

Задание №1

C7 (ЕГЭ по математике)

Условие

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0. \end{cases}$$

Решение

- Разберемся отдельно с первым уравнением

$$(1 + 4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1}$$

$$t = 2x - y :$$

$$(1 + 4^t) \cdot 5^{1-t} = 1 + 2^{t+1} (*)$$

$$(1) * 5^{t-1} :$$

$$1 - 5^{t-1} + 4(4^{t-1} - 10^{t-1}) = 0 (**)$$

$$t = 1$$

$$t > 1 : 1 - 5^{t-1} + 4(4^{t-1} - 10^{t-1}) < 0$$

$$t < 1 : 1 - 5^{t-1} + 4(4^{t-1} - 10^{t-1}) > 0$$

$$2x - y = 1 (***)$$

Решение

- Подставим во второе уравнение $2x = y + 1$

$$y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0$$

$$y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$$

$$y = -1$$

$$f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$$

$$f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y + 1}{y^2 + y + 1},$$

$$g(y) = 2 + \frac{2y + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{2y^2 + 4y + 3}{y^2 + y + 1} > 0,$$

$$f'(y) = 3y^2 + g(y) > 0$$

$f(y)$ – возрастает.

Резюме

$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y + 1 \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

$$y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Задание №2

C7 (ЕГЭ по математике)

Условие

Найдите все действительные m , при которых уравнение

$$\left(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)\right)\left(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)\right) = 0$$

имеет три различных решения.

Решение

- Совокупность двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1) = 0 \\ (x - m)^2 = 5m^2 + 4 & (*) \\ (x - 2)^2 = 2(m^3 + m + 2) & (**) \end{cases}$$

- (*) имеет двойной корень $5m^2 + 4 = 0 \quad \emptyset$
- (**) имеет двойной корень $m^3 + m + 2 = 0$
 $(m + 1)(m^2 - m + 2) = 0$
 $m = -1$
 $m^2 - m + 2 = 0 \quad \emptyset$
(*): $x = 2$
(**): $x = 2; -4$
- (*) и (**) имеют одинаковый корень

Решение

■ Третий случай

r – общий корень

$$x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = (x - r)(x - p)$$

$$x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1) = (x - r)(x - q)$$

$$\begin{aligned} x(2m - 4) - (2m^3 - 4m^2 + 2m - 4) &= \\ &= (x - r)(p - q) \end{aligned}$$

$$r(2m - 4) - (2m^3 - 4m^2 + 2m - 4) = 0$$

$$(2m - 4)(r - m^2 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} m = 2 \\ r = m^2 + 1 \end{cases}$$

■ Пункт 1

$$m = 2$$

$$(x - 2)^2 = 24 \quad \emptyset$$

■ Пункт 2

$$r = m^2 + 1$$

$$(x - 2)^2 = 2(m^3 + m + 2)$$

$$(m^2 - 1)^2 = 2(m + 1)(m - 2)$$

$$(m + 1)(m - 3)(m^2 + 1) = 0$$

$$\begin{cases} m = -1 \quad \emptyset \\ m = 3 \end{cases}$$

$$m = 3:$$

$$(x - 3)^2 = 49 \text{ AND } (x - 2)^2 = 64 \Leftrightarrow x = -6, -4, 10.$$

Резюме

$$\left[(x - m)^2 = 5m^2 + 4 \quad (*) \right.$$

$$\left[(x - 2)^2 = 2(m^3 + m + 2) \quad (**) \right.$$

$$5m^2 + 4 = 0 \quad \emptyset$$

$$m^3 + m + 2 = 0 \quad \emptyset$$

r – общий корень

$$(2m - 4)(r - m^2 - 1) = 0$$

$$\left[m = 2 \quad \emptyset \right.$$

$$\left[r = m^2 + 1 \right.$$

$$m = 3$$

$$x = -6, -4, 10.$$

Задание №3

C6 (ЕГЭ по математике)

Условие

Найдите все натуральные x, y, z , такие, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2.$$

Решение

■ Ограничения на переменные

Можем считать, что $x \geq y \geq z$

$$1 < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{y} \leq 1 + \frac{1}{z}$$

$$2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3$$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3$$

$$z \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

$$z \leq 3$$

Решение

■ Первый случай

$$z = 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 \quad \emptyset$$

■ Второй случай

$$z = 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2$$

$$y < 7$$

$$1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{y} < \frac{4}{3} \Rightarrow y > 3$$

$$4 \leq y \leq 6$$

$$(x, y, z) = (7, 6, 2), (9, 5, 2), (15, 4, 2).$$

Решение

■ Третий случай

$$z = 3$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2$$

$$y < 5$$

$$y \geq z = 3 \Rightarrow y \geq 3$$

$$3 \leq y \leq 4$$

$$(x, y, z) = (8, 3, 3), (5, 4, 3).$$

■ Все тройки решений

Нашли все тройки (x, y, z) с условием $z \leq y \leq x$, поэтому остальные решения будут перестановками получившихся решений.

