

Проект «Методика подготовки учащихся к изучению нового материала по теме: «Системы однородных уравнений»

Выполнила
Шибарова Галина Григорьевна
Учитель математики
МОУ Лицей №4
г. Красногорска
Московская область

г. Красногорск
2011 год

Цель урока:

- Сформировать представление о системах однородных уравнений.
- Овладеть умением совершать равносильные преобразования, решая системы однородных уравнений.
- Отработать навыки решения систем однородных уравнений с двумя переменными различными методами.



Ход урока

- Актуализация опорных знаний:
 1. Проверка домашнего задания (учащиеся выполняют работу на компьютере)

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 4

2. Индивидуальная работа с учащимися.

Карточка 1.

Решить однородное уравнение

$$x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$$

Карточка 2.

Решить однородное уравнение

$$6x^2 + 11xy - 7y^2 = 0$$

Дополнительные вопросы

- Что называют системой уравнений?
- Что называют решением системы уравнений
- Что значит решить систему уравнений
- Алгоритм решения систем уравнений методом подстановки
- Алгоритм решения систем уравнений методом алгебраического сложения
- Алгоритм решения систем уравнений методом замены переменной

Самостоятельная работа

Вариант 1

Решить систему уравнений

Вариант 2

1)
$$\begin{cases} x^2 - y = 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \\ y = 6 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 10 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$(-4; 10)$

$(3; 3)$

Ответ: $(-4; 10)$

$(3; 3)$

2)
$$\begin{cases} xy = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2y + 1)y = 10 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 + y - 10 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -2,5 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$(5; 2)$

$(-4; -2,5)$

Ответ: $(5; 2)$ $(-4; -2,5)$

1)
$$\begin{cases} xy = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(-2y + 1) = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y^2 + y + 6 = 0 \\ x = -2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - y - 6 = 0 \\ x = -2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -1,5 \\ x = -2y + 1 \end{cases}$$

$x = -3$

$y = 2$

$x = 4$ $(-3; 2)$

$y = -1,5$ $(4; -1,5)$

Ответ: $(-3; 2)$ $(4; -1,5)$

2)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = 16 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) = 16 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - y) = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$2x = 10$

$-2y = 6$

$x = 5$ $(5; -3)$

$y = -3$

Ответ: $(5; -3)$

Устная работа

1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15 \end{cases}$$

- 1) (5;-3) (-5;3)
- 2) (-5;7) (3;-1)
- 3) (5;-3) (-3;5)
- 4) (-5;7) (5;-7)

2) Найти значение суммы $x + y$, если известно, что $(x ; y)$ - решение системы уравнений

$$\begin{cases} y-x=4 \\ y^2-x^2=8 \end{cases}$$

- 1) 4 3) -2
- 2) 2 4) -4

3) При каких значениях a уравнение $x^2-6x+a=0$ имеет 1 корень?

- 1) 0 3) 9
- 2) 2 4) -9

4) Решить квадратное уравнение $x^2+4x-5=0$

- 1) -5;1
- 2) 2;3
- 3) 5;-1
- 4) -3;2

Объяснение нового материала

- Повторить определение однородных уравнений
- Дать определение систем однородных уравнений
- Рассмотреть системы, содержащие однородные уравнения
- Рассмотреть различные методы решения систем однородных уравнений

Однородные уравнения

Многочлен с двумя переменными вида $p(x; y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$, где a_n отлично от нуля, называют однородным многочленом n -ой степени с двумя переменными x, y .

Если $p(x; y)$ – однородный многочлен, то уравнение $p(x; y) = 0$ называют однородным уравнением.

Характерный признак однородного многочлена – сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена одна и та же.

Примеры

- $P(x,y)=2x+3y$ – однородный многочлен первой степени; $2x+3y=0$ – однородное уравнение первой степени
- $P(x,y)=3x^2+5xy-7y^2$ – однородный многочлен второй степени; $3x^2+5xy-7y^2=0$ – однородное уравнение второй степени
- $P(x,y)=x^3+4x^2y-5y^3$ – однородный многочлен третьей степени; $x^3+4x^2y-5y^3=0$ – однородное уравнение третьей степени

УСТНО

- Какие из данных уравнений являются однородными?

1. $x+2y^2=3$

2. $x^3+4x^2y-8y^3+3xy=0$

3. $x^2+2xy+3y^2=0$

4. $4x^2-4xy+y=0$

5. $x^2+xy=0$

Тема урока: «Системы однородных уравнений»

- Определение.

Система уравнений
$$\begin{cases} P(x, y) = a, \\ q(x, y) = b; \end{cases}$$

называется однородной, если $p(x, y)$, $q(x, y)$ – однородные многочлены, a и b – действительные числа .

Пример решения системы однородных уравнений

$$\begin{cases} x^2+4xy-5y^2=0 & (1) \quad (1) - \text{однородное уравнение} \\ x^2-3xy+4y=0 & \text{второй степени} \end{cases}$$

1) Решим первое уравнение системы

$$x^2+4xy-5y^2=0$$

Если $x=0, y=0$, то $(0;0)$ – решение уравнения

Разделим обе части уравнения на $y^2 \neq 0$. Получим:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0$$

Пусть $\left(\frac{x}{y}\right) = t$, тогда $t^2+4t-5=0$

$$\begin{cases} t=-5 \\ t=1 \end{cases}$$

Если $t=-5$, то $\left(\frac{x}{y}\right) = -5$; $x=-5y$

Если $t=1$, то $\left(\frac{x}{y}\right) = 1$; $x=y$

Получим:

$$\begin{cases} x = -5y \\ x^2 - 3xy + 4y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 3xy + 4y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2) Решим первую систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x = -5y \\ 25y^2 + 15y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5y \\ 40y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5y \\ 4y(10y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5y \\ y = -0,1 \end{cases} \quad (0; 0)$$

$$\begin{cases} x = -5y \\ y = 0 \end{cases} \quad (0,5; -0,1)$$

3) Решим вторую систему уравнений

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ -2y(y - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = 0 \end{cases} \quad (2; 2)$$
$$\begin{cases} x = y \\ y = 2 \end{cases} \quad (0; 0)$$

