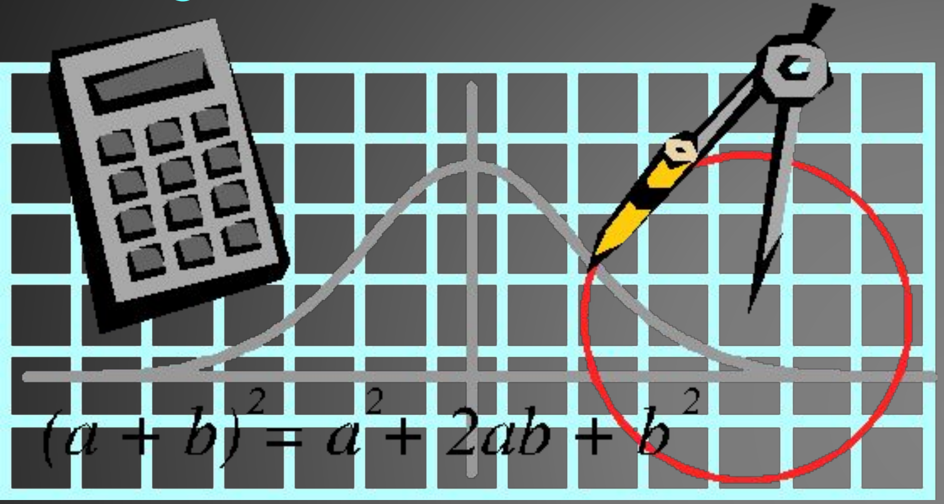
Решение нелинейных уравнений в целых числах



НАЦИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ТВОРЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ РОССИИ»

Секция : МАТЕМАТИКА

Методы решения нелинейных уравнений в целых числах

Ким Елена

МОУ лицей № 1, 10 класс, г. Комсомольск – на – Амуре

Научный руководитель:

Будлянская Наталья Леонидовна

Учитель математики высшей квалификационной категории

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………………………………слайд(ы) 3
Аннотация…………………………………………………………………….слайд(ы) 4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:
1.Делимость целых чисел…………………………………………………..слайд(ы) 5-6
2.Простые и составные числа……………………………………………..слайд(ы) 7-8
3.НОК и НОД чисел…………………………………………………………..слайд(ы) 9-13
4.Взаимно-простые числа…………………………………………………..слайд(ы) 14
5.Линейные диофантовые уравнения……………………………………слайд(ы) 15-19
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:
1.Разложение на множители………………………………………………слайд(ы) 20-21
2. Использование свойств простых чисел…………………………….....слайд(ы) 22-23
3.Выражение одной переменной через другую с последующим выделением целой части…………………………………………..………...слайд(ы) 24-25
4.Использование свойств чётности и нечётности чисел………………………слайд(ы) 26-27
5.Учёт ограниченности выражений……………………………………слайд(ы) 28
6.Учёт остатков от деления на число…………………………………..слайд(ы) 29-30
7.Представление левой части уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых………………………………..слайд(ы) 31
8.Учёт свойств делимости…………………………………………………слайд(ы) 32
9.Введение новой переменной…………………………………………....слайд(ы) 33
10.Другой метод решения уравнений ……………………………………слайд(ы) 34
Заключение………………………………………………………………….слайд(ы) 35
Библиографический список……………………………………………….слайд(ы) 36

ВВЕДЕНИЕ

Я ученица 9 класса физико-математической школы, лицея № 1, и вскоре, как и многие девятиклассники, буду проходить итоговую аттестацию. Тема для исследования «Методы решения нелинейных уравнений в целых числах» выбрана мною не случайно.

Во-первых, как в части В, так и в части С ГИА в 9-х классах есть задания, где можно будет применить знания методов решения нелинейных уравнений в целых числах. Во-вторых, умение качественно решать такие уравнения позволяют оценить мои математические навыки. Тем более умение решать уравнение различными способами высоко оценивается на олимпиадах регионального, всероссийского и международного уровней. В-третьих, передо мной была поставлена задача - провести исследования, результаты которых будут полезны и для учеников, и для учителей.

Свою работу я оформила в виде презентации, состоящей из двух частей: теоретической и практической. В теоретической части освещены базовые знания, которые необходимы при решении нелинейных уравнений в целых числах. В практической части я на примерах представила различные методы решения нелинейных уравнений, поэтому II часть моей работы относится к прикладным исследованиям.

