

7 способов решения тригонометрического уравнения

$$\sin x - \cos x = 1$$

или еще раз о

красоте математики.

Авторы : Тихонова Л. В., ОУ № 9

Галимзянова Ю. Ш.,

Магнитогорский лицей №1

Проблема красоты привлекала и привлекает

Проблема красоты привлекала и привлекает
величайшие умы человечества.

Математики видят ее в:

- гармонии чисел и форм,
- геометрической выразительности,
- стройности математических формул,
- решении задач различными способами,
- изяществе математических доказательств,
- порядке,
- богатстве приложений универсальных математических методов.

Но красота математики выражается не только в красоте форм, наглядной выразительности математических объектов, восприятие которых сопряжено с наименьшими усилиями.

Ее привлекательность будет усиливаться за счет эмоционально-экспрессивной составляющей -

- ❖ оригинальности,
- ❖ неожиданности,
- ❖ изящества.

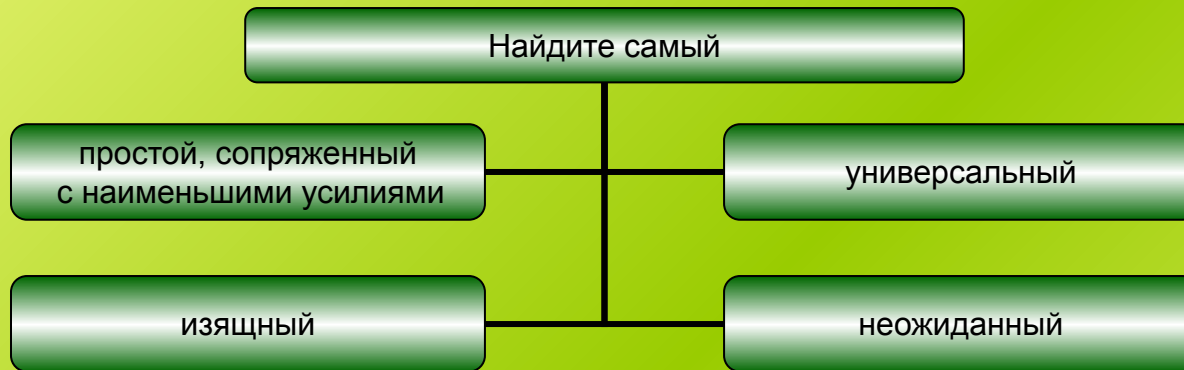
Математики живут ради тех славных
моментов,
когда проблема оказывается решенной,

ради моментов
озарения, инсайта, восторга



Можно ли насладиться решением уравнения
 $\sin x - \cos x = 1$?

Да, если стать его исследователем!



способы решения уравнения $\sin x - \cos x = 1$ и , поверьте, красота математики станет вам доступной!

Универсальные методы решения уравнения

$$\sin x - \cos x = 1$$

- Мы уже говорили о богатстве приложений универсальных математических методов. При решении уравнений одним из них является **метод разложения на множители**.
- Можно ли применить его к решению уравнения
- $\sin x - \cos x = 1$?
- *На первый взгляд, кажется что нет...*

А если использовать специфические тригонометрические преобразования?



Рассуждаем

Преобразуем исходное уравнение

$$\sin x - \cos x = 1$$

к виду

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0.$$

Мы не просто в правой части уравнения
получили ноль, мы выделили
выражение $1 + \cos x \dots$
Как вы думаете зачем

Ну, конечно, вы догадались !



Необходимо перейти к половинному аргументу, применив формулу повышения степени

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

и формулу двойного аргумента

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

Итак...

1-й способ

Разложение левой части уравнения на
множители

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0;$$

$$\text{т.к. } 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \text{ а } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла, поэтому

$$\cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0; \quad \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0; \end{cases}$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; x = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 -$$

однородное уравнение первой степени.

Делим обе его части на

$$\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0, \text{ т.к., если } \cos \frac{x}{2} = 0, \text{ то } \sin \frac{x}{2} - 0 = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 0, \right.$$

что противоречит тождеству $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$)

Получим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n;$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

$$x = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

А может вы заметили, что левая часть уравнения $\sin x - \cos x$ является однородным выражением первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ и тут же огорчились, поняв, что само уравнение не является однородным (в правой части – не ноль)?

Не огорчайтесь.
Немного
математической
магии...



и по
волшебству

неоднородное уравнение первой степени превращается (вот здорово!) в однородное уравнение второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Конечно, вы разгадали этот фокус.