Ответ: (2; 2) (0; 0) (0,5; -0,1)

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 7 & | -6 \\ y^2 + xy = 6 & | 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x^2 - 18xy = -42 \\ 7y^2 + 7xy = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x^2 - 11xy + 7y^2 = 0 & (-1) \\ x^2 + 3xy = 7 \end{cases}$$

1) Решим однородное уравнение

$6x^2 + 11xy - 7y^2 = 0$; $(0; 0)$ – решение уравнения, но $(0; 0)$ – не является решением системы уравнений

Разделим обе части уравнения на $y^2 \neq 0$

$$6\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 11\left(\frac{x}{y}\right) - 7 = 0 \quad \text{Пусть } \left(\frac{x}{y}\right) = t, \text{ тогда } 6t^2 + 11t - 7 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 168}}{12}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{7}{3} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Если $t = -\frac{7}{3}$, то $\frac{x}{y} = -\frac{7}{3}$, $x = -\frac{7}{3}y$

Если $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}y$, то

$$\begin{cases} x = \frac{7}{1}y \\ x = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$x^2 + 3xy = 7$$

$$x = -\frac{7}{3}y$$

$$\left(-\frac{7}{3}y\right)^2 + 3\left(-\frac{7}{3}y\right)y = 7$$

$$x = 0,5y$$

$$0,25y^2 + 1,5y^2 = 7$$

$$x = -\frac{7}{3}y$$

$$\frac{49}{9}y^2 - 7y^2 = 7$$

$$x = 0,5y$$

$$1,75y^2 = 7$$

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{3}y \\ -1\frac{2}{9}y^2 = 7 \end{cases} \emptyset$$

$$-1\frac{2}{9}y^2 = 7$$

$$x = -0,5y$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2$$

$$y = -2$$

$$x = -0,5y$$

$$x = 1$$

$$y = -2$$

$$x = -1$$

$$y = 2$$

(1;-2)

(-1;2)

Ответ: (-1;2)(1;-2)

Закрепление нового материала

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0 \\ y^2 - 3xy = 16 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ 2xy - y^2 = 15 \end{cases}$$

Итоги урока

- Ввели понятие системам однородных уравнений и рассмотрели различные методы решения систем.

Домашнее задание

§12 (стр. 89-91)

№12.07(а), 12.08(б), 12.14(в,г)

Решить систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

Почленно сложим уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - 2y^2 - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - 2y^2 - 5y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ y = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ (\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}) \\ (1; -1) \\ (-1; 1) \end{cases}$$

Ответ: $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}); (1; -1); (-1; 1)$.

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y^2 = 1 \\ x^2 + xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

Решим однородное уравнение

$(0; 0)$ - не является решением системы уравнений

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -3 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ x = 2y \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y^2 = 1 \\ x = -3y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y^2 = 1 \\ x = -3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y^2 = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18y^2 - 12y^2 - 5y^2 = 1 \\ x = -3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y^2 + 8y^2 - 5y^2 = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{1}{11} \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \\ x = -3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{\frac{1}{11}} \\ y = \sqrt{\frac{1}{11}} \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -3 \end{cases} \quad (-3; 1)$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases} \quad (3; -1)$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{\frac{1}{11}} \\ x = -2\sqrt{\frac{1}{11}} \end{cases} \quad (-2\sqrt{\frac{1}{11}}; -\sqrt{\frac{1}{11}})$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{1}{11}} \\ x = 2\sqrt{\frac{1}{11}} \end{cases} \quad (2\sqrt{\frac{1}{11}}; \sqrt{\frac{1}{11}})$$

$$x = 2\sqrt{\frac{1}{11}}$$

Отаєм: $(-3; 1); (3; -1); (-2\sqrt{\frac{1}{11}}; -\sqrt{\frac{1}{11}}); (2\sqrt{\frac{1}{11}}; \sqrt{\frac{1}{11}})$.

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 & | \quad 5 \\ 2xy - y^2 = 15 & | \quad -7 \\ \hline 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105 \\ -14xy + 7y^2 = -105 \end{cases}$$

1) $5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0$; однородное уравнение второй степени

$(0; 0)$ – решение уравнения, но решением системы не является

Разделим обе части уравнения на $y^2 \neq 0$

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 19\left(\frac{x}{y}\right) + 12 = 0$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда

$$5t^2 - 19t + 12 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 240}}{10}$$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm 11}{10}$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2xy - y^2 = 15 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - y^2 = 15 \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y^2 - y^2 = 15 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,6y^2 - y^2 = 15 \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 3 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6y^2 = 15 \\ x = 0,8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} y = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \\ x = 3y \end{cases} \right. \begin{cases} y^2 = 25 \\ x = 0,8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3} \\ x = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3} \\ x = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-4; -5)$, $(4; 5)$.

Литература

- 1) А. Г. Мордкович. Учебник. Задачник. Алгебра и начало анализа 10 класс (профильный)
Издательство «Мнемозина» 2007 г.
- 2) В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник.
«Задачи по математике. Алгебра»Издательство
«Наука» 1987 г.
- 3) В.Н. Литвиненко. «Практикум по элементарной математике»Издательство М: «АВФ»
- 4) В. В. Ткачук «Математика»Издательство М:ТЕИС
1994 г.