Задание №1

С7 (ЕГЭ по математике)

Условие

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)\cdot 5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0. \end{cases}$$

Решение

- Разберемся отдельно с первым уравнением

$$\left(1+4^{2x-y}\right)\cdot 5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}$$

$$t=2x-y:$$

$$\left(1+4^{t}\right)\cdot 5^{1-t}=1+2^{t+1}\,(*)$$

$$(1)*5^{t-1}:$$

$$1-5^{t-1}+4\left(4^{t-1}-10^{t-1}\right)=0\,(**)$$

$$t=1$$

$$t>1:1-5^{t-1}+4\left(4^{t-1}-10^{t-1}\right)<0$$

$$t<1:1-5^{t-1}+4\left(4^{t-1}-10^{t-1}\right)>0$$

$$2x-y=1\,(***)$$

Решение

- Подставим во второе уравнение

$$2x = y + 1$$

$$y^3 + 4x + 1 + \ln\left(y^2 + 2x\right) = 0$$

$$y^3 + 2y + 3 + \ln\left(y^2 + y + 1\right) = 0$$

$$y = -1$$

$$f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln\left(y^2 + y + 1\right)$$

$$f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2 + y + 1},$$

$$g(y) = 2 + \frac{2y+1}{y^2 + y + 1} = \frac{2y^2 + 4y + 3}{y^2 + y + 1} > 0,$$

$$f'(y) = 3y^2 + g(y) > 0$$

$f(y)$ – возрастает.

Резюме

$$\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)\cdot 5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y+1 \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0 \end{cases}$$

$$y^3+2y+3+\ln\left(y^2+y+1\right)=0$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Задание №2

С7 (ЕГЭ по математике)

Условие

Найдите все действительные m, при которыхуравнение

$$\left(x^2 - 2mx - 4\left(m^2+1\right)\right)\left(x^2 - 4x - 2m\left(m^2+1\right)\right) = 0$$

имеет три различных решения.

Решение

- Совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2mx - 4\left(m^2+1\right) = 0 \\ x^2 - 4x - 2m\left(m^2+1\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} (x-m)^2 = 5m^2+4 & (*) \\ (x-2)^2 = 2\left(m^3+m+2\right) & (**) \end{array}\right.$$

- (*) имеет двойной корень
  $5m^2+4=0 \quad \varnothing$
- (**) имеет двойной корень
  $$m^3+m+2=0$$
  $$(m+1)\left(m^2-m+2\right)=0$$
  $$m=-1$$
  $$m^2-m+2=0 \quad \varnothing$$
  $$(*): x=2$$
  $$(**): x=2;-4$$
- (*) и (**) имеют одинаковый корень

Решение

- Третий случай

r – общий корень

$$x^2-2mx-4\left(m^2+1\right)=\left(x-r\right)\left(x-p\right)$$

$$x^2-4x-2m\left(m^2+1\right)=\left(x-r\right)\left(x-q\right)$$

$$x\left(2m-4\right)-\left(2m^3-4m^2+2m-4\right)=$$

$$=\left(x-r\right)\left(p-q\right)$$

$$r\left(2m-4\right)-\left(2m^3-4m^2+2m-4\right)=0$$

$$\left(2m-4\right)\left(r-m^2-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} m=2 \\ r=m^2+1 \end{array}\right.$$

- Пункт 1

$m=2$

$$\left(x-2\right)^2=24 \quad \varnothing$$

- Пункт 2

$$r=m^2+1$$

$$\left(x-2\right)^2=2\left(m^3+m+2\right)$$

$$\left(m^2-1\right)^2=2\left(m+1\right)\left(m-2\right)$$

$$\left(m+1\right)\left(m-3\right)\left(m^2+1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} m=-1 \quad \varnothing \\ m=3 \end{array}\right.$$

$m=3:$

$$\left(x-3\right)^2=49 \text{ AND } \left(x-2\right)^2=64 \Leftrightarrow x=-6,-4,10.$$

Резюме

$$\left[\begin{array}{ll}(x-m)^2 = 5m^2+4 & (*) \\ (x-2)^2 = 2\left(m^3+m+2\right) & (**)\end{array}\right.$$

$$5m^2+4=0 \quad \varnothing$$

$$m^3+m+2=0 \quad \varnothing$$

r – общий корень

$$(2m-4)\left(r-m^2-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{ll}m=2 & \varnothing \\ r=m^2+1 & \end{array}\right.$$

$$m=3$$

$$x=-6,-4,10.$$

Задание №3

С6 (ЕГЭ по математике)