Трах-тибидох...

Приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса

2-й способ

$$\sin x - \cos x = 1$$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумента, а правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2};$$

$$2 \sin x \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

И так далее, как в предыдущем способе ...

Тригонометрия удивительна тем ,что она даёт собственные оригинальные способы преобразования разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \frac{\sin x - y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2};$$

Но увы, в левой части уравнения, мы видим разноименные функции. Как изменить название функции на «кофункцию» ?

Есть изящный способ!!!



Вы уже догадались?

Нет? А всего лишь нужно применить формулу приведения!

3-й способ.

Преобразование разности (или суммы)
тригонометрических функций в произведение.

$$\sin x - \cos x = 1$$

Запишем уравнение в виде:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Применяя формулу разности двух синусов, получим

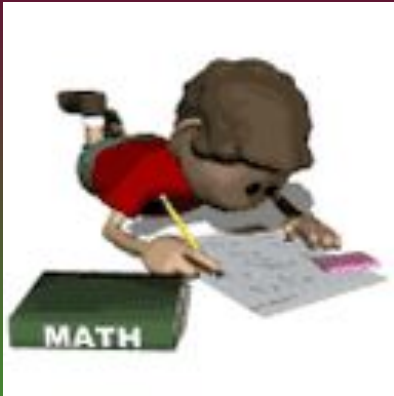
$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Другим универсальным методом решения уравнений является замена переменной. И хотя для данного уравнения этот способ не самый простой, но он применим, причем в двух вариантах!

В первом случае используется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

А во втором – универсальная подстановка.

4-й способ

Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций

$$\sin x - \cos x = 1$$

Так как

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ то}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x},$$

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos x = 1,$$

$$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 + \cos x.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$$1 - \cos^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x,$$

$$2 \cos^2 x + 2 \cos x = 0,$$

$$\cos x (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x + 1 = 0; \end{cases}$$

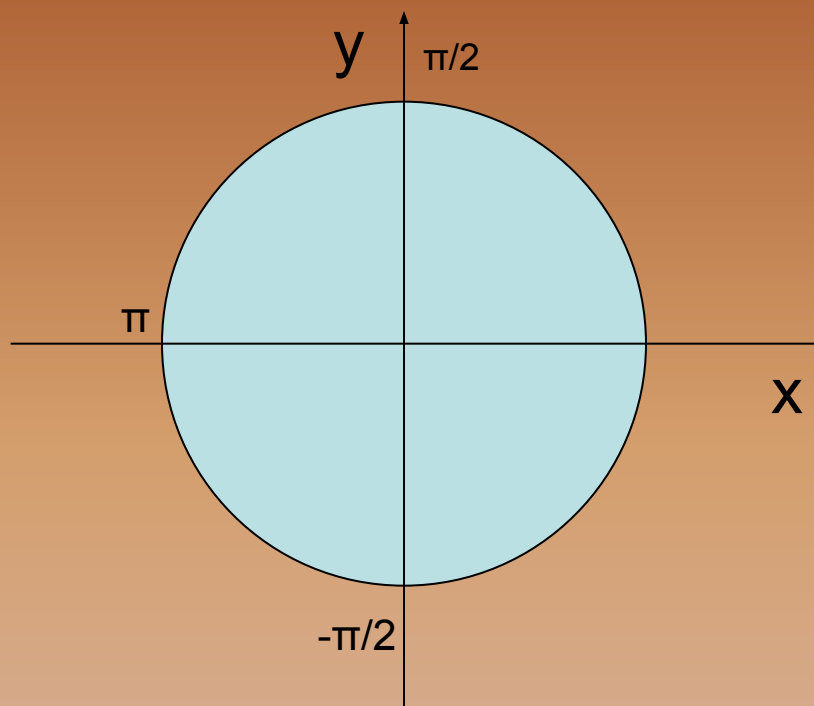
$$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x + 1 = 0; \cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

В процессе решения обе части уравнения возводились в квадрат, что могло привести к появлению посторонних решений, поэтому необходима (обязательна!) проверка. Выполним ее.

Полученные решения эквивалентны объединению трех решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pi + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m. \end{array} \right.$$



Первое и второе решения совпадают с ранее полученными, поэтому не являются посторонними.

Проверим

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Левая часть:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) =$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1.$$

Правая часть: 1.

Следовательно, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ – *постороннее*

решение.

