Диофант
и его труды.

О подробностях жизни Диофанта Александрийского практически ничего не известно..

Диофант представляет одну из наиболее трудных загадок в истории науки. Нам не известно ни время, когда он жил, ни предшественники, которые работали бы в той же области. Труды его подобны сверкающему огню среди непроницаемой тьмы.

Промежуток времени, когда мог жить Диофант, составляют полтысячелетия! Нижняя грань определяется без труда: в своей книге о многоугольных числах Диофант неоднократно упоминает математика Гипсикла Александрийского который жил в середине 2-ого в. до н.э.

С другой стороны, в комментариях Теона Александрийского к «Альмагесту» знаменитого астронома Птолемея помещен отрывок из сочинения Диофанта. Теон жил в середине 4-ого в.н.э. Этим определяется верхняя грань этого промежутка. Итак, 500 лет!

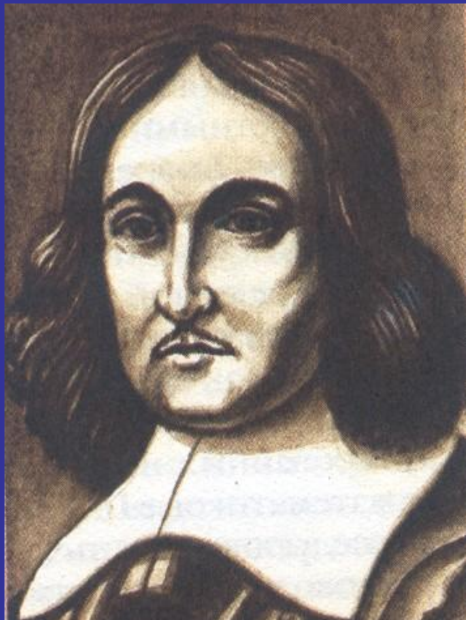
Зато место жительства Диофанта хорошо известно – Александрия, центр научной мысли и эллинистического мира.

Наиболее загадочным представляется творчество Диофанта.

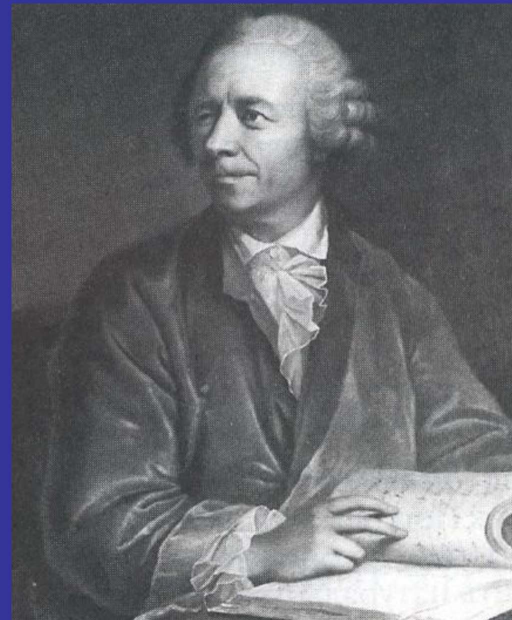
пе
рв
ы

ос
но
в
ал
ге
бр
ы.
В
нё
м
ст
ро
ит
ся

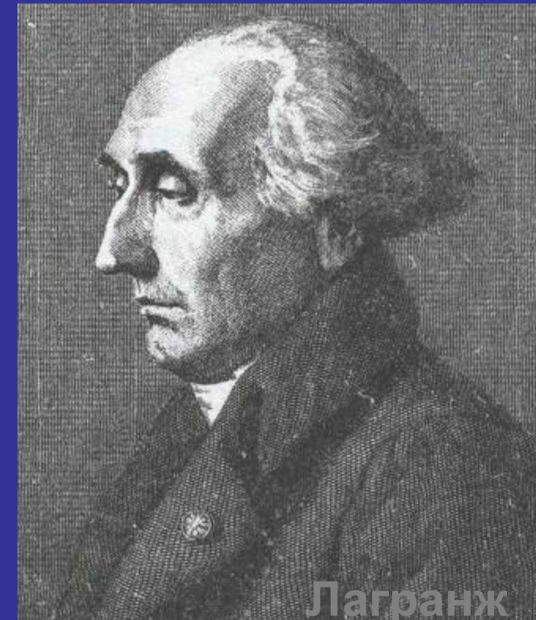
До наших дней дошли два произведения Диофанта, оба не полностью. Это «Арифметика» (шесть книг из тринадцати) и отрывки из трактата «О многоугольных числах». Но о самом авторе не известно почти ничего. Его «Арифметика» стала поворотным пунктом в развитии алгебры и теории чисел. Именно здесь произошёл окончательный отказ от геометрической алгебры. В начале своего труда Диофант поместил краткое введение, ставшее первым изложением основ алгебры. В нём строится поле рациональных чисел и вводится буквенная символика. Там же формулируются правила действий с многочленами и уравнениями. Труды Диофанта имели фундаментальное значение для развития алгебры и теории чисел. С именем этого учёного связано появление и развитие алгебраической геометрии, проблемами которой впоследствии занимались Леонард Эйлер, Карл Якоби и другие авторы.