АННОТАЦИЯ

Работа представлена в виде презентации, выполненной в программе Microsoft Office Power Point 2007. Она состоит из двух частей: теоретической и практической, - размещенных на 36 слайдах, включая титульный лист, оглавление, введение, аннотацию, заключение и библиографический список. В теоретической части мною освещены следующие темы: «Делимость целых чисел»,«Простые и составные числа», «НОК и НОД чисел», «Взаимно-простые числа», «Линейные диофантовые уравнения». В практической части рассматриваются различные методы решения нелинейных уравнений на примерах : «Разложение на множители», «Использование свойств простых чисел», «Выражение одной переменной через другую с последующим выделением целой части», «Использование свойств чётности и нечётности чисел», «Учёт ограниченности выражений», «Учёт остатков от деления на число», «Представление левой части уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых», «Учёт свойств делимости», «Введение новой переменной», «Другой метод решения уравнений».

Также к работе предоставлены тезисы, автореферат и данная аннотация.

Работа оформлена по правилам, представленным оргкомитетом конкурса «Первые шаги в науку».

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ :</u> Если существует такое c, что $a=b*c$, то $a \vdots b$ (или $b \vdots a$). При этом c-частное от деления a на b.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $a \vdots b$ (a делится на b)

<u>ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ</u>

<u>ЕСЛИ</u> $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$ $\Rightarrow$

1) $a \vdots b$, c-частное от деления $\Rightarrow$ c - единственное

2) $a \vdots a$, $b \vdots b$, $c \vdots c$…и.т.д.

3) $a \vdots b$, $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

4) $a \vdots b$, $b \vdots a \Rightarrow a=b$ $a=-b$

5) $a \vdots b$, $|b| > |a| \Rightarrow a=0$

6) $a \vdots b$, $a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq |b|$

7) чтобы $a \vdots b$, необходимо и достаточно, чтобы $|a| \vdots |b|$

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ :

ЕСЛИ $a \in N,\ b \in N, c \in N \Rightarrow$

8) $a_1 \vdots b,\ a_2 \vdots b \ldots\ a_n \vdots b \Rightarrow (a_1 \pm a_2 \ldots \pm a_n) \vdots b$

9) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \vdots b$ и $a_1 \vdots b,\ a_2 \vdots b \ldots a_{n-1} \vdots b \Rightarrow a_n \vdots b$

10) $a \vdots b$ и $a > 0 \Rightarrow a \geq b$

11) $a \vdots b,\ b \vdots c,\ m \in N_0,\ n \in N_0,\ ma > nb$, mo$(ma - nb) \vdots c \Rightarrow (ma + nb) \vdots c$

12) $a \vdots b,\ k \neq 0 \Rightarrow ak \vdots bk$

13) $ak \vdots bk,\ k \neq 0 \Rightarrow a \vdots b$

14) $a \vdots bc \Rightarrow (a : b) \vdots c$

15) $(a : b) \vdots c \Rightarrow a \vdots bc$

ПРОСТЫЕ и СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ :</u> Целое положительное число $p>1$ называется простым, если оно имеет ровно два положительных делителя: 1 и p.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ :</u> Целое положительное число $m>1$ называется составным, если оно имеет, по крайней мере, один положительный делитель, отличный от 1 и m.

<u>СВОЙСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ:</u>

1) 2 – единственное четное простое число
2) a и b – простые и $a \neq b \Rightarrow a \neq b*x$, $b \neq a*y$ (x, y - некоторые числа)
3) $a,b,c,d \in Z$ и $abcd \vdots e$, причем e-простое $\Rightarrow a \vdots e$ или $b \vdots e$ или $c \vdots e$ или $d \vdots e$
4) $a \in N_o$, $a>1 \Rightarrow$ наименьший положительный делитель -простое число

ПРОСТЫЕ и СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТКИ

$a \in N_o$, $a \neq 1$, $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_k$ – простые

$a = p_1 * p_2 * p_3 * \ldots\ldots * p_k$

Если среди чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_k$ есть одинаковые

$a = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * p_3^{a_3} * \ldots\ldots * p_k^{a_k}$

НОК и НОД чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: НОД чисел $a_1, a_2 \dots a_n$ называется положительный общий делитель, делящийся на любой другой общий делитель этих чисел.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $(a_1, a_2 \dots a_n)=d$, d-НОД чисел $a_1, a_2 \dots a_n$

a) $d>0$

b) $d \vdots a_1, d \vdots a_2 \dots d \vdots a_n$

Теорема 1:

1) Для любых чисел $a_1, a_2 \dots a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, существует НОД

2) $p_1, \dots, p_s$ –различные простые числа $\Rightarrow$

$a_1=p_1^{\alpha_1} * \dots * p_s^{\alpha_s}, \dots, a_n=p_1^{\gamma_1} * \dots * p_s^{\gamma_s} \Rightarrow$

$(a_1, a_2 \dots a_n)=p_1^{\min(\alpha_1, \dots, \gamma_1)} * \dots * p_s^{\min(\alpha_1, \dots, \gamma_s)}$

Замечание: способ нахождения НОД:

1) Разложить каждое число на простые множители, записав разложение в каноническом виде

2) Найти произведение минимальных степеней простых множителей

НОК и НОД чисел

ПРИМЕР 1: Найти НОД чисел 10080, 2646, 56.

