Справочный материал

Знать

1. *Тригонометрический круг*

2. *Определение триг. функций*

3. *Значения триг. функций для диаметральных углов и та[illegible]чных углов*

4. *Знаки по четвертям*

5. *Множество значений функций*

6. *Период*

7. *Четность, нечетность*

8. *Область определения*

Уметь

Значения диаметральных углов через в радианах и градусах

Четверти. Определять четверть, в которой находится угол

Для диаметральных углов определять значения по триг. кругу

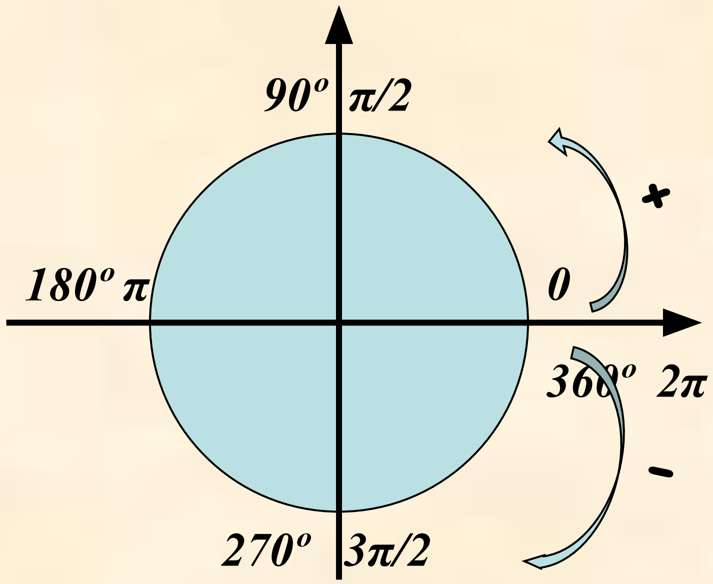
Для табличных углов запомнить ряды для синуса и тангенса

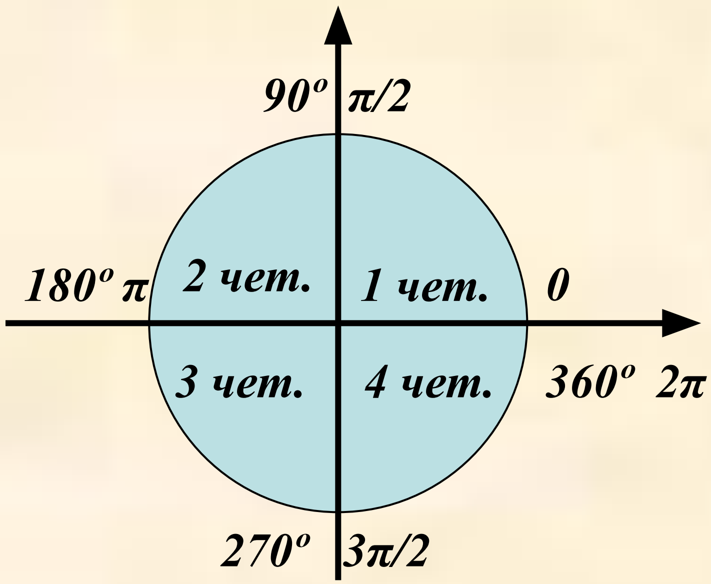
Уметь находить множество значений функции, выражения