Резюме

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2.$$

$$x \geq y \geq z$$

$$z \leq 3:$$

$$z = 1 \quad \emptyset$$

$$z = 2 \Rightarrow 4 \leq y \leq 6$$

$$(x, y, z) = (7, 6, 2), (9, 5, 2), (15, 4, 2)$$

$$z = 3 \Rightarrow 3 \leq y \leq 4$$

$$(x, y, z) = (8, 3, 3), (5, 4, 3)$$

В ответ пойдут все перестановки
получившихся пятерок (5 штук).

Задание №4

C5 (ЕГЭ по математике)

Условие

Найдите все значения a , при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ принадлежит промежутку $(2 - 5^{1-a}; 21)$.

Решение

■ Постановка условий

Для того, чтобы хотя бы одно значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ принадлежало промежутку $(2 - 5^{1-a}; 21)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} \max y > 2 - 5^{1-a} & (1) \\ \min y < 21 & (2) \end{cases}$$

(если $\max y \leq 2 - 5^{1-a}$ или $\min y \geq 21$, тогда все значения нашей функции будут лежать вне данного промежутка)

Решение

■ Условие на минимум

Посмотрев на функцию, становится очевидным, что при любом, сколько угодно большом a , найдется еще больший x , так что значение выражения 5^{a-2x^2} будет бесконечно малым (приближающимся к нулю), соотв. значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ будет приближаться к -4 . Из этого делаем вывод, что $\min y < 21$ при любых значениях a

$$x_1 = \sqrt{\frac{a-21}{4}} \in \mathbb{R}, \quad \rightarrow \pm \min(5^{a-2x^2} - 4) \text{ ("чуть" больше } (-4)) \quad - \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min y < 21, \forall a \in \mathbb{R}$$

Условие (2) выполняется всегда)

Решение

■ Условие на максимум

Осталось найти все a удовлетворяющие условию (1). Для этого, элементарными методами, мы найдем значение $\max y$, выраженное через a . Оно легко находится, поскольку функция

$y = 5^{a-2x^2}$ убывает при росте x как в $+\infty$ так и в $-\infty$

$$-2x^2 \leq 0, \forall x \in R \Rightarrow a - 2x^2 \leq a \quad (3)$$

Основание $5 > 1 \Rightarrow$ можем поднять неравенство (3) в степень:

$$5^{a-2x^2} \leq 5^x \Rightarrow 5^{-2x^2} - 4 \leq 5^x - 4, \forall x \in R, \text{ причем равенство возможно только при } x = 0.$$

$$\text{Следовательно, } \max y = 5^a - 4 \quad (4)$$

Решение

■ Решение неравенства

В условие (1) подставляем найденный максимум (4):

$$5^a - 4 > 2 - 5^{1-a}$$

$$5^a + 5^{1-a} - 6 > 0$$

$$5^a + 5 \cdot 5^{-a} - 6 > 0 \Leftrightarrow 5^a + \frac{5}{5^a} - 6 > 0$$

Делаем замену, $5^a = t, t > 0$:

$$t + \frac{5}{t} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 6t + 5}{t} > 0$$

Можем умножить последнее неравенство на $t > 0$ и

$$t^2 - 6t + 5 > 0$$

$$\begin{cases} t < 1 \\ t > 5 \end{cases}$$

Делаем обратную замену:

$$\begin{cases} 5^a < 1 \\ 5^a > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

Резюме

Найдите все значения a , при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y = 5^{a-2x^2} - 4$ принадлежит промежутку $(2 - 5^{1-a}; 21)$.

$$\begin{cases} \max y > 2 - 5^{1-a} & (1) \\ \min y < 21 & (2) \end{cases}$$

при любых значениях

$$\max y = 5^a - 4$$

$$5^a - 4 > 2 - 5^{1-a}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$