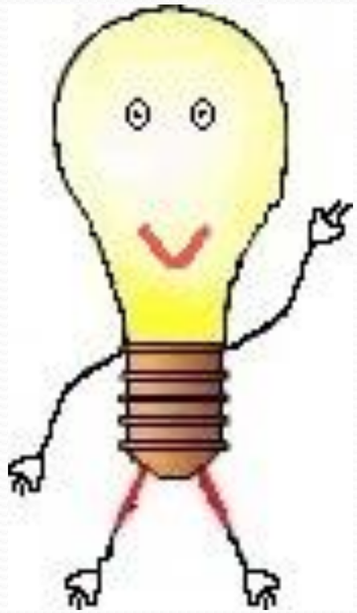
РЕШЕНИЕ:

1)

10080	2
5040	2
2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

2646	**2**
1323	3
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

56	2
28	2
14	2
7	**7**
1	



$10080=2^5*3^2*5*7 =2^5*3^2*5^1*7^1$

$2646=2*3^3*7^2 =2^1*3^3*5^0*7^2$

$56=2^3*7 =2^3*3^0*5^0*7^1$

2)$d= 2^1*3^0*5^0*7^1= 2*7=14$

$(10080,2646,56)=14$

НОК и НОД чисел

Теорема 2: $(a_1, a_2 \ldots a_n)=d$, $d \vdots b$, $b>0 \Longrightarrow \left(\frac{a_1}{b}, \ldots, \frac{a_n}{b}\right)=\frac{d}{b}$

Теорема 3: $(a_1,\ldots,a_{n-1},a_n)=((a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)$

$n\geq3 \Longrightarrow$ НОД n-чисел: 1)НОД (n-1)

2)НОД (d, a_n), $d= (a_1, a_2\ldots a_n)$, a_n -последнее число

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: НОК чисел $a_1, a_2,\ldots,a_n$ называют наименьшее положительное число, делящееся на все эти числа.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $[a_1, a_2\ldots a_n]=m$, m-НОК чисел $a_1, a_2\ldots a_n$

a)$m>0$

b)$a_1 \vdots m,\ldots,a_n \vdots m$

НОК и НОД чисел

Теорема 5:

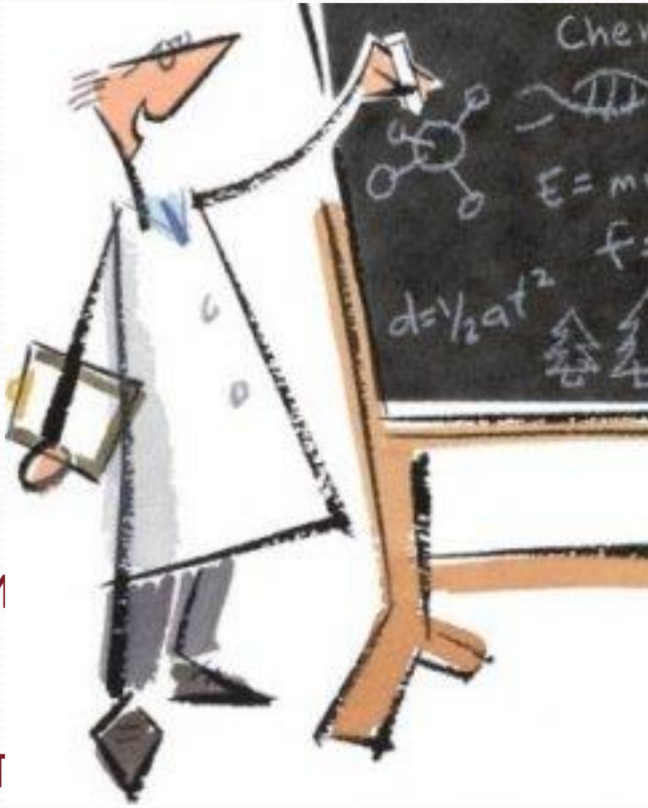
$a_1=p_1^{\alpha_1}*\ldots*p_s^{\alpha_s}*,\ldots,*a_n=p_1^{\gamma_1}*\ldots*p_s^{\gamma_s}$ - каноническое разложение

$m=[a_1, a_2\ldots a_n]=p_1^{\max(\alpha 1,\ldots,\gamma 1)}*\ldots*p_s^{\max(\alpha 1,\ldots,\gamma s)}$

Теорема 6:

a>0, b>0, a N, b   N, (a,b)=d, [a,b]=m

$m=\frac{ab}{d}$



Замечание: способ нахождения НОД:

