Диофантовы уравнения

Цель: *изучение диофантовых уравнений*

Задачи:

- найти особенности диофантовых уравнений;
- научиться решать данный тип математических задач;

Немного об уравнениях…

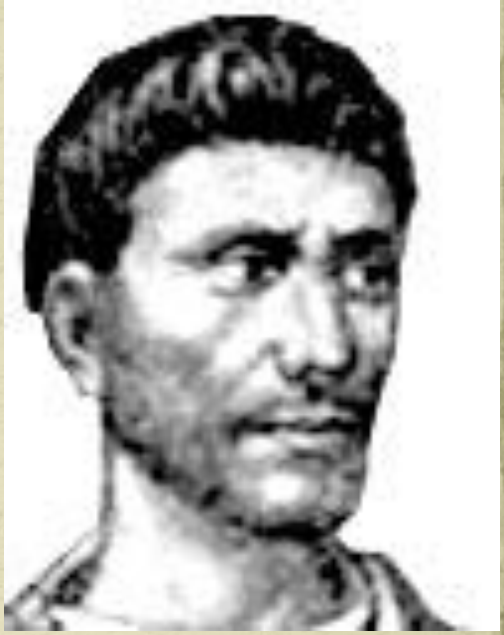
Уравнение — задача по нахождению таких значений аргументов, при которых данное равенство достигается.

Значения неизвестных, при которых это равенство достигается, называются решениями или корнями данного уравнения.

Решить уравнение означает найти множество всех его решений (корней) или доказать, что корней нет.

Диофант Александрийский

Диофант - древнегреческий математик.
Его основной труд – «Арифметика», состоящий из 13 книг, 6 из которых сохранились и по сей день.



Диофант дал решение задач, приводящихся к диофантовым уравнениям, и впервые ввёл буквенную символику в алгебру.

Диофантовы уравнения

Диофантовым уравнением называется алгебраическое уравнение с двумя или более неизвестными с целыми коэффициентами, решение которого ищется в целых или рациональных числах.

Например, уравнение **3x — 5y = 1** имеет решение

x = 7, y = 4;

вообще же его решениями служат целые числа вида

x = 7 + 5n, y = 4 + 3n

Задача.

Вы должны уплатить за купленный вами в магазине галстук 19 рублей.

У вас одни лишь трёхрублёвки, у кассира – только пятирублёвки.

Можете ли вы расплатиться с кассиром и как именно?

Решение.

Неизвестных в задаче два – число трёхрублёвок (х) и число пятирублёвок (у). Но можно составить только одно уравнение: **3х – 5у = 19**.

Итак, надо найти значения **<u>х</u>** и **<u>у</u>** в данном уравнении. Знаем при этом, что **<u>х</u>** и **<u>у</u>** –числа *целые* и *положительные*. Уединим то неизвестное, коэффициент которого меньше, т. е. член **<u>3х;</u>** получим: **3х = 19 +5у,**

откуда $x = 19 + \frac{5y}{3} = 6 + y + 1 + \frac{2y}{3}$

Так как **<u>х</u>**, **<u>6</u>** и **<u>у</u>** – числа целые, то равенство может быть верно лишь при условии,

что $1 + \frac{2y}{3}$ есть также целое число. Обозначим его буквой t.

$$x=6 + y + t,$$

Где $t = (1+2y)/3$

$$3t=1+2y \ , \qquad 2y=3t-1 \Rightarrow y=(3t-1)/2=t + (t-1)/2$$

Так как у и t – числа целые, то и (t-1)/2 должно быть некоторым целым числом t_1. следовательно,

$$y = t + t_1$$

$$t_1 = (t - 1)/2$$

$$2t_1=t - 1 \text{ и } t= 2t_1 +1$$

Значение $t= 2t_1 +1$ подставляем в предыдущие равенства:

$$y = t + t_1 = (2t_1 +1) + t_1 = 3t_1 + 1,$$

$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 +1) = 8 + 5t_1.$$

Итак, для x и y мы нашли выражения:

$$x = 8 + 5t_1,$$

$$y = 1 + 3t_1.$$

Числа x и y, мы знаем, - не только целые, но и положительные, т.е. больше чем 0. Следовательно,

$$8 + 5t_1 > 0$$

$$1 + 3t_1 > 0$$

Из этих неравенств находим:

$$5t_1 > -8 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{8}{5}$$

$$3t_1 > -1 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{1}{3}$$

Этим величина t_1 ограничивается; она больше чем $-\frac{1}{3}$ (значит, подавно больше чем $-\frac{8}{5}$).

Но так как t_1 – число целое, то заключаем,

что для него возможны лишь следующие значения:

$t_1 = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

Соответствующие значения для x и y таковы:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23, 23, \ldots$$

$$y = 1 + 3t_1 = 1, 4, 7, 10, \ldots$$

Теперь мы установили, как может быть произведена уплата: вы либо платите 8 трехрублевок, получая одну пятирублевку сдачи:

$$8 * 3 - 5 = 19$$

Либо платите 13 трехрублевок, получая сдачи 4 пятирублевками:

$13 * 3 - 4 * 5 = 19$

В принципе, вариантов решений тут, бесчисленно, но надо учитывать, что количество денежных средств и у продавца и покупателя ограничено, отсюда следует, что самый удобный вариант из всех предложенных, это дать продавцу 8 трехрублевок и получить сдачу, одну пятирублевку.

Задача решена.

В ходе данной работы нами были исследованы диофантовы уравнения. Мы нашли особенности диофантовых уравнений, научились решать данный тип математических задач.

Простой разбор задач Диофанта показывает, что он не только поставил задачу решения неопределённых уравнений в рациональных числах, но и дал некоторые *общие методы их решения.*

В ходе данной работы мы проанализировали решение задачи, что позволило понять применённые там общие методы решения диофантовых уравнений.

Библиография.

- З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, Теория чисел. М., «Наука», 1964.
- Г. Дэвенпорт, Высшая арифметика. М., «Наука», 1965.
- Л. Е. Диксон, Введение в теорию чисел. Тбилиси, 1941.
- T. H. Skolem, Diophantiche Gleichungen. Berlin, 1938.
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии. Успехи матем. наук, 1969, т. 24, № 6.
- http://ega-math.narod.ru/Liv/Diophant.htm