Ответ :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

5-й способ

Выражение всех функций через $\operatorname{tg}x$ (универсальная подстановка) по формулам:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

С учетом приведенных формул уравнение

$$\sin x - \cos x = 1$$

запишем в виде

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0, \text{ м.к. } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \geq 0 \right)$$

$$2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2};$$

$$2\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

ОдЗ первоначального уравнения – все множество \mathbb{R} .

При переходе к $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$
из рассмотрения выпали значения, при которых $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$
не имеет смысла, т.е.

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ или } x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Следует проверить, не является ли $x = \pi + 2\pi k$ решением
данного уравнения.

Левая часть:

$$\sin(\pi + 2\pi k) - \cos(\pi + 2\pi k) = \sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1.$$

Правая часть: 1.

Значит, $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – решение уравнения.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{или } x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

На ряду с универсальными методами решения уравнений, есть и специфические. Наиболее ярким из них является *метод введения вспомогательного угла* (числа).

Благодаря этому приёму исходное уравнение легко сводится к *простейшему* –

ПРОСТО И КРАСИВО!



Последний метод, предлагаемый нами, связан также с нестандартным преобразованием тригонометрического уравнения – возведением обеих частей в квадрат.

И хотя он является коварным в плане приобретения посторонних корней, но подкупает своим оригинальным способом сведения исходного уравнения к **простейшему!**

6-й способ

Введение вспомогательного угла (числа)

$$\sin x - \cos x = 1$$

В левой части вынесем за скобку (корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при $\sin x$ и $\cos x$). Получим

$$\sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1;$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

С помощью тригонометрического круга легко установить, что решение

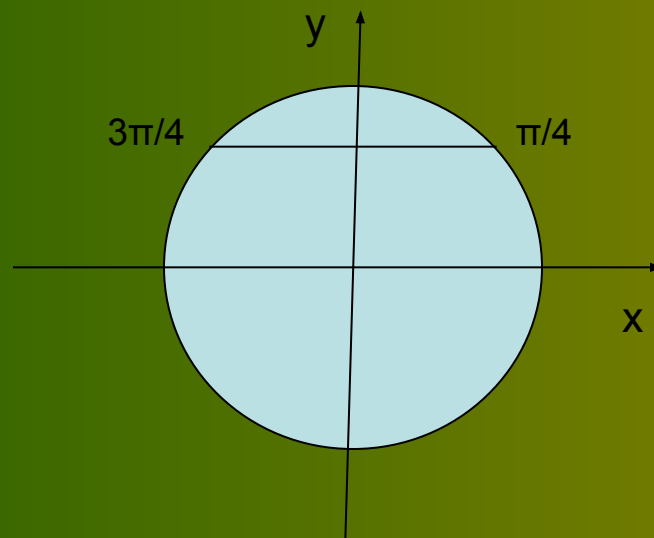
$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$$

распадается на два случая

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



7-способ

Возведение обеих частей уравнения в квадрат

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1^2$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1;$$

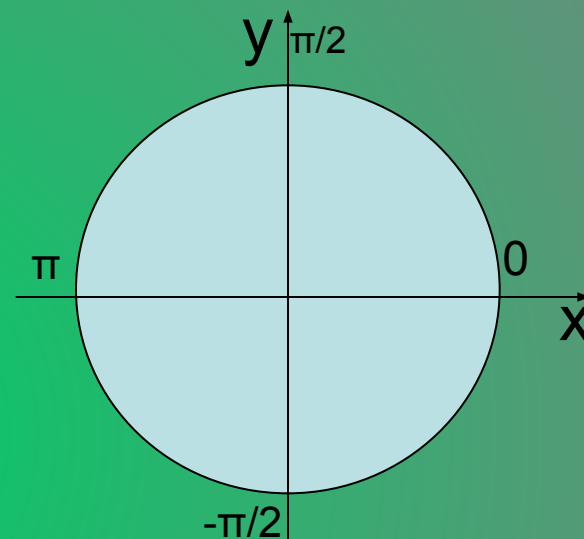
$$1 - \sin 2x = 1;$$

$$\sin 2x = 0;$$

$$2x = \pi k; x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$$

Полученное решение эквивалентно объединению четырех решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$



Проверка показывает, что первое и четвертое решения – посторонние.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

ВСЁ!

Точнее почти всё!

Осталось выбрать метод решения, победивший

- Самый простой; **в номинации:**
- Самый оригинальный;
- Самый неожиданный;
- Самый универсальный
- ...



**УДИВИТЕЛЬНОЕ И КРАСИВОЕ ВСЕГДА
РЯДОМ!**

ДЕРЗАЙТЕ!!!