Справочный материал

Знать

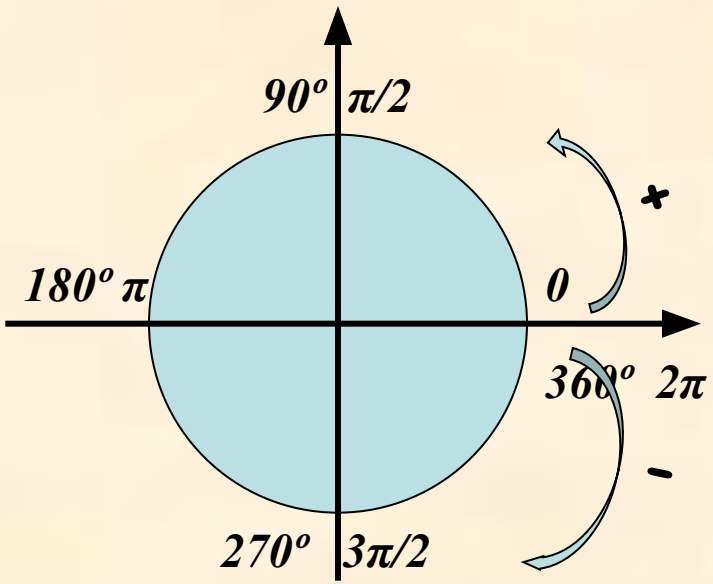
1. *Тригонометрический круг*
2. *Определение триг. функций*
3. *Значения триг. функций для диаметральных углов и табличных углов*
4. *Знаки по четвертям*
5. *Множество значений функций*
6. *Период*
7. *Четность, нечетность*
8. *Область определения*

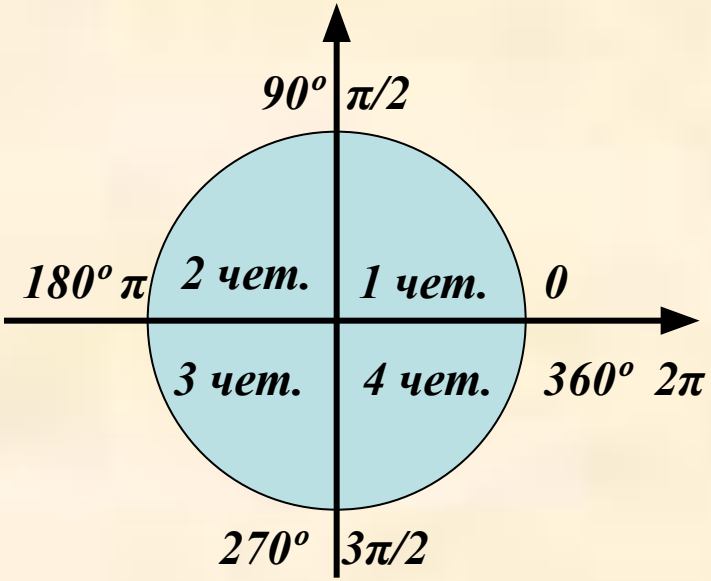
Уметь

- *Значения диаметральных углов через в радианах и градусах*
- *Четверти. Определять четверть, в которой находится угол*
- *Для диаметральных углов определять значения по триг. кругу*
- *Для табличных углов запомнить ряды для синуса и тангенса*
- *Уметь находить множество значений функции, выражения*
- *Уметь приводить угол в стандартный вид*