1)Разложить число на простые множители

записав разложение в каноническом виде

2)Найти произведение максимальных степе-

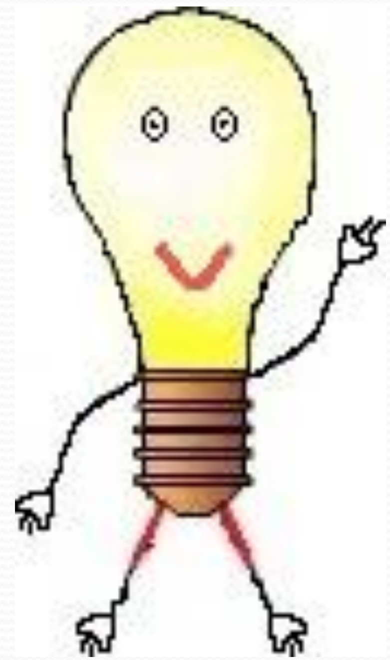
ней простых множителей, входящих в разложение

НОК и НОД чисел

ПРИМЕР 1: Найти НОК чисел 96,64,33,22.

РЕШЕНИЕ:

1)96	2	64	2	33	3	22	2
48	2	32	2	11	11	11	11
24	2	16	2	1		1	
12	2	8	2				
6	2	4	2				
3	3	4	2				
1		2	2				



$96=2^5*3=2^5*3^1*11^0$

$64=2^6=2^6*3^0*11^0$

$33=11*3=2^0*3^1*11^1$

$22=11*2=2^1*3^0*11^1$

2)$m=2^6*3^1*11^1=2112$

$[96,64,33,22]=2112$

ВЗАИМНО-ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: a и b взаимно-простые числа, если (a,b)=1

Теорема 1: a ϵ Z, p ϵ Z, причем p - простое ⟶ или a ⋮ p

или a и p – взаимно-простые

Теорема 2: a,b – взаимно-простые ⟶ [a,b]=ab

Теорема 3: Чтобы a:b или a:c достаточно и необходимо a: bc

Теорема 4: Если (a* b) ⋮ c, причем (a,c)=1 ⟶ b ⋮ c

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИАФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Общий вид диафантовых уравнений: $ax+by=c$

1. Найдем $d(a, b)$
2. Определим частное решение, выразив переменную x из данного уравнения, а переменную y находим, используя метод перебора $(x_0; y_0)$-частное решение.
3. Все остальные решения находим по формулам: $x=-bk+x_0$, $y=ak+y_0$, $k \in Z$

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРИМЕР 1: Решить уравнение в целых числах $x-3y=15$

РЕШЕНИЕ:

a)НОД(1;3)=1

b)Определим частное решение: $x=(15+3y):1$

Используя метод перебора находим значения $y=0$, тогда $x=(15+0)$. Следовательно, (15;0) - частное решение

c)Остальные решения находим по формулам:

$x=3k+15$, $k \in Z$

$y=k+0=k$, $k \in Z$

ОТВЕТ: $(3k+15;\ k)$, $k \in Z$

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРИМЕР 2: Решить уравнение в целых числах 15x+11y=14

РЕШЕНИЕ:

a)НОД(15;11)=1

b)Определим частное решение: x=(14-11y):15

Используя метод перебора, находим значение y $\in$ [0;14], т.к. при остальных значениях (x;y), не входящих в этот промежуток, выражение (14-11y):15 не будет являться целым числом (противоречит условию).

(-2;4) – частное решение

c)Остальные решения находятся по формулам:

x=-11k-2, k $\in$ Z

y=15k+4, k $\in$ Z

ОТВЕТ: (-11k-2; 15k+4), k $\in$ Z

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРИМЕР 3: Купили 390 цветных карандашей в коробке по 7 и 12 карандашей. Сколько тех и других коробок купили?

РЕШЕНИЕ:

a)Пусть x – количество коробок по 7 карандашей, y - по 12.

Всего было куплено (7x+12y) карандашей, что по условию задачи равно 390. Составим и решим уравнение.

$7x+12y=390$

b)НОД(7;12)=1

c)Определим частное решение: $x=(390-12y):7$

Используя метод перебора, находим значение $y \in [1;6]$

(54;1) – частное решение

d)Остальные решения находим по формулам:

$x=-12k+54,\ y=7k+1\ \ k \in Z$

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

k	0	1	2	3	4
x	54	42	30	28	6
y	1	8	15	22	29

Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

Суть метода: сначала первоначальное уравнение путём группировки слагаемых и вынесения общих множителей приводится к виду, когда в левой части уравнения стоит произведение сомножителей, содержащих неизвестные, а справа стоит некоторое число.