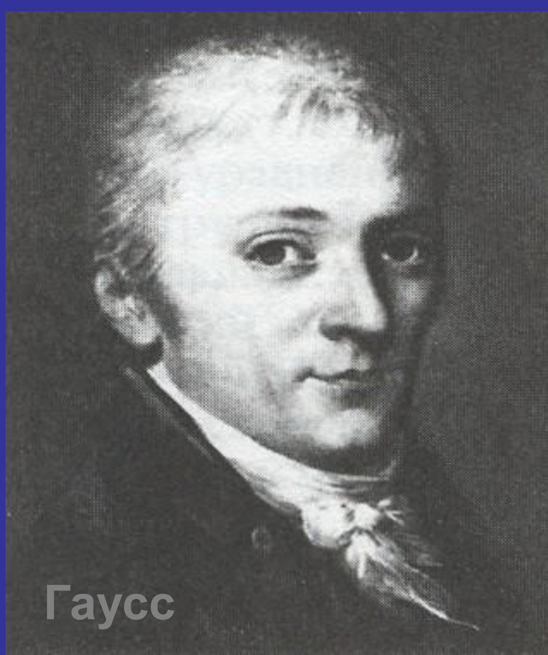
Ферма



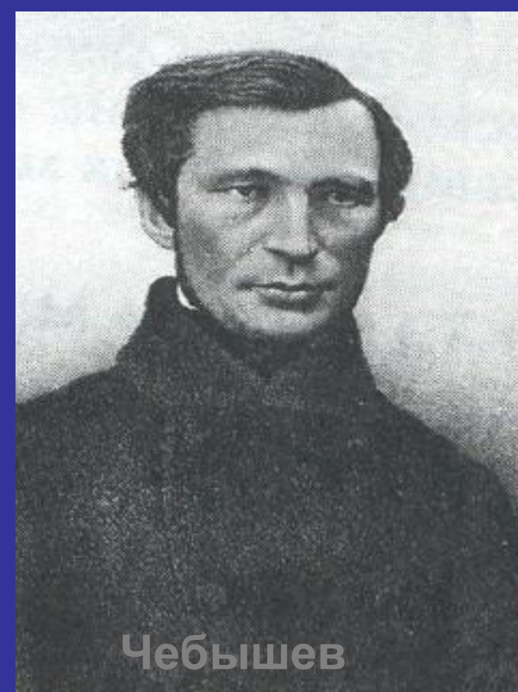
Эйлер



Лагранж

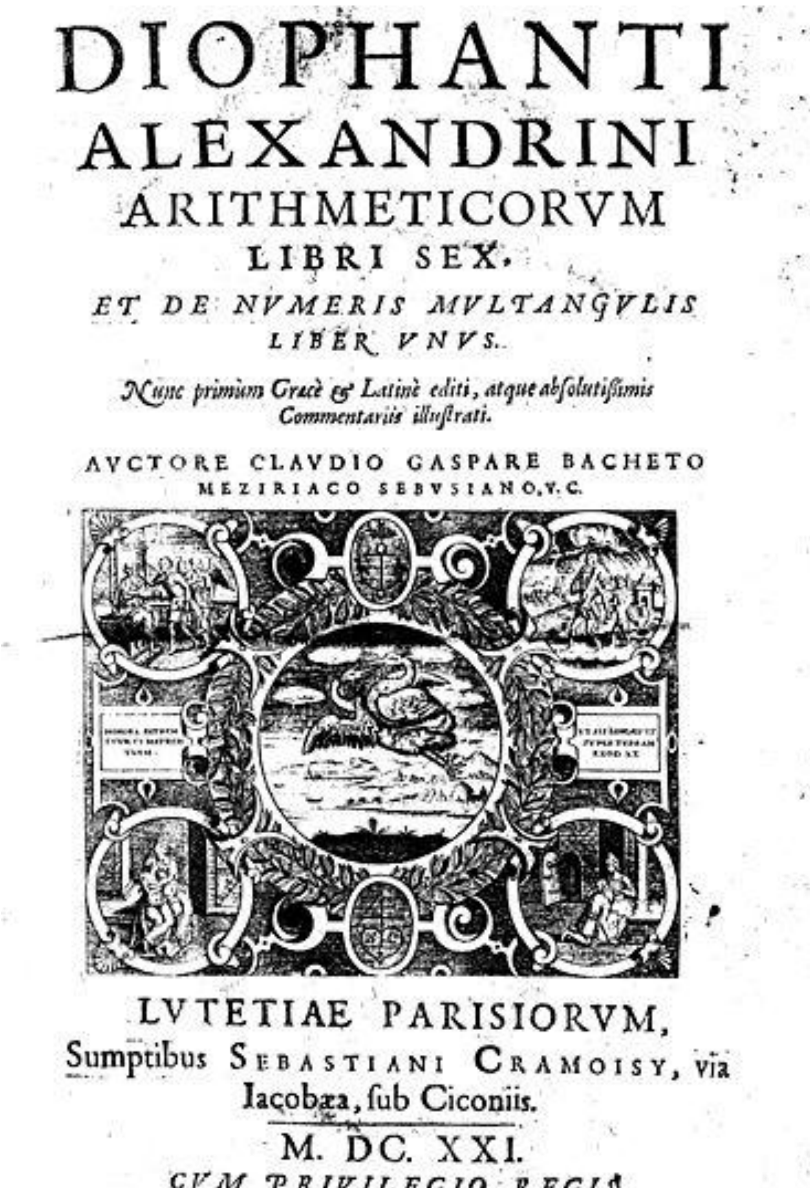


Гаусс



Чебышев

- *«Арифметика»* Диофанта – это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением (или несколькими способами решения) и необходимыми пояснениями. Поэтому, с первого взгляда, кажется, что она не является теоретическим произведением. Однако, при внимательном чтении видно, что задачи тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определенных, строго продуманных методов. Как это было принято в древности, методы не формулируются в общем виде, а повторяются для решения однотипных задач.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.

M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Главная проблематика *«Арифметики»* – это нахождение положительных рациональных решений неопределенных уравнений. Рациональные числа трактуются Диофантом так же, как и натуральные, что не типично для античных математиков.

Сначала Диофант исследует системы уравнений второго порядка от двух неизвестных. Он указывает метод нахождения других решений, если одно уже известно. Затем аналогичные методы он применяет к уравнениям высших степеней.

- В X веке *«Арифметика»* была переведена на арабский язык, после чего математики стран ислама (Абу Камил и другие) продолжили некоторые исследования Диофанта. В Европе интерес к *«Арифметике»* возрос после того, как Рафаэль Бомбелли обнаружил