Уметь приводить угол в стандартный вид

Щелкните по . Повторите

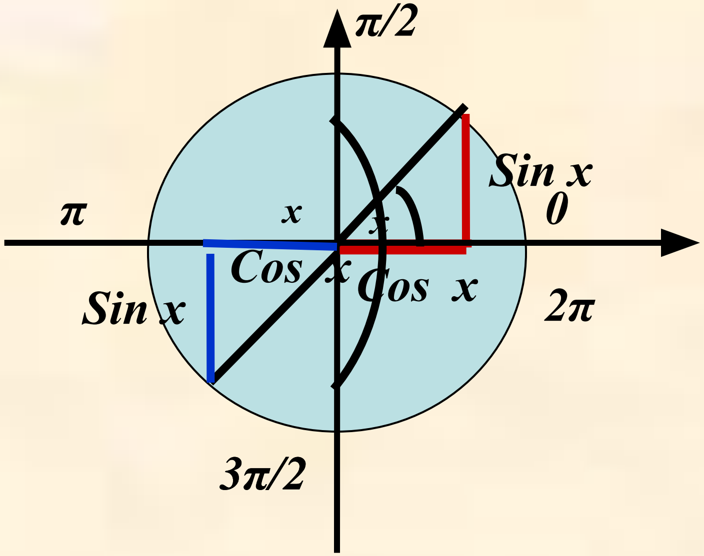
1. Тригонометрический круг





Помните! π = 180 °

2. Определение триг. функций



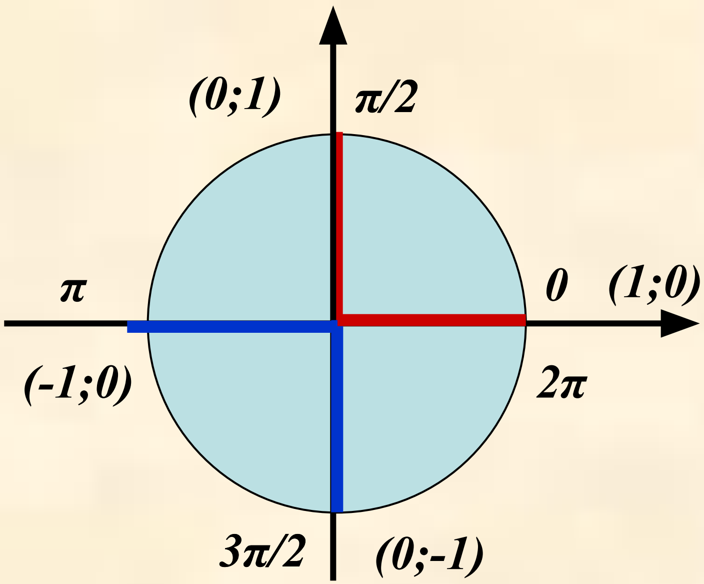
sin x – ордината (y)

cos x – абсцисса (x)

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Значения тригонометрических функций



	0	π/2	π	3π/2	2π
y	0	1	0	-1	0
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0
x	1	0	-1	0	1
tg	0	-	0	-	0
ctg	-	0	-	0	-

***Красная линия** - это плюс*

***Синяя** – это минус*

arc

Значения тригонометрических функций

Табличные значения

Ряд синуса

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Запомни!!

Для косинуса поменяйте крайние значения

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ряд тангенса

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Для котангенса поменяйте крайние значения

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Справочный материал

Знать

Уметь

4. Знаки по четвертям

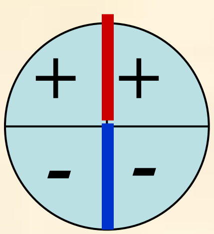
1. Определять четверть нахождения угла; 2. Определить знак функции.

Синус: знаки соответствуют знакам по оси У, косинус –по оси Х

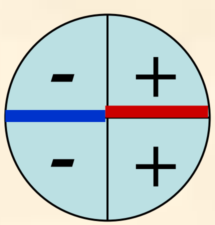
Тангенс и котангенс в 1 четв.- плюс, далее знаки чередуются

$\sin 315^o < 0$, т.к угол 3 четв.
$tg 5\pi/6 < 0$, угол 2 четв.
$\cos^2 11\pi/4 > 0$, т.к Cos^2