ПРИМЕР 1: Решить в натуральных числах уравнение:

$$m^2 - n^2 = 2001.$$

РЕШЕНИЕ: $(m-n)(m+n)=2001$

$2001=3*23*29*1$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=2001 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=3 \\ m+n=667 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=23 \\ m+n=87 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=29 \\ m+n=69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=1001 \\ n=1000 \end{cases} \quad \begin{cases} m=335 \\ n=332 \end{cases} \quad \begin{cases} m=49 \\ n=20 \end{cases} \quad \begin{cases} m=55 \\ n=32 \end{cases}$$

ОТВЕТ: (1001;1000), (335; 332), (49; 20), (55;32)

Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

<u>ПРИМЕР 2:</u> Решить в целых числах $x^2-3xy+2y^2=3$

РЕШЕНИЕ: Группировка: $x^2-2xy-xy+2y^2=3$; $(x^2-xy)-(2xy-2y^2)=3$

Вынесение общего множителя за скобки: $x(x-y)-2y(x-y)=3$;

$(x-y)(x-2y)=3$

Возможны 4 варианта:

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ x-2y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=-3 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=y+3 \\ y+3-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-1 \\ y-1-2y=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

(остальные 2 системы решаются подобным образом)

ОТВЕТ:(5:2); (1:2); (-5:-2); (-2:-1);

Использование свойств простых чисел

<u>ПРИМЕР 1</u>: Решить в натуральных целых числах $19x+89y=1989$

РЕШЕНИЕ: $19x+89y=1989$

$19x-1900=89-89y$

$19(x-100)=89(1-y)$ (*)

(19;89) взаимно-простые $\Rightarrow$ равенство (*) возможно в 3 случаях

a) $\begin{cases} x-100=89 \\ 1-y=19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-100=-89 \\ 1-y=-19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-100=0 \\ 1-y=0 \end{cases}$

a) x = нет решений b) $\begin{cases} x=11 \\ y=20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=100 \\ y=1 \end{cases}$

ОТВЕТ: (11;20), (100;1)

Использование свойств простых чисел

ПРИМЕР 2: Решить в простых числах $x^2-2y^2=1$

РЕШЕНИЕ: $2y^2$-четное → x-нечетное →

$2y^2=x^2-1=(x-1)(x+1)$

$(x-1):2$ (т.к. четное)

$(x+1):2$ (т.к. четное)

→ $(x-1)(x+1):4$

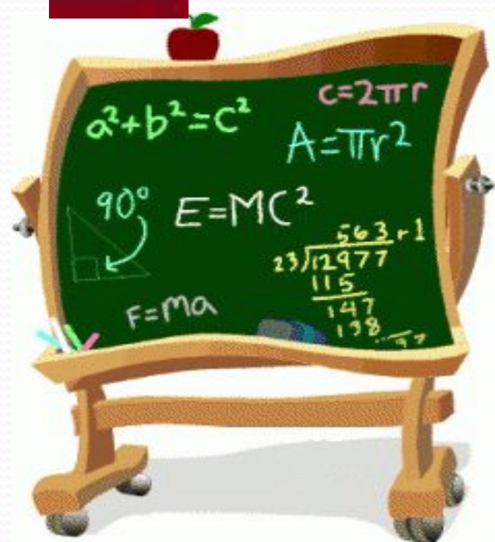
→ x=3

y-четное

x,y-простые

→ y=2

ОТВЕТ: (3;2)



Уравнения, решаемые выражением одной переменной через другую с последующим выделением целой части

ПРИМЕР 1: Решить уравнение в целых числах $x^2-xy+5x-9=0$

РЕШЕНИЕ:

a) $y=\dfrac{x^2+5x-9}{x} = x+5-\dfrac{9}{x}$, $y \in Z$

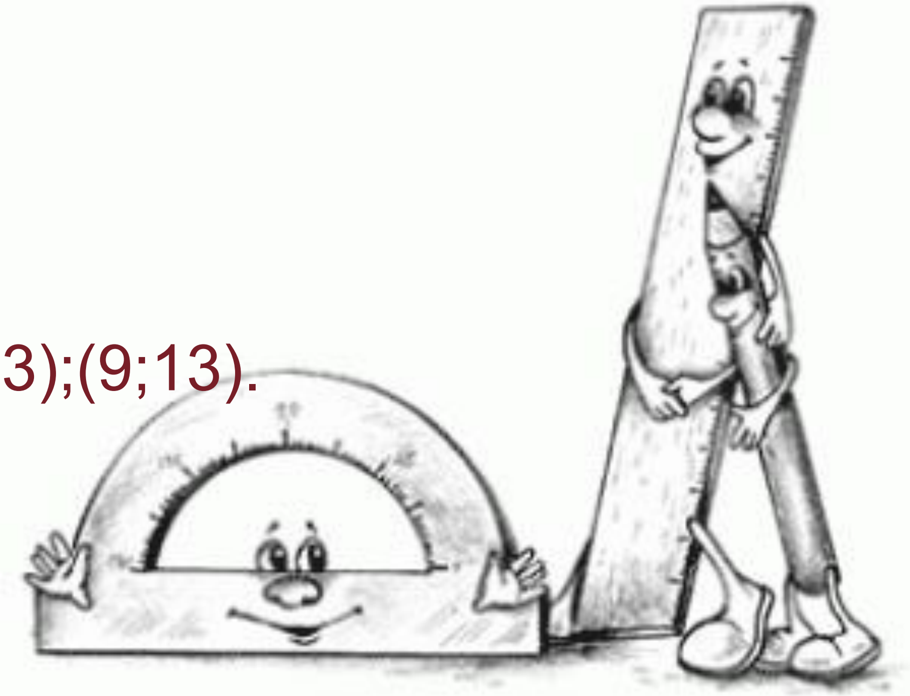
b) $\dfrac{9}{x} \in Z$, если $x= \pm1, \pm3, \pm9$

