

# *Целочисленные*



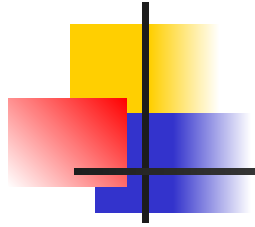
## *задачи*

---

Выполнили:

Красилич Надежда

Ведерникова Анастасия



---

# Методы

# решения

- Нелинейные уравнения



# 1) Разложение на множители

---

- Решить уравнение  $2x^3 + xy - 7 = 0$  в целых числах.



# Решение:

---

- Приведем данное уравнение к виду  $X(2x^2+y)=7$ .

Так как  $7=1*7=7*1=-1*(-7)=-7*(-1)$ , то рассмотрим четыре системы

$$1) x=1$$

$$2x^2+y=7$$

$$3) x=-1$$

$$2x^2+y=-7$$

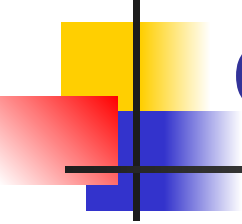
$$2) x=7$$

$$2x^2+y=1$$

$$3) x=-7$$

$$2x^2+y=-1$$

Ответ:  $(1;5), (-1;-9), (7;-97), (-7;-99)$



## 2) Применение формул сокращенного умножения

---

- Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55



## Решение:

---

- Запишем условие задачи в виде уравнения  $x^2 - y^2 = 55$  или  $(x-y)(x+y) = 55$
- Поскольку  $x-y < x+y$  и  $55 = 1 * 55 = 5 * 11$ , то возможны 2 случая
  - $x-y=1$
  - $x-y=5$
  - $x+y=55$
  - $x+y=11$

Ответ: (28;27), (8;3)



## 3) Способ группировки

---

- Решите уравнение  $xу+3x-y=6$  в целых числах



# Решение:

---

- Запишем уравнение в виде
- $X(y+3)-(y+3)=3$  или  $(x-1)(x+3)=3$
- Рассмотрим 4 системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=1 \\ x+3=3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=-1 \\ x+3=-3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=3 \\ x+3=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=-3 \\ x+3=-1 \end{array} \right.$$

Ответ:  $(4;-2), (-2;-4), (2;0), (0;-6)$



## 4) Разложение квадратного трехчлена

---

- Решите уравнение  $x^2 - 3xy + 2y^2 = 11$  в  
целых числах



# Решение:

---

- Решим уравнение  $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$  относительно неизвестной  $x$ :

$$x_1 = y \text{ и } x_2 = 2y$$

$$\text{Тогда получаем } (x-y)(x-2y) = 11$$

Рассмотрим 4 системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=11 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-1 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-11 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

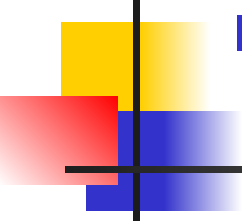
$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=11 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-11 \\ x-2y=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=-1 \\ x-2y=1 \end{array} \right.$$

Ответ:  $(21; 10)$ ,  $(-9; -10)$ ,  $(-21; -10)$ ,  $(9; 10)$



- **Метод решения  
относительно одной  
переменной**



# 1) Выделение целой части

---

- Найдите все пары целых чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих уравнению
- $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$



## Решение:

---

- Выразим из данного уравнения  $y$  через  $x$ :

$$y = -(14x + 71) / (3x + 17)$$

$$\text{ОДЗ: } 3x + 17 \neq 0$$

Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя)

- $y = -(4(3x+17)+2x+3)/(3x+17)$

- $y = -4 - (2x+3)/(3x+17)$

- Умножим обе части последнего равенства на 3:

$$3y = -12 - (6x+9)/(3x+17) = -12 - 2 + 25/(3x+17)$$

Поскольку числа  $3y$  и  $14$ -целые, то  $3x+17$  должно быть делителем числа  $25$ :  $1, -1, 5, -5, 25, -25$

Ответ:  $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$



## Замечание!!!

---

В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при  $x$  в знаменателе. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

## 2) Использование дискриминанта (неотрицательность)

---

- Решите уравнение  $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$   
в целых числах





# Решение:

---

- Рассмотрим уравнение как квадратное относительно  $x$ :

$$3x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 - 8y = 0$$

- Найдем дискриминант

$D = -27y^2 + 90y + 1$ . данное уравнение имеет корни, если  $D \geq 0$ , т.е.  $-27y^2 + 90y + 1 \geq 0$ .