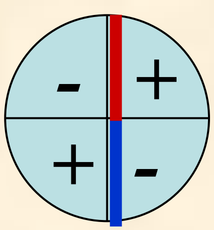
Sin



Cos



Tg, ctg



5. Множество значений функций

Уметь находить множество значений функции, выражения

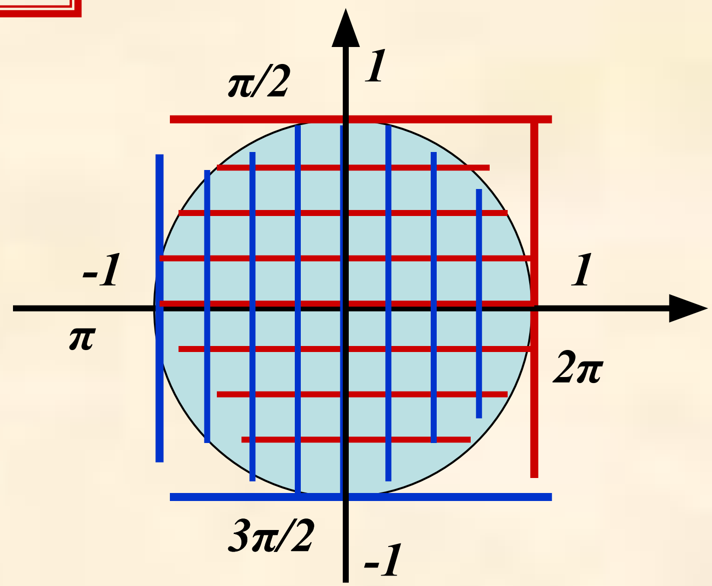
-1 ≤ sin x ≤ 1, или |sinx | ≤ 1,
-1 ≤ cos x ≤ 1, или |cosx | ≤ 1,

tgx € R, ctgx € R,

y = 3 -2sinx. E(y) = (1;5)
sinx = -1, y = 3+2 = 5
sinx = 1, y = 3-2 = 1

|sinx | ≤ 1

|cosx | ≤ 1



Период

Период *– это число, при прибавлении которого к аргументу значение функции не изменяется.*

$f(x+T) = f(x)$

Если T – период, то Tn для n € Z тоже период. Считается T – наименьший период

Так как $f(x+Tn) = f(x)$, то Tn можно опустить

sin, cos $T = 2\pi$

tg, ctg $T = \pi$

Примеры

1. $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
2. $\sin 790^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
3. $\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\cos 7\pi/3 = \cos(2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$
5. $\cos(2\pi - \beta) = \cos(-\beta) = \cos\beta$
6. $\sin(6\pi - 2\alpha) = \sin(-2\alpha) = -\sin 2\alpha$

Четность, нечетность

Синус, тангенс, котангенс – функции **нечетные.**

Минус у угла можно вынести за знак функции

Косинус – функция **четная.**

Минус у угла можно опустить

Примеры

1. $\sin(-x) = -\sin x$

2. $\sin(\pi/4 - x) = -\sin(x - \pi/4)$

3. $\mathrm{tg}(-\pi/6) = -\mathrm{tg}\,\pi/6 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\cos(-7\pi/3) = \cos 7\pi/3 = \cos(2\pi + \pi/3) = \cos \pi/3 = ½$

5. $\cos(-\beta) = \cos \beta$

6. $\mathrm{ctg}(2\alpha - \pi/2) = -\mathrm{ctg}(\pi/2 - 2\alpha)$

Область определения

Синус, косинус

D(y) = R

Функции непрерывны на R

Тангенс

D(y) = R, $x \neq \pi/2 + \pi n$

$x = \pi/2 + \pi n$ – вертикальная асимптота

tgx – определен при $\cos x \neq 0$

Котангенс

D(y) = R, $x \neq \pi n$

$x = \pi n$ – вертикальная асимптота

ctgx – определен при $\sin x \neq 0$

Тригонометрические формулы

1. Формулы одного аргумента

$\sin^2\square + \cos^2\square = 1$

$\sin^2\square = 1 - \cos^2\square$

$$\sin\square = \pm\sqrt{1 - \cos^2\square}$$

$\cos^2\square = 1 - \sin^2\square$

$$\cos\square = \pm\sqrt{1 - \sin^2\square}$$

$$tg\,\square = \frac{\sin\square}{\cos\square}$$

$$ctg\,\square = \frac{\cos\square}{\sin\square}$$

$$tg\,\square\,\mathrm{ctg}\,\square = 1$$

$$1 + tg^2\square = \frac{1}{\cos^2\square}$$

$$1 + ctg^2\square = \frac{1}{\sin^2\square}$$

Под □ понимается любой угол (х, 2х, α/2 и т. д.)