это сочинение в Ватиканской библиотеке и опубликовал 143 задачи из его в своей *«Алгебре»* (1572 года). В 1621 году появился классический, подробно прокомментированный латинский перевод *«Арифметики»*, выполненный Баше де Мезириаком. Методы Диофанта оказали огромное влияние на Франсуа Виета и Пьера Ферма, впрочем, в Новое время неопределенные уравнения обычно решаются в целых числах, а не в рациональных, как это делал Диофант.

- **Известны и другие сочинения Диофанта. Трактат «*О многоугольных числах*» сохранился не полностью. В сохранившейся части методами геометрической алгебры выводится ряд вспомогательных теорем.**
- **Из сочинений Диофанта *«Об измерении поверхностей»* и *«Об умножении»* также сохранились лишь отрывки.**
- **Книга Диофанта *«Поризмы»* известна только по нескольким теоремам, используемым в *Арифметике.***

В Палатинской антологии содержится эпиграмма–задача, из которой можно сделать вывод, что Диофант прожил 84 года:

Здесь погребен Диофант, и камень могильный
При счете расскажет нам,
Сколь долог был его век.
Велением бога он мальчиком был шестую часть своей жизни;
В двенадцатой части затем прошла его светлая юность.
Седьмую часть жизни прибавим – перед нами очаг Гименея.
Пять лет протекли; и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, как скончался несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты такой тяжелой
И умер, прожив для науки. Скажи мне,
Скольких лет достигнув, смерть воспринял Диофант?