Так как  $y$  принадлежит целым числам, то получаем  $0 \leq y \leq 3$ . перебирая эти значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решения  $(0; 0)$  и  $(1; 1)$

### 3) Использование дискриминанта (полный квадрат)

---

- Решите уравнение  $x^2 - xy + y^2 = x + y$  в целых числах



## Решение:

---

- Рассмотрим уравнение как квадратное относительно  $x$ :  $x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$
- $D = -3y^2 + 6y - 1 = a^2$  должен быть квадратом некоторого числа  $a$ .  
получаем новое уравнение  $3y^2 + 6y - 1 + a^2 = 0$ . Из последнего уравнения следует, что  $a^2 \leq 4$ , т.е.  $a \leq 2$

1) Если  $a^2=0$ , то уравнение  $3(y-1)^2=4$  не имеет целого решения  $y$

2) Если  $a^2=1$ , то уравнение  $3(y-1)^2=3$  имеет целые решения  $y_1=2$  и  $y_2=0$ .

- при  $y=2$  получаем квадратное уравнение  $x^2-3x+2=0$

$$x_1=1, x_2=2.$$

- при  $y=0$  получаем квадратное уравнение  $x^2-x=0$

$$x_3=0, x_4=1$$

3) Если  $a^2=4$ , то уравнение  $3(y-1)^2=0$  имеет одно целое решение  $y=1$ . при  $y=1$  получаем  $x^2-2x=0$

$$x_1=0, x_2=2$$



Ответ:

---

- $(1;2), (2;2), (0;0), (1;0), (0;1), (2;1)$



# Метод остатков

---

- Решите в целых числах уравнение  
 $3^a + 7 = 2^c$



## Решение:

---

- 1) Если  $a < 0$ , то уравнение не имеет решений в целых числах. Действительно  $0 < 3^a < 1$ , тогда первая часть уравнения  $3^a = 2^c - 7$  является целым числом при  $c \geq 0$  (что невозможно) или первая часть уравнения  $7 = 2^c - 3^a$  меньше 7 при  $c < 0$ .
- 2) Пусть  $a = 0$ , тогда из уравнения  $2^c = 8$  получаем  $c = 3$

3) Теперь считаем, что  $a > 0$ . так как уравнение содержит степень с основанием 3, то рассмотрим остатки деления на 3. левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1. Когда правая часть  $2^c$  имеет остаток 1? легко показать, что при четном  $c = 2x$  выражение

$$2^{2x} = 4^x = (3+1)^x = 3^x + 3^{x-1} + \dots + 3 + 1 = 3t + 1$$

имеет остаток 1. при нечетном  $c = 2x + 1$  выражение  $2^{x+1} = 2 * 4^x = 2(3t + 1) = 6t + 2$  имеет остаток 2



- Итак  $s=2x$ . Тогда  $3^a = 2^{2x-7} = 4^x - 7$ .

Правая часть последнего уравнения имеет остаток 1 при делении на 4 (число  $-7$  попадает в множество  $-$ класс остатков содержащее 1). Когда левая часть  $3^a$  имеет остаток 1? Покажем, что при  $a=2r$  выражение

$$3^{2^r} = 9^r = (8+1)^r = 8^r + 8^{r-1} + \dots + 8 + 1 = 8s + 1$$

имеет остаток 1. при нечетном  $a=2r+1$

$$\text{выражение } 3^{2^r+1} = 3 \cdot 9^r$$

$$= 3(8s+1) = 24s+3 \text{ имеет остаток } 3.$$

■ Итак,  $a=2r$ . Тогда уравнение запишем в виде  $2^{2x-3^r} = 7$  или  $(2^x - 3^r)(2^x + 3^r) = 7$ .

Так как  $2^x - 3^r > 2^x + 3^r$  и  $2^x + 3^r > 0$ , то имеем единственный случай

$$\begin{cases} 2^x + 3^r = 7 \\ 2^x - 3^r = 1 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что  $x=2$ ,  $r=1$  и  $a=2$ ,  
 $c=4$

**Ответ:  $a=2$ ,  $c=4$  или  $a=0$ ,  $c=3$**



## Метод «спуска»

---

- Решите уравнение  $2x^2 - 5y^2 = 7$  в целых числах



## Решение:

---

- Так как  $2x^2$ -четное число, а 7-нечетное число, то  $5y^2$ - должно быть нечетным, т.е.  $y$  –нечетное число
- Пусть  $y=2z+1$ , где  $z$ -целое, тогда данное уравнение можно записать в виде:

$$x^2-10z^2-10z=6.$$

Отсюда видно, что  $x$  должно быть четным.

- Пусть  $x=2m$ , тогда последнее уравнение примет вид  $2m^2-5z(z+1)=3$ , что ~~невозможно, так как  $z(z+1)$ -четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу.~~ Таким образом, данное уравнение не имеет целых решений.

- Ответ: нет решений