Тригонометрические формулы

2. Формулы сложения

Составьте формулы:

а) сначала поставьте знак;

б) поставьте трафарет, проговорите: «синус на косинус, косинус на косинус, синус на синус;

в) расставьте углы

sin (α ± β) =

cos (α ± β) =

tg (α ± β) =

sin cos sin cos

cos cos sin sin

± ∓ α α α

α β β β

β $\frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$

Запомните!

*Для **sin** – синус на косинус, знак тот же;*

*Для **cos** – косинус на косинус, синус на синус, знак противоположный.*

Тригонометрические формулы

3. Формулы двойного угла

Составьте формулы: ***а) определите углы: (половина, двойной) ;***

б)используя формулы сложения, выведите формулы для угла (α + α);

в) составьте формулы

2α ***двойной угол***

x

$\frac{\square}{2}$

$\frac{2\alpha}{2} = \alpha$

$\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ ***половина угол***

$\sin 2\square = \square$

$\cos 2\square = \square$

tg

Запомните!

Для sin – два, синус на косинус, ;

Для cos – косинус квадрат минус синус квадрат.

Угол справа в два раза меньше

половина угла

двойной угол

$2\sin\square\cos\square$

$\cos^2\square - \sin^2\square$

$$\frac{2tg\square}{1-tg^2\square}$$

Тренинг

1. Найдите половину угла:

Угол	*Половина угла*
4β	2β
$2x$	x
60^o	30^o
$2x - \pi/4$	$x - \pi/8$

2. Примените формулу двойного угла

$\sin x =$

$\cos x =$

$\sin 2\beta = 2$ $2\sin$ $\cos$

$\cos 4x = \cos^2$ $- \sin^2$

$\sin x \cos x =$

$\sin^2 x - \cos^2 x =$

8β 2β x $4x$ 30^o $x - \pi/8$

120^o $x - \pi/4$ $\boxed{2\sin x/2 \cos x/2}$

$\boxed{2\sin 2x \cos 2x}$ 2β β β

$\boxed{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$ $2x$ $8x$ $2x$

$\boxed{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}$ $8x$ $\frac{\sin 2x}{2}$

$2\sin 2x$ $\cos x/2$ $-\cos 2x$

Помните! Если в выражении встречается sinxcosx, примените формулу двойного угла синуса $\frac{\sin 2x}{2}$

Тригонометрические формулы

2. Формулы половинного угла. (понижения степени)

Запомните!

Для *sin* ^{2} *−единица* **минус** *cos ;*

Для *cos* ^{2} *− единица* **плюс** *cos;*

Угол справа в два раза **больше**

$$\sin^2 \square = \frac{\qquad}{2}$$

$$\cos^2 \square = \frac{\qquad}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2 \square = \frac{\qquad}{\qquad}$$

1 cos 2$\square$ 1 cos 2$\square$

- +

1 - cos 2$\square$ 1 + cos 2$\square$

Тригонометрические формулы

4. Формулы перевода суммы в произведение

Составьте формулы: ***а) для синуса и косинуса запишите 2 и - 2;***

б) запишите трафарет ;

в) расставьте полу сумму углов, полу разность

г) составьте формулу для тангенса: синус, деленный на косинус

$\sin\alpha + \sin\beta =$ 2

$\sin\alpha - \sin\beta =$ 2

$\cos\alpha + \cos\beta =$ 2

$\cos\alpha - \cos\beta =$ -2

2 2	2 2 -		
sin	cos	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$
sin	cos	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$
cos	cos	$\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$
sin	sin	$\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Запомните!

