $y=1$ получаем $x^2-2x=0$

$$x_1=0, x_2=2$$



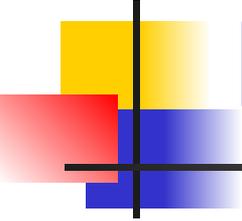
Ответ:

- $(1;2), (2;2), (0;0), (1;0), (0;1), (2;1)$



Метод остатков

- Решите в целых числах уравнение
 $3^a + 7 = 2^c$



Решение:

- 1) Если $a < 0$, то уравнение не имеет решений в целых числах.
Действительно $0 < 3^a < 1$, тогда первая часть уравнения $3^a = 2^c - 7$ является целым числом при $c \geq 0$ (что невозможно) или первая часть уравнения $7 = 2^c - 3^a$ меньше 7 при $c < 0$.
- 2) Пусть $a = 0$, тогда из уравнения $2^c = 8$ получаем $c = 3$

3) Теперь считаем, что $a > 0$. так как уравнение содержит степень с основанием 3, то рассмотрим остатки деления на 3. левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1. Когда правая часть 2^c имеет остаток 1? легко показать, что при четном $c = 2x$ выражение

$$2^{2x} = 4^x = (3+1)^x = 3^x + 3^{x-1} + \dots + 3 + 1 = 3t + 1$$

имеет остаток 1. при нечетном $c = 2x + 1$ выражение $2^{x+1} = 2 * 4^x = 2(3t + 1) = 6t + 2$ имеет остаток 2

- Итак $s=2x$. Тогда $3^a = 2^{2x-7} = 4^{x-7}$.

Правая часть последнего уравнения имеет остаток 1 при делении на 4 (число -7 попадает в множество $-$ класс остатков содержащее 1). Когда левая часть 3^a имеет остаток 1? Покажем, что при $a=2r$ выражение

$$3^{2^r} = 9^r = (8+1)^r = 8^r + 8^{r-1} + \dots + 8 + 1 = 8s + 1$$

имеет остаток 1. при нечетном $a=2r+1$

$$\text{выражение } 3^{2^r+1} = 3 \cdot 9^r$$

$$= 3(8s+1) = 24s+3 \text{ имеет остаток } 3.$$

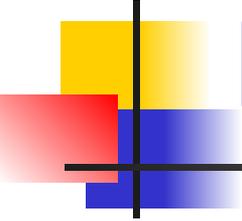
■ Итак, $a=2r$. Тогда уравнение запишем в виде $2^{2x-3^r} = 7$ или $(2^x - 3^r)(2^x + 3^r) = 7$.

Так как $2^x - 3^r > 2^x + 3^r$ и $2^x + 3^r > 0$, то имеем единственный случай

$$\begin{cases} 2^x + 3^r = 7 \\ 2^x - 3^r = 1 \end{cases}$$

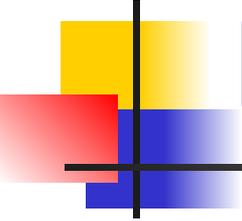
Отсюда получаем, что $x=2$, $r=1$ и $a=2$,
 $c=4$

Ответ: $a=2$, $c=4$ или $a=0$, $c=3$



Метод «спуска»

- Решите уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$ в целых числах



Решение:

- Так как $2x^2$ -четное число, а 7-нечетное число, то $5y^2$ - должно быть нечетным, т.е. y –нечетное число
- Пусть $y=2z+1$, где z -целое, тогда данное уравнение можно записать в виде:

$$x^2-10z^2-10z=6.$$

Отсюда видно, что x должно быть четным.

- Пусть $x=2m$, тогда последнее уравнение примет вид $2m^2-5z(z+1)=3$, что ~~невозможно, так как $z(z+1)$ -четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу.~~ Таким образом, данное уравнение не имеет целых решений.

- Ответ: нет решений