$x=-1, y=13$ $\qquad$ $x=3, y=5$

$x=1, y=-3,$ $\qquad$ $x=-9, y=-3$

$x=-3, y=5$ $\qquad$ $x=9, y=13$

Ответ$(-1;13);(1;-3);(-3;5);(3;5);(-9;-3);(9;13)$.



Уравнения, решаемые выражением одной переменной через другую с последующим выделением целой части

ПРИМЕР 2: Решить уравнение в целых числах y-x-xy=2

РЕШЕНИЕ:

a)Выразим y через x: (y-xy)=2+x

$$y(1-x)=2+x$$

$$y=\frac{x+2}{1-x}=-1-\frac{3}{x-1}$$

b)Т.к. $x\in Z; y\in Z$, то (x-1) может равняться ±1; ±3, откуда

x=2, y=-4,

x=0, y=2,

x=4, y=-2,

x=-2, y=0.

ОТВЕТ: (-2;0);(0;2);(2;-4);(4;-2)

Учет четности, нечетности чисел

ПРИМЕР 1: Доказать, что не существует целых решений уравнения $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{y^2+y+1} = 13$

РЕШЕНИЕ: a) $x^2+x+1=x(x+1)+1$

$x(x+1)$-четное

$\Rightarrow$ $x(x+1)+1$ - нечетное $\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+x+1}$ - нечетное

b) аналогично $\sqrt{y^2+y+1}$ - нечетное

c) Противоречие: нечет.+нечет.=чет.

нечет.+нечет.=нечет.(по условию)

Учет четности, нечетности чисел

ПРИМЕР 2: Решить в целых числах уравнение $x^3+y^3-3xy=2$

РЕШЕНИЕ:

1)Если x, y нечетны ⟹ x^3-нечетное число

y^3-нечетное число

$3xy$-нечетное число

Получаем: нечет+нечет-нечет ≠ чет

2)Если x-четное, y-нечетное ⟹ x^3-четное число

y^3-нечетное число

$3xy$-четное число

Получаем: чет+нечет-чет ≠ чет

(аналогично, если x-нечетное, y-четное)

3)Если x-четное, y-четное, тогда пусть $x=2m$, $y=2n$

$8m^3+8n^3-12mn=2$ или $2(2m^3+2n^3-3mn)=1$

невозможно ни при каких целых m и n

ОТВЕТ: решений нет

Учёт ограниченности выражений

ПРИМЕР 1: Решить уравнение в целых числах:

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7 \quad (1)$$

РЕШЕНИЕ: $x^4-2x^2+3=x^4-2x^2+1+2=(x^2-1)^2+2\geq 2$

$$y^4-3y^2+4=(y^2-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}\geq \frac{7}{4}$$

Л.Ч. ≥7, П.Ч.=7,значит, уравнение (1) равносильно системе :

$$\begin{cases}(x^2-1)^2+2=2\\(y^2-\frac{3}{2})+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2-1=0\\y^2-\frac{3}{2}=0\end{cases}$$

Откуда $x=\pm 1, y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\notin Z$

ОТВЕТ: уравнение не имеет решений в целых числах.