Для sin – sin на cos ;

Для cos – cos на cos или sin на sin ;

Полу сумма , полу разность *углов*

Тригонометрические формулы

4. Формулы перевода произведения в сумму

Составьте формулы: *а) для синуса и косинуса запишите ½ ;*

б) запишите трафарет ;

в) Расставьте знаки между функциями

г) расставьте разность и сумму углов

$\sin \alpha \cos \beta =$

$\cos \alpha \cos \beta =$

$\sin \alpha \sin \beta =$

½ ½ ½

(sin cos)

(cos cos)

(cos cos)

$(\alpha - \beta)$ $(\alpha - \beta)$ $(\alpha - \beta)$

$(\alpha + \beta)$ $(\alpha + \beta)$ $(\alpha + \beta)$

\+ + -

Преобразование выражений

Алгоритм преобразования

1. Привести углы в стандартный вид

- ***Угол с минусом преобразовать:***
  нечетная – вынести, четная поменять знак.
- ***Формулы приведения***

2. Алгебраические преобразования

- ***Подобные;***
- ***Разложение на множители;***
- ***Раскрытие скобок;***
- ***ФСУ;***
- ***Действия с дробями;***
- ***Другие***

Преобразование выражений

Алгоритм преобразования

Çàâåðøè
èàç. Ñïîòðè çäåñ

3. Тригонометрические преобразования

3.1 По углу

- *Углы динаковые – формулы одного угла*
- *Углы разнятся в два раза – формулы двойного или половинного угла*
- *Углы разные – формулы сложения, перевода суммы в произведение и наоборот*

3.2 По функции

- *Приведение к функциям sin и cos*
- *Приведение к одной функции – формулы приведения, половинного угла, одного аргумента*
- *Приведение к функции tg – формулы универсальной замены*

Преобразование выражений

Тренинг

1) *Найдите 13 cos α + 1, если sin α = 5/13 , π/2 ≤ α ≤ π*

2) **Упростить выражение 1 - tg x sin x cos x**

3) **Упростите выражение** $(1 + tg^{2}\alpha)(1 - \cos^{2}\alpha)$

4) **Найдите значение дроби** $\dfrac{\sin 32^{\circ}\cos 28^{\circ} + \cos 32^{\circ}\sin 28^{\circ}}{\sin 15^{\circ}\cos 15^{\circ}}$

5) **Вычислите** $\dfrac{\cos 15^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} - \dfrac{\sin 15^{\circ}}{\cos 15^{\circ}}$

6) **Упростите выражение** $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2 - 2\sin^{2}\alpha}$

7) **Упростите выражение** $\sin^{4}\alpha - \cos^{4}\alpha$

Преобразование выражений

1)Найдите 13 cos α + 1, если sin α = 5/13 , π/2 ≤ α ≤ π

Чтобы найти значение 13 cos α + 1, надо узнать cos α .

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Так как α принадлежит второй четверти, то cos α < 0, следовательно,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-25/169} = -12/13$$

13 cos α + 1 = 13·(- 12/13) + 1 = - 11

2. Упростить выражение 1 + tg x sin x cos x

Заменить tg x на $\frac{\sin x}{\cos x}$ → **Тригонометрия**

Получим: 1 - $\frac{\sin x \sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}$ = *1 - sin* ^2x *= cos* ^2x

Алгебра **Тригонометрия**

3) Упростите выражение $(1 + tg^2\alpha)(1 - \cos^2\alpha)$

Алгебра отсутствует

Тригонометрия

Используем формулы:

$\boxed{1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha}$

$\boxed{1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha}$

$$(1 + tg^2\alpha)(1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = ctg^2\alpha$$

4) Найдите значение дроби $\dfrac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$

Алгебра отсутствует

Тригонометрия

Используем формулы:

Sinα cos β + Sinβ cos α = sin (α+β)

sinα cos α = ½ sin 2α

$$\frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin(32^\circ + 28^\circ)}{1/2 \sin 30^\circ} = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Подставим значения: $\dfrac{2 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}/2}{1/2} = 2\sqrt{3}$

5)Вычислите $\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$

Алгебра

Сложим дроби:

$$\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} =$$

$\cos 15^\circ$ $\sin 15^\circ$

Тригонометрия

Используем формулы:

$\boxed{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha}$

$\boxed{\sin\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$

$$= \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2ctg 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

6) Упростите выражение $\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2 - 2\sin^2\alpha}$

Алгебра отсутствует

Тригонометрия

Углы разнятся в два раза.

