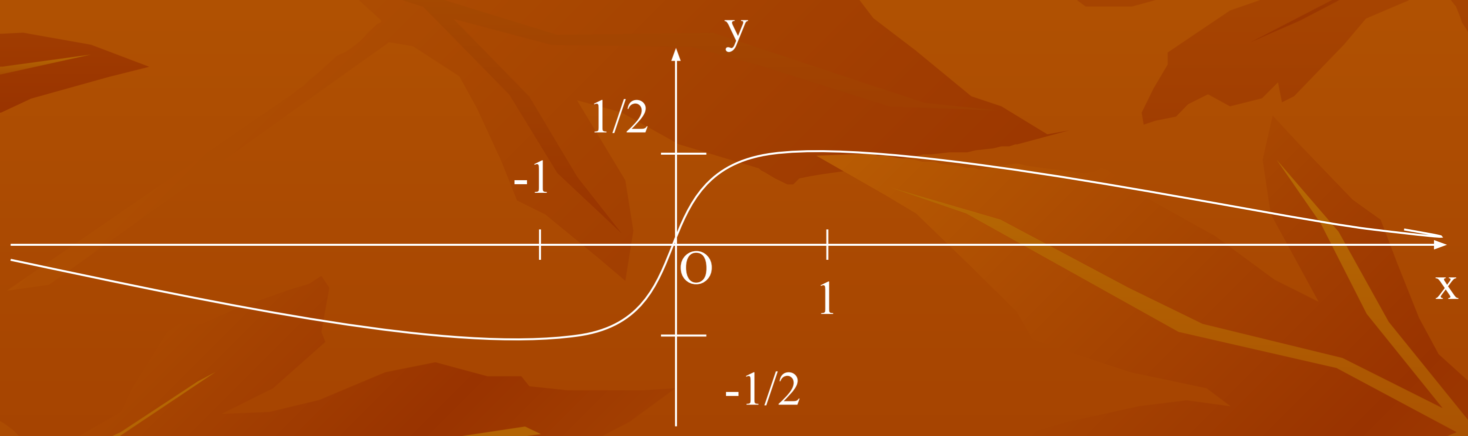
Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин

Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Например:

$y = \dfrac{x}{1+x^2}$. Построив ее график



$y_{\text{наим.}} = -1\backslash 2$, а $y_{\text{наиб.}} = 1\backslash 2$

Можно находить наименьшее и наибольшее значение без помощи графика

$$y=\sqrt{9-x^2}$$

Можно рассуждать так

$$9-x^2\le 9$$

Значит $y_{наиб}=3$

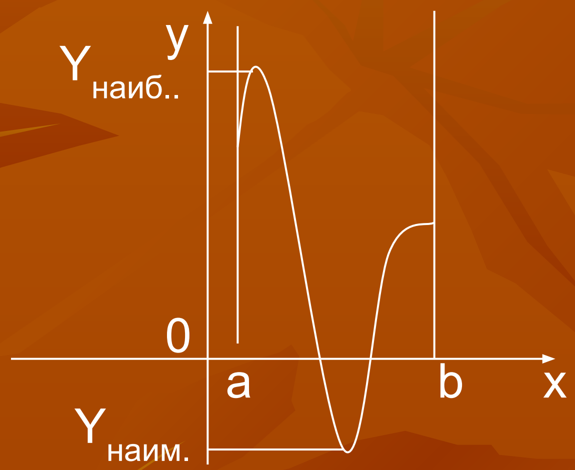
С другой стороны $\sqrt{9-x^2}\ge 0$

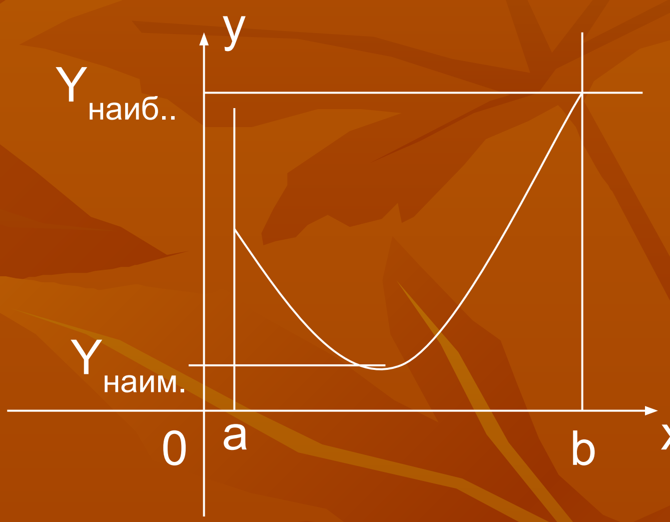
Значит $y_{наим.}=0$

Пусть

y=f(x) непрерывна на отрезке [a, b]

Например:





Анализируя указанные геометрические модели, можно прийти к следующим выводам:

1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего и своего наименьшего значений.

2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка , так и внутри него.

3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

- Алгоритм отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке [a, b].

1. Найти производную $f'(x)$
2. Найти стационарные ии критические точки функции, лежащие внутри отрезка [a, b].
3. Вычислить значения функции $y=f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим.}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб.}$).

Пример 1:

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$$

А) на отрезке [-4, 6]

Б) на отрезке [0, 6]

В) на отрезке [-2, 2]

Воспользуемся алгоритмом: имеем

$$y' = 3x^2 - 6x - 45$$

Из условия $y' = 0$ имеем

$$3x^2 - 6x - 45 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 5$$

а) $x=-3$ *и* $x=5$ принадлежат заданному [-4, 6]

Составим таблицу значений функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$$

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

Таким образом $y_{наим.}=-174$ (достигается в точке $x=5$);

$y_{наиб.}=82$ (достигается в точке $x=-3$).

