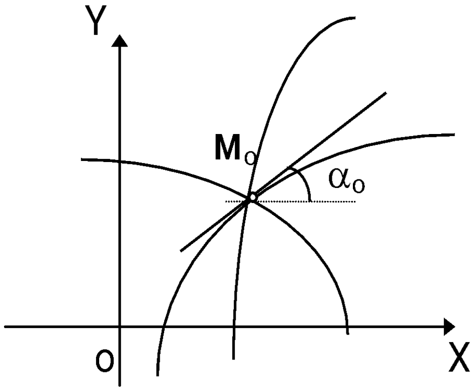
Уроки 8-9

Дифференциальные уравнения второго порядка

$y'' = f(x,y,y')$.

Общее решение $y = \varphi(x, C', C'')$,

где C',C'' - независимые постоянные,



Вообще через каждую точку M0(x0,y0) плоскости Oxy проходит пучок интегральных кривых.

Поэтому нужно не только выбрать кривую,

но еще и указать ее направление.

Тогда начальные условия:

$y = y0$

$y/(x = x0) = y/0$

$tg\ \alpha 0 = y/0$

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть имеем линейное дифференциальное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0. \quad (2.8)$$

где p, q - постоянные коэффициенты.

Будем искать частное решение в форме

$$y = e^{kx}$$

k = Const и ее нужно определить.

$$y' = ke^{kx} \qquad y'' = k^2 e^{kx}$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

так называемое *характеристическое* уравнение

Для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении производные y’’, y’ и саму функцию y заменить на соответствующие степени k.

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

1. $$\frac{p^2}{4} - q > 0$$

следовательно, имеем два действительных корня k1 и k2. Следовательно, уравнение допускает два различных частных решения

$$y_1 = e^{k_1 \cdot x} \qquad y_2 = e^{k_2 x}$$

если k1≠k2, то эти решения будут **линейно независимы.**

Определение.
Два решения $y1$ и $y2$ называются линейно зависимыми, если можно подобрать постоянные числа $a1$ и $a2$, неравные одновременно нулю, такие, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю, то есть $a1 \cdot y1 + a2 \cdot y2 \equiv 0$.
В противном случае
(то есть если таких чисел подобрать нельзя)
$y1$ и $y2$ называются линейно независимыми.
Тогда общее решение данного уравнения есть линейная комбинация этих частных решений

2. $\frac{p^2}{4} - q = 0$, следовательно,

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

В этом случае корень называется кратным, и частное решение будет одно

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}\cdot x}$$

Всякое другое частное решение y2, линейно независимое с y1, обязательно должно иметь вид

y2 = y1 · z(x), где z(x) - некоторая функция, не являющаяся константой

$$y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot z' + e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot z = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z' - \frac{p}{2}z\right)$$

$$y_2'' = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z'' - \frac{p}{2}z'\right) - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z' - \frac{p}{2}z\right) =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z'' - p \cdot z + \frac{p^2}{4}z\right)$$

y'' + p·y' + q·y = 0

$$z'' - p\cdot z' + \frac{p^2}{4}z + p\cdot z' - \frac{p^2}{2}z + q\cdot z = 0$$

или

$$z'' + \underbrace{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}_{=0}\cdot z = 0$$

Следовательно, z’’ = 0.

Тогда z’ = a и z = ax + b, где a и b - произвольные константы. И, следовательно,

$$y_2 = (a \cdot x + b) \cdot e^{-\frac{p}{2}x}$$

Если нам нужно только частное решение, то можно принять a=1,b=0 и тогда

$$y = x \cdot e^{-\frac{p}{2}x}$$

То есть общее решение уравнения во втором случае имеет вид

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$$

3. $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то будем иметь два сопряженных комплексных корня

k1 = α + i · β и k2 = α - i · β, где

$$\alpha = -\frac{p}{2} \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

и

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cdot e^{(\alpha + i \cdot \beta) \cdot x} + C_2 \cdot e^{(\alpha - i \cdot \beta) \cdot x}$$

Пусть дано дифференциальное уравнение

y'' + p·y' + q·y = 0

1. Если характеристическое уравнение имеет действительные корни k1, k2 такие, что k1 ≠ k2, то все решения имеют вид

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}$$

2. Если характеристическое уравнение имеет равные

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x\right)$$

3. Если характеристическое уравнение имеет мнимые корни k1,2 = α ± i·β, (β ≠ 0), то

$$y = e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(C_1 \cdot \mathrm{Cos}\beta \cdot x + C_2 \cdot \mathrm{Sin}\beta \cdot x\right)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \ldots$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \ldots$$

$e^x =$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \ldots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$