Применим формулы двойного угла косинуса и основное тригонометрическое тождество

cos 2α = cos² α - sin² α
sin² α + cos² α = 1

$$\frac{\cos 2\alpha + 1}{2 - 2\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha}}{\cancel{2\sin^2\alpha} + 2\cos^2\alpha - \cancel{2\sin^2\alpha}} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = 1$$

7) *Упростите выражение* $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$

Алгебра

Применим разность квадратов

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

Тригонометрия

Используем формулы:

$$\boxed{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = -\cos 2\alpha$$

Справочный материал

Обратные тригонометрические функции

Знать	Уметь
1. Определение обратных тригонометрических функций	*Вычислять значения выражений* *Находить угол и все множество углов*
2. Обратные тригонометрические функции от отрицательных значений	*Вычислять арки от отрицательных значений*
3. Значения триг. функций для диаметральных углов и табличных углов	*Для диаметральных углов определять значения по триг. кругу* *Для табличных углов запомнить ряды для синуса и тангенса*

Запомни!

arc... - это угол

$\arcsin a = \varphi$, $\sin \varphi = a$. $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$

$\arccos a = \varphi$, $\cos \varphi = a$. $0 \le \varphi \le \pi$

$\mathrm{arctg}\, a = \varphi$, $\mathrm{tg}\, \varphi = a$. $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$

$\mathrm{arcctg}\, a = \varphi$, $\mathrm{ctg}\, \varphi = a$. $0 < \varphi < \pi$

Запомни!

Считая a > 0,

Для sin и tg

arcsin(- a) = - arcsin a

arctg(- a) = - arctg a

Минус вынести

Для cos и ctg

arccos(- a) = π - arccos a

arcctg(- a) = π - arcctg a

Пи минус арк

Справочный материал

Решение тригонометрических уравнений

Знать

1. Решение простейших уравн.

2. Решение простых уравн.

3. Алгоритм решения

4. Виды уравнений и их решение

5. Алгоритм поиска решений

Уметь

Решать уравнения по окружности

Находить угол и все множество углов

Записывать решения для каждой функции

Приводить угол в стандартный вид;

Находить чистую функцию;

Записывать решения

Определять вид уравнения

Применять пункты алгоритма к преобразованию выражений

Определять вид уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

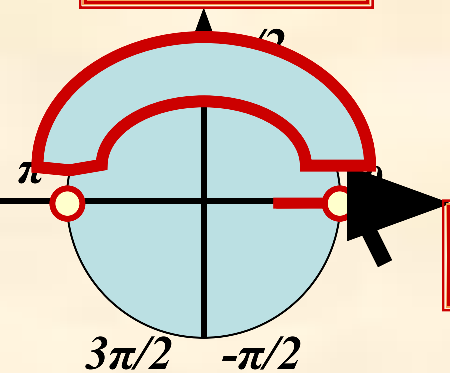
К простейшим относятся уравнения вида: синус, косинус равны 0, ±1;

тангенс, котангенс равны 0

Решаются по окружности

Уравнения $\sin x = 0, \pm 1$

$\sin x = 0$

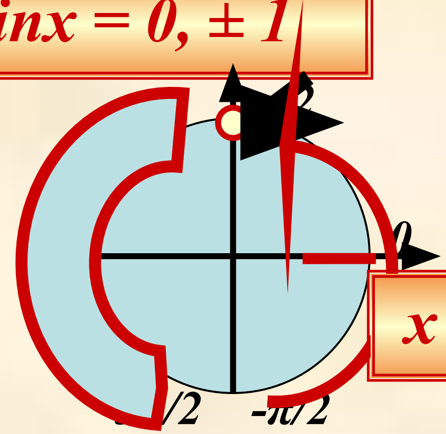


$x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$

Придем в следующий «нуль» через пол оборота

$\sin x = 1$

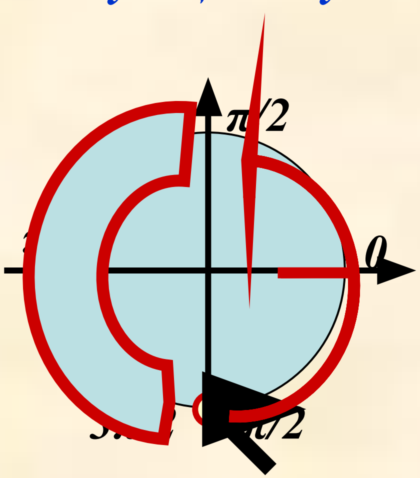


$x = \pi/2$

$x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Придем в единицу через целый оборот