Щелкните по . Повторите

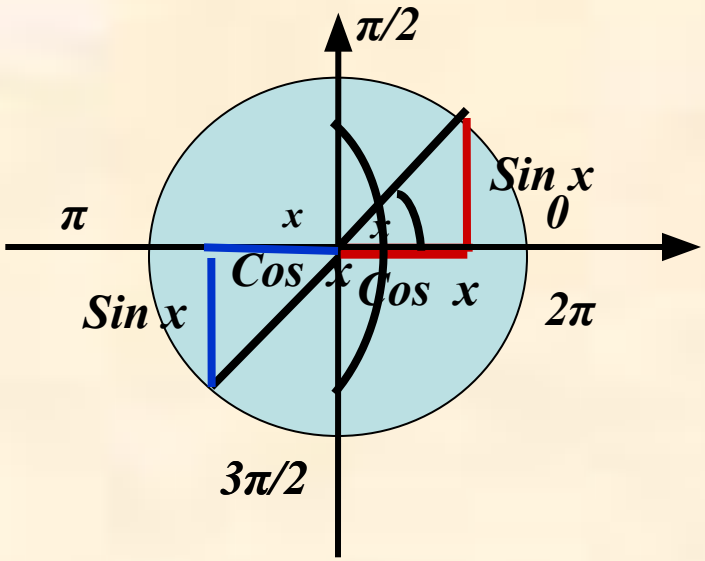
1. Тригонометрический круг





Помните! π = 180 °

2. Определение триг. функций



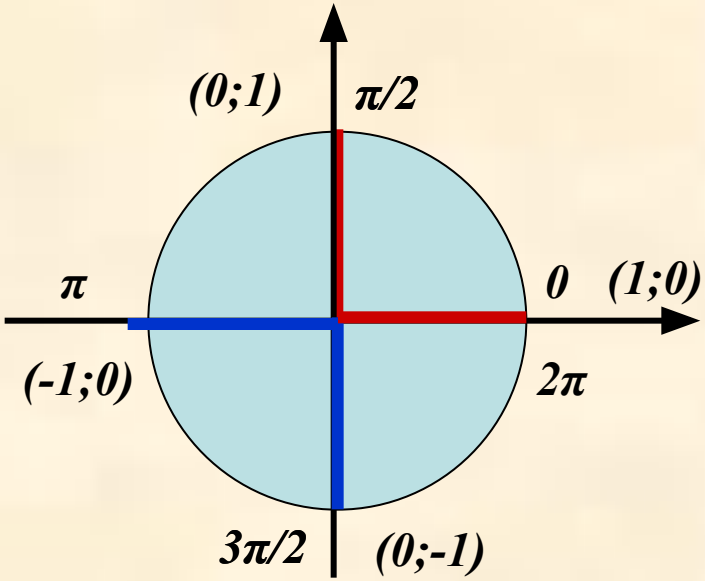
sin x – ордината (y)

cos x – абсцисса (x)

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Значения тригонометрических функций



	0	π/2	π	3π/2	2π
y	0	1	0	-1	0
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0
x	1	0	-1	0	1
tg	0	-	0	-	0
ctg	-	0	-	0	-

Красная линия - это плюс

Синяя – это минус

arc

Значения тригонометрических функций

Табличные значения

	π/6	π/4	π/3
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ряд синуса

π/6	π/4	π/3
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Для косинуса поменяйте крайние значения

π/6	π/4	π/3
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ряд тангенса

π/6	π/4	π/3
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Для котангенса поменяйте крайние значения

π/6	π/4	π/3
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Запомни!!

Справочный материал

Знать

4. Знаки по четвертям

Синус: знаки соответствуют знакам по оси У, косинус –по оси Х

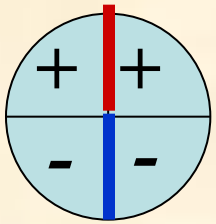
Тангенс и котангенс в 1 четв.- плюс, далее знаки чередуются

Уметь

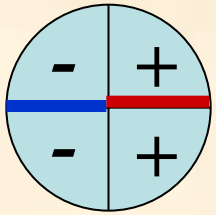
1. Определять четверть нахождения угла; 2. Определить знак функции.

$\sin 315^o < 0$, т.к угол 3 четв.
$tg 5\pi/6 < 0$, угол 2 четв.
$\cos^2 11\pi/4 > 0$, т.к Cos^2

