Целочисленные задачи

Выполнили:
Красилич Надежда
Ведерникова Анастасия

Методы решения

- Нелинейные уравнения

1)Разложение на множители

- Решить уравнение $2x^3+xy-7=0$ в целых числах.

Решение:

- Приведем данное уравнение к виду

$X(2x^2+y)=7$.

Так как 7=1*7=7*1=-1*(-7)=-7*(-1), то рассмотрим четыре системы

1) $\begin{cases} x=1 \\ 2x^2+y=7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=7 \\ 2x^2+y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=-1 \\ 2x^2+y=-7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=-7 \\ 2x^2+y=-1 \end{cases}$

Ответ: (1;5), (-1;-9), (7;-97), (-7;-99)

2) Применение формул сокращенного умножения

- Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55

Решение:

- Запишем условие задачи в виде уравнения $x^2 - y^2 = 55$ или $(x-y)(x+y)=55$
- Поскольку $x-y<x+y$ и $55=1*55=5*11$, то возможны 2 случая

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=55 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=11 \end{cases}$$

Ответ: (28;27), (8;3)

3) Способ группировки

- Решите уравнение $xy+3x-y=6$ в целых числах

Решение:

- Запишем уравнение в виде
- X(y+3)-(y+3)=3 или (x-1)(x+3)=3
- Рассмотрим 4 системы

$$\begin{cases} x-1=1 \\ x+3=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=-1 \\ x+3=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=3 \\ x+3=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=-3 \\ x+3=-1 \end{cases}$$

Ответ: (4;-2), (-2;-4), (2;0), (0;-6)

4)Разложение квадратного трехчлена

- Решите уравнение $x^2-3xy+2y^2=11$ в целых числах

Решение:

- Решим уравнение $x^2-3xy+2y^2=0$ относительно неизвестной x:

$x1=y$ и $x2=2y$

Тогда получаем $(x-y)(x-2y)=11$

Рассмотрим 4 системы

$\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=11 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=11 \\ x-2y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=-11 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

Ответ: (21;10), (-9;-10), (-21;-10), (9;10)

Метод решения относительно одной переменной

1) Выделение целой части

- Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению
- $3xy+14x+17y+71=0$

Решение:

- Выразим из данного уравнения у через х:

У=-(14х+71)/(3х+17)

ОДЗ: 3х+17$\neq$0

Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя)

- $y = -(4(3x+17)+2x+3)/(3x+17)$
- $y = -4 - (2x+3)/(3x+17)$
- Умножим обе части последнего равенства на 3:

$3y = -12 - (6x+9)/(3x+17) = -12 - 2 + 25/(3x+17)$

Поскольку числа 3y и 14-целые, то 3x+17 должно быть делителем числа 25: 1, -1, 5, -5, 25, -25

Ответ: (-4;-3), (-6;-13), (-14;-5)

Замечание!!!!

В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при х в знаменателе. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

2) Использование дискриминанта (неотрицательность)

- Решите уравнение $3(x^2+xy+y^2)=x+8y$ в целых числах

Решение:

- Рассмотрим уравнение как квадратное относительно х:

$3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0$

- Найдем дискриминант

$D=-27y^2+90y+1$. данное уравнение имеет корни, если $D>=0$, т.е. $-27y^2+90y+1>=0$.

Так как у принадлежит целым числам, то получаем $0<=y<=3$. перебирая эти значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решения (0;0) и (1;1)

3)Использование дискриминанта (полный квадрат)

- Решите уравнение $x^2 - xy + y^2 = x + y$ в целых числах

Решение:

- Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x: $x^2-(y+1)x+y^2-y=0$
- $D=-3y^2+6y-1=a^2$ должен быть квадратом некоторого числа a. получаем новое уравнение

$3y^2+6y-1+a^2=0$. Из последнего уравнения следует, что $a^2<=4$, т.е. $a<=2$

1)Если $a^2=0$, то уравнение $3(y-1)^2=4$ не имеет целого решения y

2)Если $a^2=1$, то уравнение $3(y-1)^2=3$ имеет целые решения $y1=2$ и $y2=0$.

- при y =2 получаем квадратное уравнение $x^2-3x+2=0$

  $x1=1$, $x2=2$.

- при y=0 получаем квадратное уравнение $x^2-x=0$

  $x3=0$, $x4=1$

3)Если $a^2=4$, то уравнение $3(y-1)^2=0$ имеет одно целое решение y=1. при y=1 получаем $x^2-2x=0$

$x1=0$, $x2=2$

Ответ:

- (1;2), (2;2), (0;0), (1;0), (0;1), (2;1)

Метод остатков

- Решите в целых числах уравнение $3^a + 7 = 2^c$

Решение:

- 1)Если $a<0$, то уравнение не имеет решений в целых числах. Действительно $0<3^a<1$, тогда первая часть уравнения $3^a=2^c-7$является целым числом при $c>=0$(что невозможно) или первая часть уравнения $7=2^c-3^a$ меньше 7 при $c<0$.
- 2) Пусть $a=0$, тогда из уравнения $2^c=8$ получаем $c=3$

3) Теперь считаем, что $a>0$. так как уравнение содержит степень с основанием 3, то рассмотрим остатки деления на 3. левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1. Когда правая часть 2^c имеет остаток 1? легко показать, что при четном $c=2x$ выражение

$$2^{2x}=4^x=(3+1)^x=3^x+3^{x-1}+\ldots 3+1=3t+1$$

имеет остаток 1. при нечетном $c=2x+1$ выражение $2^{x+1}=2*4^x=2(3t+1)=6t+2$ имеет остаток 2

- Итак $c=2x$. Тогда $3^a=2^{2x}-7=4^x-7$. Правая часть последнего уравнения имеет остаток 1 при делении на 4 (число – 7 попадает в множество –класс остатков содержащее1). Когда левая часть 3^a имеет остаток 1? Покажем, что при $a=2r$ выражение

$3^{2r}=9^r=(8+1)^r=8^x+8^{x-1}+..+8+1=8s+1$ имеет остаток 1. при нечетном $a=2r+1$ выражение $3^{2r+1}=3*9^r$ $=3(8s+1)=24s+3$ имеет остаток 3.

- Итак, a=2r. Тогда уравнение запишем в виде $2^{2x}-3^{2r}=7$ или $(2^x-3^r)(2^x+3^r)=7$.
- Так как $2^x-3^r > 2^x+3^r$ и $2^x+3^r>0$, то имеем единственный случай

$$\begin{cases} 2^x+3^r=7 \\ 2^x-3^r=1 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что x=2, r=1 и a=2, c=4

Ответ: a=2, c=4 или a=0,c=3

Метод «спуска»

- Решите уравнение $2x^2-5y^2=7$ в целых числах

Решение:

- Так как $2x^2$-четное число, а 7-нечетное число, то $5y^2$- должно быть нечетным, т.е. y –нечетное число
- Пусть $y=2z+1$, где z-целое, тогда данное уравнение можно записать в виде:

$$x^2-10z^2-10z=6.$$

Отсюда видно,что x должно быть четным.

- Пусть $x=2m$, тогда последнее уравнение примет вид $2m^2-5z(z+1)=3$, что невозможно, так как $z(z+1)$-четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет целых решений.

- Ответ: нет решений