Диофантовы уравнения

- ***Диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами , для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами). Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений , поэтому их называют неопределенными уравнениями. Это ,например, уравнения:***
- $3x+5y=7$; $x^2+y^2=z^2$; $3x^3+4y^3=5z^3$

К диофантовым уравнениям приводят задачи, по смыслу которых неизвестные значения величин могут быть только целыми числами.

- **Задача № 1**

- **В клетке сидят кролики и фазаны, всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других.**
- ***Решение.***
- **Составляется уравнение с двумя неизвестными переменными, в котором x – число кроликов. y – число фазанов:**

- **$4x + 2y = 18$, или $2x + y = 9$.**

- **Выразим y через x: $y = 9 – 2x$.**

- **Далее воспользуемся методом перебора:**

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

Таким образом, задача имеет четыре решения.

Ответ: **(1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1).**

Задача № 2

Подданные привезли в дар шаху 300 драгоценных камней: в маленьких шкатулках по 15 штук в каждой и в больших – по 40 штук. Сколько было тех и других шкатулок, если известно, что маленьких было меньше, чем больших?

Решение:

Обозначим за X количество маленьких шкатулок, а за Y – количество больших. Причем X < Y.

Получаем диофантово уравнение:

$$15x + 40y = 300$$

Сокращаем на 5

$$3x + 8y = 60$$

Выразим переменную x через y

$$x = \frac{60 - 8y}{3}$$

$$x = \frac{60 - 6y - 2y}{3}$$

$$x = 20 - 2y - \frac{2y}{3}$$

Чтобы значение дроби было целым числом , надо, чтобы 2у было кратно 3, т.е.:

$$2y = 3z$$

Выразим переменную у и выделим целую часть:

$$y = \frac{3z}{2}$$

$$y = \frac{2z + z}{2}$$

$$y = z + \frac{z}{2}$$

Потребуем, чтобы z было кратно 2:

$$z = 2u$$

«Спуск» окончен. Дробей больше нет.

Теперь Выразим переменные х и у через u:

$$y = 2u + \frac{2u}{2}$$

$$y = 2u + u$$

$$y = 3u$$

$$x = 20 - 2y - \frac{2y}{3}$$

$$x = 20 - 2 * 3u - \frac{2 * 3u}{3}$$

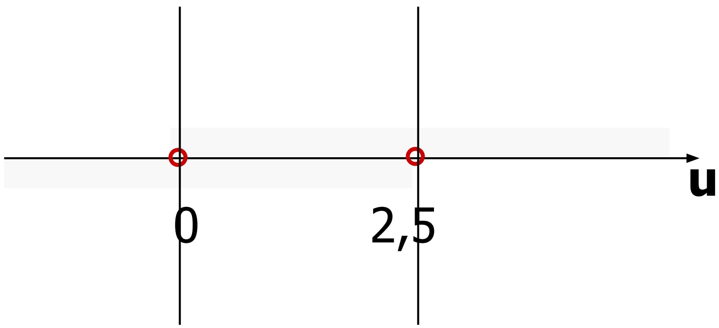
$$x = 20 - 6u - \frac{6u}{3}$$

$$x = 20 - 6u - 2u$$

$$x = 20 - 8u$$

Составим и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 20-8u>0, \\ 3u>0; \end{cases} \begin{cases} 8u<20, \\ u>0; \end{cases} \begin{cases} u<2{,}5, \\ u>0; \end{cases}$$



Выпишем целые решения: 1; 2;

Теперь найдем значения x и y при u =1; 2;

$$1)\ x_1 = 20-8\cdot 1 = 20-8 = 12$$

$$y_1 = 3\cdot 1 = 3$$

Не подходит, т.к. x должен быть меньше y!

$$2)\ x_2 = 20-8\cdot 2 = 20-16 = 4$$

$$y_2 = 3\cdot 2-6$$

<u>ОТВЕТ:</u> 4 маленькие шкатулки;

6 больших шкатулок.

Задача № 3

> Можно ли двухрублевыми и пятирублевыми монетами набрать сумму в 51 рубль? Если можно, то сколько существует способов?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Двухрублевые } -2x \text{ р.}\\ \text{пятирублевые } -5y \text{ р.}\end{array}\right\}51 \text{ р.}$$