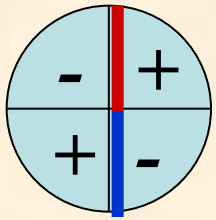
Sin



Cos



Tg, ctg



5. Множество значений функций

Уметь находить множество значений функции, выражения

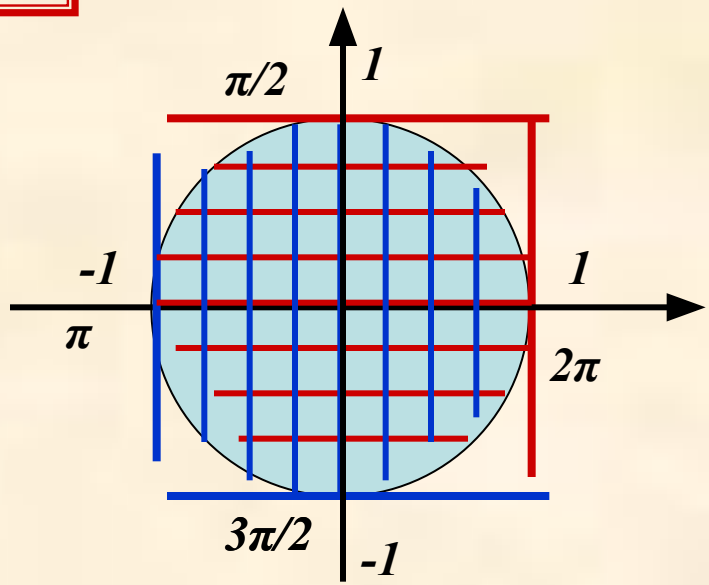
$-1 \le \sin x \le 1$, или $|\sin x| \le 1$,
$-1 \le \cos x \le 1$, или $|\cos x| \le 1$,

$tgx \in R$, $ctgx \in R$,

$y = 3 - 2\sin x$. $E(y) = (1;5)$
$\sin x = -1$, $y = 3+2 = 5$
$\sin x = 1$, $y = 3-2 = 1$

$|\sin x| \le 1$

$|\cos x| \le 1$



Период

Период – это число, при прибавлении которого к аргументу значение функции не изменяется.

$f(x+T) = f(x)$

Если T – период, то Tn для n Є Z тоже период. Считается T – наименьший период

Так как $f(x+Tn) = f(x)$, то Tn можно опустить

sin, cos $T = 2\pi$

tg, ctg $T = \pi$

Примеры

1. $\sin 390^o = \sin(360^o + 30^o) = \sin 30^o = ½$
2. $\sin 790^o = \sin(2\cdot 360^o + 30^o) = \sin 30^o = ½$
3. $tg\ 210^o = tg(180^o + 30^o) = tg\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\cos 7\pi/3 = \cos(2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = ½$
5. $\cos(2\pi - \beta) = \cos(-\beta) = \cos \beta$
6. $\sin(6\pi - 2\alpha) = \sin(-2\alpha) = -\sin 2\alpha$

Четность, нечетность

Синус, тангенс, котангенс – функции **нечетные.**

Минус у угла можно вынести за знак функции

Косинус – функция **четная.**

Минус у угла можно опустить

Примеры

1. $\sin(-x) = -\sin x$

2. $\sin(\pi/4 - x) = -\sin(x - \pi/4)$

3. $tg(-\pi/6) = -tg\ \pi/6 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\cos(-7\pi/3) = \cos 7\pi/3 = \cos(2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = ½$

5. $\cos(-\beta) = \cos \beta$

6. $ctg(2\alpha - \pi/2) = -ctg(\pi/2 - 2\alpha)$

Область определения

Синус, косинус

$D(y) = R$

Функции непрерывны на R

Тангенс

$D(y) = R,\ x \neq \pi/2 + \pi n$

$x = \pi/2 + \pi n$ – *вертикальная асимптота*

tgx – *определен при* $\cos x \neq 0$

Котангенс

$D(y) = R,\ x \neq \pi n$

$x = \pi n$ – *вертикальная асимптота*

$ctgx$ – *определен при* $\sin x \neq 0$

Тригонометрические формулы

1. Формулы одного аргумента

$$\sin^2\square + \cos^2\square = 1$$

$$\sin^2\square = 1 - \cos^2\square \quad \Rightarrow \quad \sin\square = \pm\sqrt{1-\cos^2\square}$$

$$\cos^2\square = 1 - \sin^2\square \quad \Rightarrow \quad \cos\square = \pm\sqrt{1-\sin^2\square}$$

$$tg\square = \frac{\sin\square}{\cos\square} \qquad ctg\square = \frac{\cos\square}{\sin\square} \quad \Rightarrow \quad tg\square\, ctg\square = 1$$

$$1 + tg^2\square = \frac{1}{\cos^2\square} \qquad 1 + ctg^2\square = \frac{1}{\sin^2\square}$$

Под □ понимается любой угол (x, 2x, α/2 и т. д.)

