

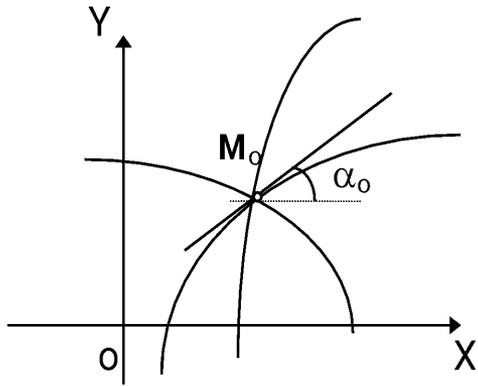
Уроки 8-9

Дифференциальные уравнения
второго порядка

$$y'' = f(x, y, y').$$

Общее решение $y = \phi$

где C', C'' - независимые постоянные,
(x, C', C'')



Вообще через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy проходит пучок интегральных кривых.

Поэтому нужно не только выбрать кривую, но еще и указать ее направление.

Тогда начальные условия:

$$y = y_0$$

$$y'(x = x_0) = y'_0$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$$

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть имеем линейное дифференциальное
однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0.$$

(2.8)

где p, q - постоянные коэффициенты.

Будем искать частное решение в форме

$$y = e^{kx}$$

$k = \text{Const}$ и ее нужно определить.

$$y' = ke^{kx} \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

так называемое характеристическое уравнение

Для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении производные y'' , y' и саму функцию y заменить на соответствующие степени k .

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$1. \quad \frac{p^2}{4} - q > 0$$

следовательно, имеем два действительных корня k_1 и k_2 . Следовательно, уравнение допускает два различных частных решения

$$y_1 = e^{k_1 \cdot x} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

если $k_1 \neq k_2$, то эти решения будут **линейно независимы.**

Определение.

Два решения y_1 и y_2 называются линейно зависимыми, если можно подобрать постоянные числа a_1 и a_2 , неравные одновременно нулю, такие, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю, то есть $a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 \equiv 0$.

В противном случае

(то есть если таких чисел подобрать нельзя)

y_1 и y_2 называются линейно независимыми.

Тогда общее решение данного уравнения

есть линейная комбинация этих частных решений

$$2. \quad \frac{p^2}{4} - q = 0 \quad , \text{ следовательно,}$$
$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

В этом случае корень называется кратным,
и частное решение будет одно

:

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2} \cdot x}$$

Всякое другое частное решение y_2 , линейно
независимое с y_1 , обязательно должно

иметь вид

$y_2 = y_1 \cdot z(x)$, где $z(x)$ - некоторая функция,
не являющаяся константой

$$y'_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot z' + e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot z = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z' - \frac{p}{2}z\right)$$

$$y''_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z'' - \frac{p}{2}z'\right) - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z' - \frac{p}{2}z\right) =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(z'' - p \cdot z + \frac{p^2}{4}z\right)$$

$$\mathbf{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0}$$

$$z'' - p \cdot z' + \frac{p^2}{4} z + p \cdot z' - \frac{p^2}{2} z + q \cdot z = 0$$

или

$$z'' + \left(\underset{\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ & & & 4 & \end{matrix}}{q - \frac{p^2}{4}} \right) \cdot z = 0$$

=0

Следовательно, $z'' = 0$.

Тогда $z' = a$ и $z = ax + b$, где a и b - произвольные константы. И, следовательно,

$$y_2 = (a \cdot x + b) \cdot e^{-\frac{p}{2}x}$$

Если нам нужно только частное решение, то можно принять $a=1, b=0$ и тогда

$$y = x \cdot e^{-\frac{p}{2}x}$$

То есть общее решение уравнения во втором случае имеет вид

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$$

3. $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то будем иметь два сопряженных комплексных корня

$$k_1 = \alpha + i \cdot \beta \quad \text{и} \quad k_2 = \alpha - i \cdot \beta, \quad \text{где}$$

$$\alpha = -\frac{p}{2} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad \text{и}$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cdot e^{(\alpha + i \cdot \beta) \cdot x} + C_2 \cdot e^{(\alpha - i \cdot \beta) \cdot x}$$

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y =$$

1. Если характеристическое уравнение имеет действительные корни k_1, k_2 такие, что $k_1 \neq k_2$, то все решения имеют вид

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}$$

2. Если характеристическое уравнение имеет равные

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$$

3. Если характеристическое уравнение имеет мнимые корни $k_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$, ($\beta \neq 0$), то

$$y = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta \cdot x + C_2 \cdot \sin \beta \cdot x)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \dots$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \dots$$

$$e^{ix} = 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$