(Возможен второй способ решения – использование свойств простых чисел)

Учет остатков от деления на число

<u>ПРИМЕР 1 :</u> Решить в натуральных числах уравнение

$$n!+4n-9=k^2$$

РЕШЕНИЕ: Заметим, что $n!+4n-9=n!+4n-12+3$

a)Если $n \geq 4$, то $(n!) \vdots 4$, $4n \vdots 4$, $12 \vdots 4$ $\longrightarrow$ $(Ост_4(n!+4n-9)=3)$

В правой части уравнения стоит квадрат натурального числа k, который при делении на 4 не может давать в остатке 3. при $n \geq 4$ уравнение не имеет корней.

b)Рассмотрим случаи, когда n=1,2,3 :

1.n=1	2.n=2	3.n=3
$1+4-9=k^2$	$2!+8-9=k^2$	$3!+12-9=k^2$
$-4=k^2$	$1=k^2$	$9=k^2$
$k=\varnothing$	$k=1$	$k=3$

ОТВЕТ: n=2, k=1

n=3,k=3

Учет остатков от деления на число

ПРИМЕР 2 : Решить в целых числах уравнение $x^2+1=3y$

РЕШЕНИЕ:

a) $3y \vdots 3$, при любом целом y

b) $(x^2+1)/3$: $(Ост_3(x^2+1)=0)$, $(Ост_3(x^2+1)=1)$, $(Ост_3(x^2+1)=2)$

1. $x=3k \Longrightarrow (Ост_3(9k^2+1)=1)$
2. $x=3k+1 \Longrightarrow (Ост_3(9k^2+6k+1+1)=2)$
3. $x=3k+2 \Longrightarrow (Ост_3(9k^2+12k+4+1)=2)$

Получаем: ни при каких значениях x выражение (x^2+1) не делится на 3

при любом значении y выражение $3y$ кратно 3

Уравнение не имеет решений в целых числах

ОТВЕТ: решений нет

Уравнения, решаемые с помощью представления левой части уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых

ПРИМЕР 1: Решить уравнение в целых числах

$$5x^4+10x^2+2y^6+4y^3=6$$

РЕШЕНИЕ:

$5x^4+10x^2+2y^6+4y^3 = 5(x^4+2x^2)+2(y^6+2y^3) = 5(x^2+1)^2+2(y^3+1)^2-7$

Уравнения приводится к виду: $5(x^2+1)^2+2(y^3+1)^2=13$

Отсюда имеем $5(x^2+1)^2 \le 13$ так как $(x^2+1)^2$ – целое число, то (x^2+1) может быть только равен 0,1,-1

Можно увидеть, что только x=0 возможен

$5*1+2(y^3+1)^2=13$ Тогда $(y^3+1)^2=4$, $y^3+1=\pm 2$, но если $y^3+1=-2$, то y=-3 (не удовлетворяет условию) $y^3+1=2; y=1$

ОТВЕТ:(0;1)

Учет свойств делимости

ПРИМЕР 1 : Решить в целых числах уравнение $x^3-100=225y$

РЕШЕНИЕ: Очевидно, что x^3 должен быть кратен 5

Пусть $x= 5z$, $z \in Z$, тогда $125z^3-100=225y$

$$5z^3-4=9y \qquad (1)$$

Очевидно,что левая часть уравнения должна быть кратна 9,т.е

a) $z=3t$	b) $z=3t+1$	c) $z=3t-1$
$5(3t)^3-4=9y$	$5(3t+1)^3-4=9y$	$5(3t-1)^3-4=9y$
$135t^3-4=9y$	$5(27t^3+27t^2+9t+1)-4=9$	$5(27t^3-27t^2+9t-1)-4=9y$
	$135t^3+135t^2+45t+1=9y$	$135t^3-135t^2+45t-9=9y$

т.е. $z=3t-1$, тогда $x=15t-5$, $y=15t^3-15t^2+5t-1$

ОТВЕТ: $(15t-5;\ 15t^3-15t^2+5t-1)$, $t \in Z$

Уравнения, решаемые с помощью введения новой переменной

ПРИМЕР 1: Решить уравнение в целых числах: $7(x+y)=3(x^2-xy+y^2)$

РЕШЕНИЕ: Пусть $x+y=p$, $x-y=q$. Тогда, выразив x и y, получим: $x=\frac{p+q}{2}$, $y=\frac{p-q}{2}$.

Подставим в исходное уравнение: $7p=\frac{(p+q)^2}{2}-\frac{(p+q)(p-q)}{2}-\frac{(p-q)^2}{2}$

$7p=\frac{3(p^2+2pq+q^2-p^2+q^2+p^2-2pq+q^2)}{4}$ т.к. $28p=3(p^2+3q)$, то p–неотрицательное и $p \vdots 3$, т.е $p=3k$, $k \in Z$

Подставив $p=3k$, получим $28*3k=3((3k)^2+3q^2)$; $28k=3(3k^2+q^2)$.