Тригонометрические формулы

2. Формулы сложения

Составьте формулы:

а) сначала поставьте знак;

б) поставьте трафарет, проговорите: «синус на косинус, косинус на косинус, синус на синус;

в) расставьте углы

sin (α ± β) = ☐ ☐ ☐

cos (α ± β) = ☐ ☐ ☐

tg (α ± β) = ☐

sin	cos	sin	cos
cos	cos	sin	sin
±	∓	α	α	α
α	β	β	β

β $\dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$

Запомните!

Для sin – синус на косинус, знак тот же;

Для cos – косинус на косинус, синус на синус, знак противоположный.

Тригонометрические формулы

3. Формулы двойного угла

Составьте формулы: *а) определите углы: (половина, двойной) ;*

б)используя формулы сложения, выведите формулы для угла (α + α);

в) составьте формулы

2α *двойной угол* _____

x _____

$\frac{\square}{2}$

$\frac{2\alpha}{2} = \alpha$ _____

$\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ *половина угол* _____

sin 2 $\square$ = $\square$

cos 2 $\square$ = $\square$

половина угла

двойной угол

2sin $\square$ cos $\square$

$\cos^2 \square - \sin^2 \square$

$\frac{2tg \square}{1 - tg^2 \square}$

Запомните!

Для sin – два, синус на косинус, ;

Для cos – косинус квадрат минус синус квадрат.

Угол справа в два раза ***меньше***

Тренинг

1. Найдите половину угла:

Угол	Половина угла
4β	2β
$2x$	x
60°	30°
$2x - \pi/4$	$x - \pi/8$

2. Примените формулу двойного угла

$\sin x =$

$\cos x =$

$\sin 2\beta = 2\ 2\sin \qquad \cos$

$\cos 4x = \cos^2 \qquad - \sin^2$

$\sin x \cos x =$

$\sin^2 x - \cos^2 x =$

$8\beta \quad 2\beta \quad x \quad 4x \quad 30^o \quad x - \pi/8$

$120^o \quad x - \pi/4$

$\boxed{2\sin x/2 \cos x/2}$

$\boxed{2\sin 2x \cos 2x}$

$2\beta \quad \beta \quad \beta$

$\boxed{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$

$2x \quad 8x \quad 2x$

$\boxed{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}$

$8x \quad \frac{\sin 2x}{2}$

$2\sin 2x \qquad \cos x/2 \qquad - \cos 2x$

Помните! Если в выражении встречается sinxcosx, примените формулу двойного угла синуса $\frac{\sin 2x}{2}$

Тригонометрические формулы

2. Формулы половинного угла. (понижения степени)

Запомните!

Для sin ^{2} –единица **минус** *cos ;*

Для cos ^{2} – единица **плюс** *cos;*

Угол справа в два раза **больше**

$\sin^2 \square = \dfrac{\quad}{2}$

$\cos^2 \square = \dfrac{\quad}{2}$

$\mathrm{tg}^2 \square = \dfrac{\quad}{\quad}$

$1 \quad \cos 2\square \qquad 1 \quad \cos 2\square$

$- \qquad\qquad + \qquad\qquad$

$1 - \cos 2\square \qquad 1 + \cos 2\square$

Тригонометрические формулы

4. Формулы перевода суммы в произведение

Составьте формулы: *а) для синуса и косинуса запишите 2 и - 2;*

б) запишите трафарет ;

в) расставьте полу сумму углов, полу разность

г) составьте формулу для тангенса: синус, деленный на косинус

$\sin\alpha + \sin\beta = 2$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2$

2	2	2	2	-
sin		cos	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$
sin		cos	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$
cos		cos	$\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$
sin		sin	$\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Запомните!

Для sin – sin на cos ;

Для cos – cos на cos или sin на sin ;

***Полу сумма , полу разность** углов*

Тригонометрические формулы

4. Формулы перевода произведения в сумму

Составьте формулы: а) для синуса и косинуса запишите ½ ;

б) запишите трафарет ;

в) Расставьте знаки между функциями

г) расставьте разность и сумму углов

$\sin\alpha \cos\beta =$

$\cos\alpha \cos\beta =$

$\sin\alpha \sin\beta =$

½	½	½
(sin	cos	)
(cos	cos	)
(cos	cos	)
(α – β)	(α – β)	(α – β)
(α + β)	(α + β)	(α + β)
+	+	-

Преобразование выражений

Алгоритм преобразования

1. Привести углы в стандартный вид

Угол с минусом преобразовать:

нечетная – вынести, четная поменять знак.