Условие

Найдите все натуральные $x, y, z,$ такие, что

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2.$$

Решение

- Ограничения на переменные

Можем считать, что $x \geq y \geq z$

$$1 < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{y} \leq 1 + \frac{1}{z}$$

$$2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3$$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3$$

$$z \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

$$z \leq 3$$

Решение

- Первый случай

$z = 1$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1 \qquad \varnothing$$

- Второй случай

$z = 2$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}\le\left(1+\frac{1}{y}\right)^2$$

$$y<7$$

$$1+\frac{1}{x}>1 \Rightarrow 1+\frac{1}{y}<\frac{4}{3} \Rightarrow y>3$$

$$4\le y\le 6$$

$$(x,y,z)=(7,6,2),(9,5,2),(15,4,2).$$

Решение

- Третий случай

$$z = 3$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \le \left(1+\frac{1}{y}\right)^2$$

$$y < 5$$

$$y \ge z = 3 \Rightarrow y \ge 3$$

$$3 \le y \le 4$$

$$(x, y, z) = (8, 3, 3), (5, 4, 3).$$

- Все тройки решений

Нашли все тройки (x, y, z) с условием $z \le y \le x$, поэтому остальные решения будут перестановками получившихся решений.

Резюме

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2.$$

$x \geq y \geq z$

$z \leq 3$:

$z = 1 \quad \varnothing$

$z=2 \Rightarrow 4 \leq y \leq 6$

$(x, y, z) = (7,6,2),(9,5,2),(15,4,2)$

$z = 3 \Rightarrow 3 \leq y \leq 4$

$(x, y, z) = (8,3,3),(5,4,3)$

В ответ пойдут все перестановки получившихся пятерок (5 штук).

Задание №4

C5 (ЕГЭ по математике)

Условие

Найдите все значения a, при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ принадлежит промежутку $(2 - 5^{1-a}; 21)$.

Решение

- Постановка условий

Для того, чтобы хотя бы одно значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ принадлежало промежутку $(2 - 5^{1-a}; 21)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} \max y > 2 - 5^{1-a} & (1) \\ \min y < 21 & (2) \end{cases}$$

(если $\max y \le 2 - 5^{1-a}$ или $\min y \ge 21$, тогда все значени я нашей функции будут лежать вне данного промежутка)

Решение

- Условие на минимум

(Посмотрев на функцию, становится очевидным, что при любом, сколько угодно большом a, найдется еще больший x, так что значение выражения 5^{a-2x^2} будет бесконечно малым (приближающимся к нулю), соотв. значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ будет приближаться к -4. Из этого делаем вывод, что $\min y < 21$ при любых значениях a)

$y_1 = 5^{a-2x^2}$ при $x \to \pm\infty$, $\forall a \in R$ $\Rightarrow \min(5^{a-2x^2} - 4)$ ("чуть" больше (-4)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \min y < 21, \forall a \in R$

(условие (2) выполняется всегда)

Решение

- Условие на максимум

Осталось найти все a, удовлетворяющие условию (1). Для этого, элементарными методами, мы найдем значение $\max y$, выраженное через a. Оно легко находится, поскольку функция $y = 5^{a-2x^2} - 4$ убывает при росте x, как в $+\infty$, так и в $-\infty$.

$$-2x^2 \le 0, \forall x \in R \Rightarrow a - 2x^2 \le a \qquad (3)$$

Основание $5 > 1 \Rightarrow$ можем поднять неравенство (3) в степень:

$5^{a-2x^2} \le 5^a \Rightarrow 5^{a-2x^2} - 4 \le 5^a - 4, \forall x \in R,$ причем равенство возможно только при $x = 0$.

Следовательно, $\max y = 5^a - 4$ (4)

Решение

- Решение неравенства

В условие (1) подставляем найденный максимум (4):

$$5^a - 4 > 2 - 5^{1-a}$$

$$5^a + 5^{1-a} - 6 > 0$$

$$5^a + 5 \cdot 5^{-a} - 6 > 0 \Leftrightarrow 5^a + \frac{5}{5^a} - 6 > 0$$

Делаем замену, $5^a = t, t > 0$:

$$t + \frac{5}{t} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 6t + 5}{t} > 0$$

$t > 0 \Rightarrow$ можем умножить последнее неравенство н а t:

$$t^2 - 6t + 5 > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 5 \end{array}\right.$$

Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} 5^a < 1 \\ 5^a > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 1 \end{array}\right.$$

Резюме

Найдите все значения a, при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ принадлежит промежутку $(2 - 5^{1-a}; 21)$.

$$\begin{cases} \max y > 2 - 5^{1-a} & (1) \\ \min y < 21 & (2) \end{cases}$$

$\min y < 21$ при любых значениях

$$\max y = 5^a - 4$$

$$5^a - 4 > 2 - 5^{1-a}$$

$$\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 1 \end{array}\right.$$