Отсюда следует, что $k \vdots 3$, поэтому $k=3m$, $m\in Z$;

Подставив $k=3m$, получим $28*3m=3(3(3m)^2+q^2)$;

$28m=27m^2+q^2$;

$m(28-27m)=q^2$; так как $q^2\geq 0$, то $m=0$, или $m=1$ (решаем неравенство $m(28-27m)\geq 0$ с помощью метода интервалов)

a)Если $m=0$, $k=0$ (т.к. $k=3m$), $p=0$ (т.к. $p=3k$), $q=0$(т.к. $28p=3(p^2+3q)$), значит, $x=0$, $y=0$ (т.к. $x=\frac{p+q}{2}$, $y=\frac{p-q}{2}$

b)Если $m=1$, $k=3$, $p=9$, $q^2=1$(т.к. $m(28-27m)=q^2$)

a)$q=1$, получаем $x=5$; $y=4$; b) $q=-1$, получаем $x=4$; $y=5$;

ОТВЕТ:(5:4);(4:5);(0:0)

Второй способ решения – использование свойств взаимно - простых чисел

Другие методы решения уравнений

ПРИМЕР 1 : Решить уравнение в целых числах $10x+y=x^2+y^{2+}13$

РЕШЕНИЕ:

$$10x+y=x^2+y^2-13$$
$$x^2-10x+y^2-y+13=0$$
$$D/4=25-y^2+y-13$$

Уравнение имеет корни при $D/4\geq0$, т.е.

$25-y^2+y-13 \geq0$

$-y^2+y+12 \geq0 \;|*(-1)$

$y^2-y-12\leq0$

$D=1-4*(-12)=49=7^2$

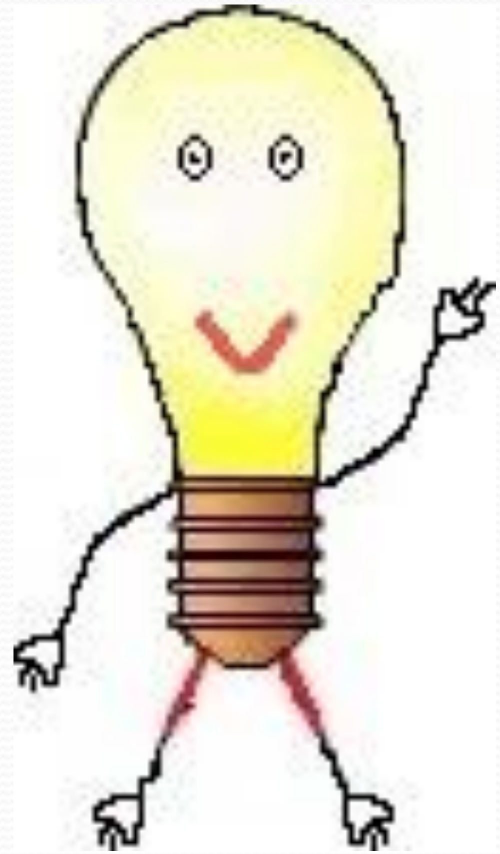
$y_1=-3$

$y_2=4$

т.е. $-3 \leq y \leq4$, т.о. переберем все возможные случаи:

$y=4, 3, 2, 1,0,-1,-2,-3$

ОТВЕТ: (-5;-3), (5;4)



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мною была проведена научно - исследовательская работа в разделе математики по изучению различных методов решения нелинейных уравнений в целых числах.

Моей целью было качественно изучить методы решения таких уравнений и представить результаты другим ученикам.

Работа велась в течение нескольких месяцев. За это время я прочитала немало научной литературы, изучила многие методы решения нелинейных уравнений в целых числах, а также приобрела опыт в ведении научно – исследовательской работы. За это время я убедилась в актуальности темы, выбранной мною, т.к. моя работа была представлена всем ученикам старших классов, особенно 9 и 11. В большей степени учащихся интересовала практическая часть работы, ведь на примере всегда проще рассмотреть, тем более, что теоретическую часть знало большинство из них.

Несмотря на то, что работа велась самостоятельно, неоценимую помощь как в предоставлении научных материалов, так и в информационной поддержке, оказал мне мой научный руководитель, Наталья Леонидовна Будлянская.

В завершение хочу сказать, что те цели, которые были поставлены передо мной, на мой взгляд, я выполнила.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Балк М.Б., Балк Г.Д.. Математика после уроков. Москва, издательство «Просвещение», 1971, - 462 с..
- Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Москва, издательство «Наука», 1960, - 608 с..
- Власов А.П., Евсеев Н.В.. Полный комплект пособий для подготовки к ЕГЭ. «50 типовых экзаменационных работ». Москва, издательство АСТ «Астрель», 2009, - 320 с..
- Гельфонд А.О.. Решение уравнений в целых числах. Москва, издательство «Наука», 1978, - 63 с..
- Горбачев Н.В.. Сборник олимпиадных задач по математике. Москва, издательство МЦНМО, 2004, - 560 с..
- Кушнир И.. Шедевры школьной математики. Киев, издательство «Астарта», 1995, - 576 с..
- Шарыгин И.Ф.. Решение задач. Москва, издательство «Просвещение», 1994, - 252 с..