Формулы приведения

2. Алгебраические преобразования

Подобные;

Разложение на множители;

Раскрытие скобок;

ФСУ;

Действия с дробями;

Другие

Преобразование выражений
Алгоритм преобразования

Çàâåðøè
èàç. Ñîîòðè çäåñ

3. Тригонометрические преобразования

3.1 По углу

- ***Углы динаковые – формулы одного угла***
- ***Углы разнятся в два раза – формулы двойного или половинного угла***
- ***Углы разные – формулы сложения, перевода суммы в произведение и наоборот***

3.2 По функции

- ***Приведение к функциям sin и cos***
- ***Приведение к одной функции – формулы приведения, половинного угла, одного аргумента***
- ***Приведение к функции tg – формулы универсальной замены***

Преобразование выражений
Тренинг

1) Найдите $13\cos\alpha + 1$, если $\sin\alpha = 5/13$, $\pi/2 \le \alpha \le \pi$

2) Упростить выражение $1 - \operatorname{tg} x \sin x \cos x$

3) Упростите выражение $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \cos^2\alpha)$

4) Найдите значение дроби $\dfrac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$

5) Вычислите $\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$

6) Упростите выражение $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2 - 2\sin^2\alpha}$

7) Упростите выражение $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$

Преобразование выражений

1)Найдите 13 cos α + 1, если sin α = 5/13 , π/2 ≤ α ≤ π

Чтобы найти значение 13 cos α + 1, надо узнать cos α .

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Так как α принадлежит второй четверти, то cos α < 0, следовательно,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-25/169} = -12/13$$

13 cos α + 1 = 13·(- 12/13) + 1 = - 11

2. Упростить выражение 1 + tg x sin x cos x

Заменить tg x на $\frac{\sin x}{\cos x}$ → Тригонометрия

Получим: 1 - $\frac{\sin x \sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}$ = *1 - sin* ^{2}*x = cos* ^{2}*x*

Алгебра

Тригонометрия

3) Упростите выражение $(1 + tg^2\alpha)(1 - cos^2\alpha)$

Алгебра отсутствует

Тригонометрия

Используем формулы:

$$1 + tg^2\alpha = 1/cos^2\alpha$$

$$1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$$

$$(1 + tg^2\alpha)(1 - cos^2\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = ctg^2\alpha$$

4) Найдите значение дроби $\dfrac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$

Алгебра отсутствует
Тригонометрия

Используем формулы:

Sinα cos β + Sinβ cos α = sin (α+β)

sinα cos α = ½ sin 2α

$$\frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin(32^\circ + 28^\circ)}{1/2 \sin 30^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Подставим значения:

$$\frac{2\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/2}{1/2} = 2\sqrt{3}$$

5)Вычислите $\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$

Алгебра

Сложим дроби:

cos 15° sin15°

$$\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} =$$

Тригонометрия

Используем формулы:

$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

$\sin\alpha \cos \alpha = ½ \sin 2\alpha$

$$= \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2ctg30^\circ = 2\sqrt{3}$$

6) Упростите выражение $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2 - 2\sin^2\alpha}$

Алгебра отсутствует
Тригонометрия

Углы разнятся в два раза.

Применим формулы двойного угла косинуса и основное тригонометрическое тождество

cos 2α = cos² α - sin² α

sin² α + cos² α = 1

$$\frac{\cos 2\alpha + 1}{2 - 2\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha}}{\cancel{2\sin^2\alpha} + 2\cos^2\alpha - \cancel{2\sin^2\alpha}} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = 1$$

7) Упростите выражение $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$

Алгебра

Применим разность квадратов

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

Тригонометрия

Используем формулы:

$$\boxed{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = -\cos 2\alpha$$

Справочный материал

Обратные тригонометрические функции

Знать	Уметь
1. Определение обратных тригонометрических функций	***Вычислять значения выражений*** ***Находить угол и все множество углов***
2. Обратные тригонометрические функции от отрицательных значений	***Вычислять арки от отрицательных значений***
3. Значения триг. функций для диаметральных углов и табличных углов	***Для диаметральных углов определять значения по триг. кругу*** ***Для табличных углов запомнить ряды для синуса и тангенса***

arc... – это угол

$\arcsin a = \varphi$, $\sin \varphi = a$. $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$

$\arccos a = \varphi$, $\cos \varphi = a$. $0 \le \varphi \le \pi$

$\operatorname{arctg} a = \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = a$. $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

$\operatorname{arcctg} a = \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi = a$. $0 < \varphi < \pi$

Запомни!