б) $x=5$ принадлежит [0, 6]

Составим таблицу значений функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$$

x	0	5	6
y	1	-174	-161

Таким образом, $y_{наим.}=-174$ (достигается в точке $x=5$);

$y_{наиб.}=1$ (достигается в точке $x=0$).

в) Отрезку [-2, 2] не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек

$f(-2)=71$

$f(2)= -93$

Таким образом, $y_{наим.} = -93$

$y_{наиб.} = 71$

Пример 2:

$y = 5x^3 - x \cdot |x-1| \qquad [0;2]$

Если $x \geq 1$, $|x-1| = x-1$ и функция принимает вид

$y = 5x^3 - x^2 + x$

Если $x < 1$, $|x-1| = 1-x$

$y = 5x^3 + x^2 - x$

Таким образом речь идет о кусочной функции

$y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 - x^2 + x, x \geq 1; \\ 5x^3 + x^2 - x, x < 1. \end{cases}$$

Вычисляя $f'(x)$ *учтем*

при $x > 1, f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$

при $x < 1, f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$

в "точке стыка" $x = 1$ *производная не существует*,

это критическая точка функции

$$f'(x) = \begin{cases} 15x^2 - 2x + 1, x > 1 \\ 15x^2 + 2x - 1, x < 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$

при $x > 1,$

уравнение $15x^2 - 2x + 1 = 0$ *не имеет корней*

при $x < 1, \quad 15x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

отрезку $[0;2]$ *принадлежит точка* $x = \frac{1}{5}$

- Составим таблицу значений функции

$$y = 5x^3 - x|x-1|$$

x	0	1/5	1	2
y	0	-3/25	5	38

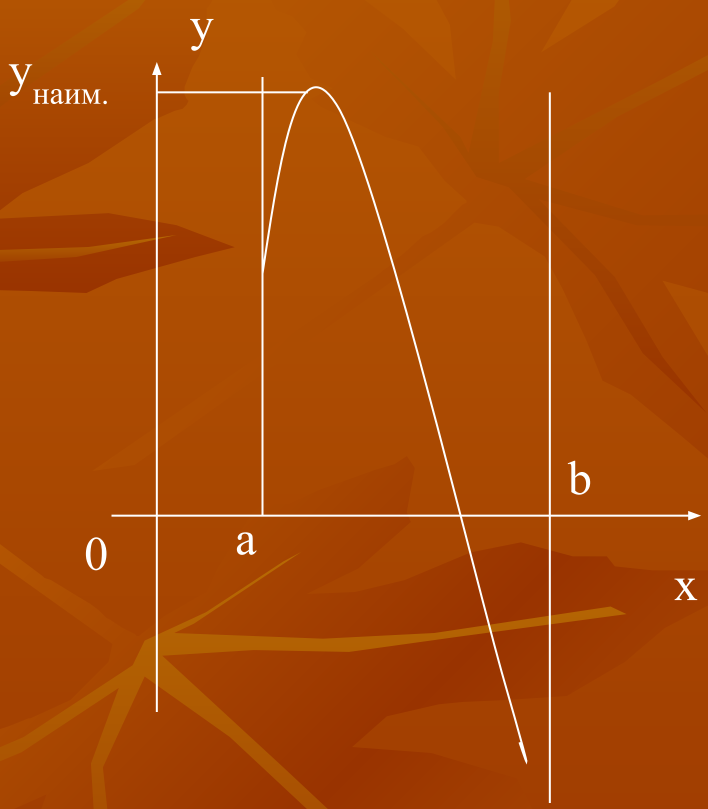
Ответ: $y_{наим.} = -3/25$; $y_{наиб.} = 38$

- Теорема:

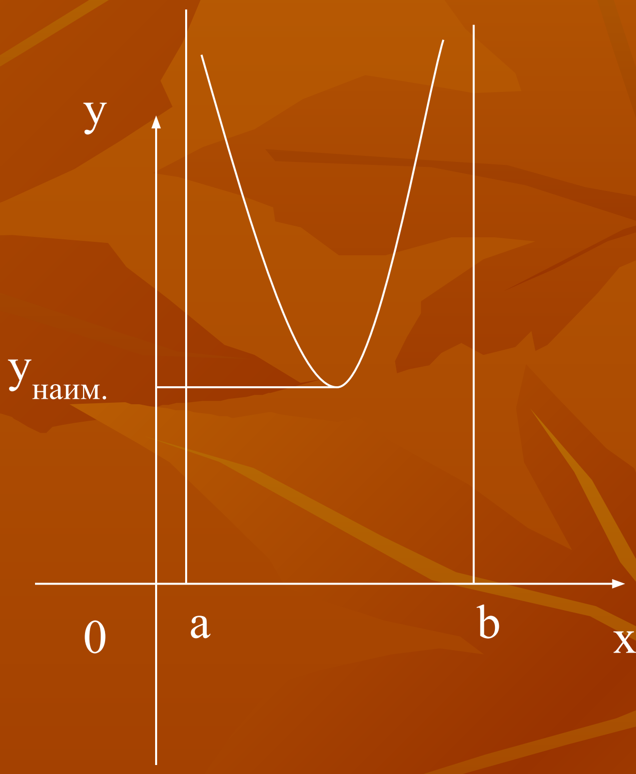
  Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x=x_o$. Тогда

  а) если $x=x_o$ – точка максимума, то $y_{наиб.}=f(x_o)$

  б) если $x=x_o$ – точка минимума, то $y_{наим.}=f(x_o)$



y
y наим.
b
0
a
x



y
y наим.
0
a
b
x

Мордкович А. Г.
Алгебра и начала анализа. 10 - 11 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. Для общеобразоват. Учреждений. – 3-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2002. – 374 с.:ил.