$$2x - 5y = 51;$$

$$x = \frac{51 - 5y}{2};$$

$$x = \frac{50 - 1 - 4y - y}{2};$$

$$x = 25 - 2y + \frac{-(1 + y)}{2};$$

$$1 + y = 2z;$$

$$x = 25 - 2(2z - 1) - \frac{n + 2z - 1}{2};$$

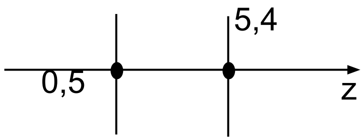
$$x = 25 - 4z + 2 - \frac{2z}{2};$$

$$x = 27 - 5z;$$

$$\begin{cases} 27 - 5z > 0 \\ 2z - 1 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -5z > -27 \\ 2z > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} z < 5{,}4 \\ z > 0{,}5 \end{cases};$$



z = 1, 2, 3, 4, 5

Ответ: 5 способов

Задача № 4

Можно ли разложить две сотни яиц в коробки по 10 и 12 штук? Если можно, то найдите все способы?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Iк } -10 \text{ шт.}\\ \text{IIк } -12 \text{ шт.}\end{array}\right\}200 \text{ шт.}$$

$$10x+12y=200;$$

$$5x+6y=100;$$

$$x=\frac{100-6y}{5};$$

$$x=\frac{100-5y-y}{5};$$

$$x=20-y-\frac{y}{5};$$

$$y=5z;$$

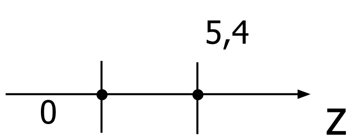
$$x=20-5z-z;$$

$$x=20-6z;$$

$$\begin{cases}20-6z>0\\5z>0\end{cases};$$

$$\begin{cases}-6z>-20\\z>0\end{cases};$$

$$\begin{cases}z<3\frac{2}{6};\\z>0\end{cases}$$



Ответ: $x_1=14,\ y_1=5;$
$x_2=8,\ y_2=10;$
$x_3=2,\ y_3=15.$

Задача № 5

> У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них 39 ног?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Осьминог} - 8 \text{ ног} \\ \text{морская звезда} - 5 \text{ ног}\end{array}\right\} 39 \text{ ног} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \text{ (одна нога)}$$

$$8x + 5y = 39;$$

$$y = \frac{39 - 8x}{5}; \quad y = \frac{40 - 1 - 10x + 2}{5};$$

$$y = 8 - 2x + \frac{2x - 1}{5};$$

$$2x - 1 = 5z;$$

$$x = \frac{5z + 1}{2}; \qquad x = \frac{4z + z + 2 - 1}{2};$$

$$x = 4u + 2 + 1 + u;$$

$$x = 4u + 3;$$

$$y = 8 - 2(5u + 3) + \frac{2(5u + 3) - 1}{5};$$

$$y = 8 - 10u + 6 + \frac{10u + 6 - 1}{5};$$

$$y = 2 - 10u + 2u + 1;$$

$$y = 3 - 8u;$$

$$\begin{cases} 5u + 3 > 0 \\ 3 - 8u > 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} u + 3 > -\dfrac{3}{5} \\ u < \dfrac{3}{8} \end{cases};$$

$$-\frac{3}{5} < u < \frac{3}{8}$$

u = 0

$x = 3;$ $y = 3;$

Ответ: 3; 3.

Задача № 6

Представьте число 257 в виде суммы двух чисел,
а) одно из которых кратно 3, а другое – 4;
б) одно из которых кратно 5, а другое – 8.

а)

$$3x+4y=257$$

$$x=85-y+\frac{2-y}{3}$$

$$2-y=3z$$

$$y=2-3z$$

$$x=83+4z$$

$$\begin{cases}2-3z>0,\\83+4z>0;\end{cases}\begin{cases}3z>2,\\4z>-83;\end{cases}\begin{cases}z>\frac{2}{3},\\z>-20\frac{3}{4};\end{cases}$$

$$z=0$$

$$x=83$$

$$3x=249$$

$$y=2$$

$$4y=8$$

Ответ: 249 и 8.

б)

$$5x+8y=257$$

$$x=51-y+\frac{2-3y}{5}$$

$$2-3y=5z$$

$$y=1-z-\frac{1+2z}{3}$$

$$1+2z=3u$$

$$z=u-1+\frac{u+1}{2}$$

$$u+1=2m$$

$$u=2m-1$$

$$z=3m-2$$

$$y=4-5m$$

$$x=45+8m$$

$$\begin{cases}4-5m>0,\\45+8m>0;\end{cases}\begin{cases}5m<4,\\8m>-45;\end{cases}\begin{cases}m<0.8,\\m>-5.625;\end{cases}$$

$$m=0$$

$$x=45$$

$$5x=225$$

$$y=4$$

$$8y=32$$

Ответ: 225 и 32.