Считая a > 0,

Для sin и tg	*Для cos и ctg*
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$	$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$
Минус вынести	*Пи минус арк*

Справочный материал

Решение тригонометрических уравнений

Знать	Уметь
1. Решение простейших уравн.	Решать уравнения по окружности Находить угол и все множество углов
2. Решение простых уравн.	Записывать решения для каждой функции
3. Алгоритм решения	Приводить угол в стандартный вид; Находить чистую функцию; Записывать решения
4. Виды уравнений и их решение	Определять вид уравнения
5. Алгоритм поиска решений	Применять пункты алгоритма к преобразованию выражений Определять вид уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

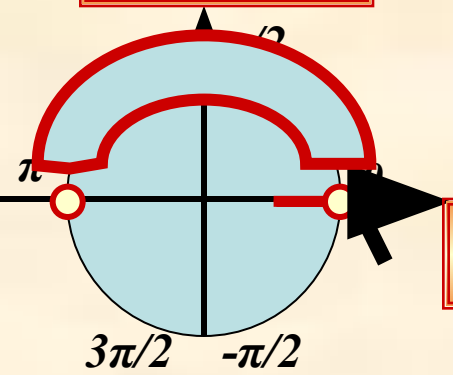
К простейшим относятся уравнения вида: синус, косинус равны 0, ±1;

тангенс, котангенс равны 0

Решаются по окружности

Уравнения sinx = 0, ± 1

$\sin x = 0$

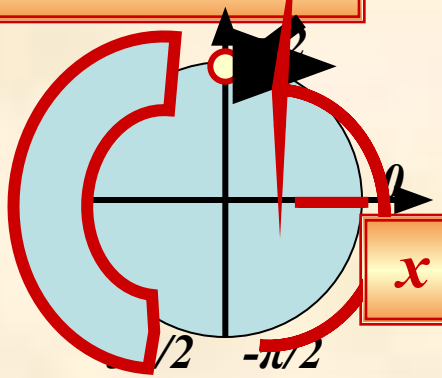


$x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$

Придем в следующий «нуль» через пол оборота

$\sin x = 1$

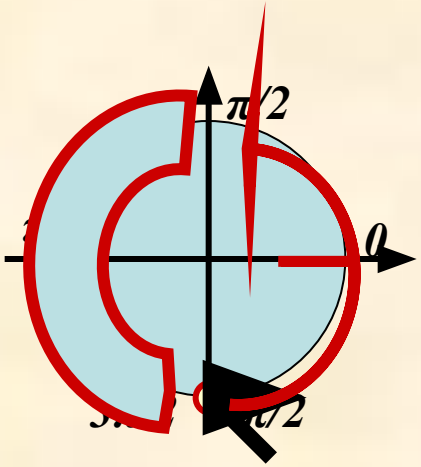


$x = \pi/2$

$x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Придем в единицу через целый оборот

$\sin x = -1$



$x = -\pi/2$

$x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Простейшие тригонометрические уравнения

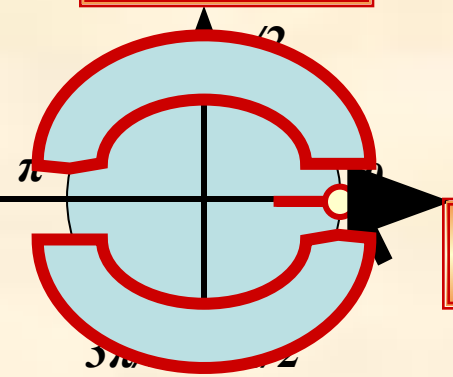
К простейшим относятся уравнения вида: синус, косинус равны 0, ±1;

тангенс, котангенс равны 0

Решаются по окружности

Уравнения cosx = 0, ± 1

$cosx = 1$

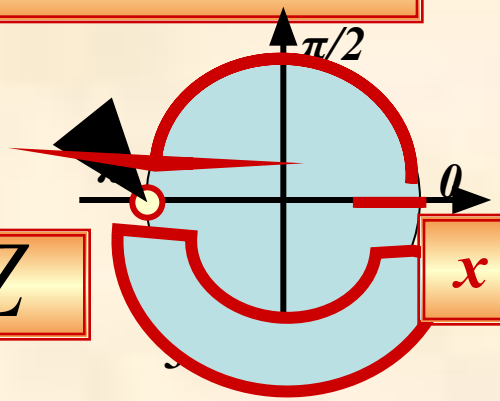


$x = 0$

$x = 2\pi n,\ n \in Z$

Придем в следующую 1 через целый оборот

$cosx = -1$

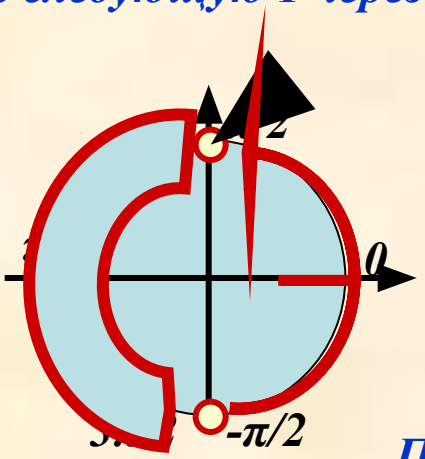


$x = \pi$

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Придем в единицу через целый оборот

$cosx = 0$



$x = \pi/2$

$x = -\pi/2 + \pi n,\ n \in Z$

Придем в 0 через пол оборота

Тригонометрические уравнения

Запомни!

Для уравнения sinx =a

Для уравнения cosx = a

Минус единица в степени...

Плюс, минус …

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, где $n \in Z$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n$, где $n \in Z$

Для уравнений tgx =a, ctgx = a

арктангенс

арккотангенс

Для уравнений sinx= a, tgx =a, ctgx = a

$+ \pi n$

Для уравнения cosx = a

$+2\pi n$

Запомни!

Считая a < 0,

Для уравнения sinx =a

Минус единица в степени n +1…

$x = (-1)^{n+1} \arcsin|a| + \pi n$, где $n \in Z$

Для уравнения cosx = a

Плюс, минус, скобка, *пи минус…*

$x = \pm (\pi - \arccos|a|) + 2\pi n$, где $n \in Z$

Для уравнений tgx =a, ctgx = a

минус арктангенс

$x = -\operatorname{arctg}|a| + \pi n$, где $n \in Z$

пи минус арккотангенс

$x = \pi - \operatorname{arcctg}|a| + \pi n$, где $n \in Z$

Алгоритм решения

1. Угол - в стандартный вид;

X должен быть с плюсом

Знак

Приведение к острому углу

2. «Очистить» функцию;

Привести к виду синус, косинус, тангенс, котангенс равны …

3. Определить какое уравнение, решить ;

= 0,±1
Решать по окружности

= a
Решать по формулам

Уравнение синуса – минус 1 в степени n (a>0), минус 1 в степени n + 1 (a<0),

Уравнение косинуса – ± arc (a>0), ± (π – arc) (a<0),

Уравнения tg, ctg решать по формулам

Для sin, , tg, ctg прибавлять πn; для cos - 2πn

Тренинг

1. Решите уравнения, отвечая на вопросы:

	$\sin x = ½$	$\cos x = ½$	$tg x = \sqrt{3}$
Что это?			
Как это?			
Что прибавляется?			
x =			

Уравнение sin ***Уравнение tg*** πn πn $2\pi n$

Уравнение cos $\pm \arccos\ldots$ πn $(-1)^n \arcsin\ldots$ $2\pi n$

arctg… $x = (-1)^n \arcsin ½ + \pi n$

$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$

$x = \pm \arccos ½ + 2\pi n$

$x = \pm \pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = arctg \sqrt{3} + \pi n$

$x = \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$

Тренинг

1. Решите уравнения, отвечая на вопросы:

	$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$	$ctg x = -\sqrt{3}$
Что это?			
Как это?			
Что прибавляется?			
$x =$			

Уравнение sin *Уравнение ctg* πn πn $2\pi n$

Уравнение cos $\pm(\pi - \arccos\ldots)$ $(-1)^{n+1}\arcsin\ldots$ πn $2\pi n$

$\pi - arcctg\ldots$

$x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n,$

$n \in Z$

$x = \pm(\pi - \pi/3) + 2\pi n,$

$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pi - \pi/3 + \pi n,\ n \in Z$

$x = 2\pi/3 + \pi n$