$\sin x = -1$



$x = -\pi/2$

$x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Простейшие тригонометрические уравнения

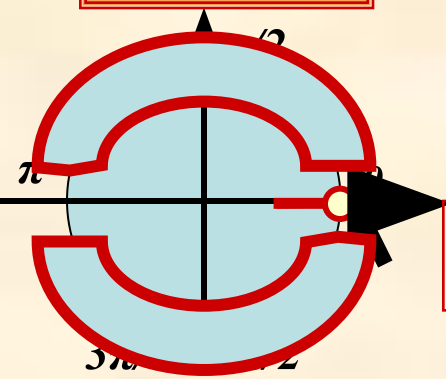
К простейшим относятся уравнения вида: синус, косинус равны 0, ±1;

тангенс, котангенс равны 0

Решаются по окружности

Уравнения cosx = 0, ± 1

cosx = 1



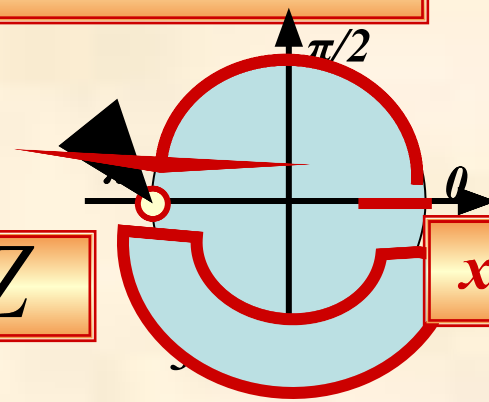
x = 0

x = 2πn, n ∈ Z

Придем в следующую 1 через целый оборот

cosx = -1

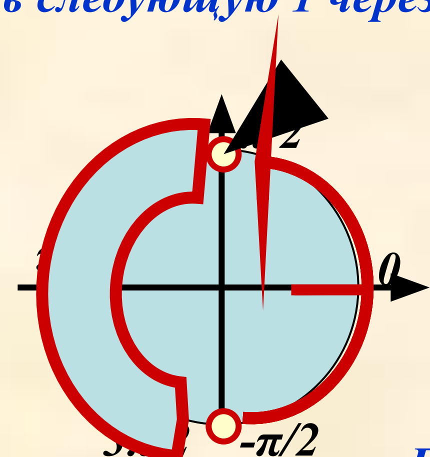
x = π



x = π +2πn, n ∈ Z

Придем в единицу через целый оборот

cosx = 0



x = π/2

x = - π/2 +πn, n ∈ Z

Придем в 0 через пол оборота

Тригонометрические уравнения

Запомни!

Для уравнения sinx =a

Для уравнения cosx = a

Минус единица в степени...

Плюс, минус …

$x = (-1)^n$ arcsin$a + \pi n$, где $n \in Z$

$x = \pm$ arccos$a + 2\pi n$, где $n \in Z$

Для уравнений tgx =a, ctgx = a

арктангенс

арккотангенс

Для уравнений sinx= a, tgx =a, ctgx = a

$+ \pi n$

Для уравнения cosx = a

$+2\pi n$

Запомни!

Считая a < 0,

Для уравнения sinx =a

Минус единица в степени n +1…

$x = (-1)^{n+1} \arcsin|a| + \pi n$, где $n \in Z$

Для уравнения cosx = a

Плюс, минус, скобка, *пи минус…*

$x = \pm (\pi - \arccos|a|) + 2\pi n$, где $n \in Z$

Для уравнений tgx =a, ctgx = a

минус арктангенс

$x = - \operatorname{arctg}|a| + \pi n$, где $n \in Z$

пи минус арккотангенс

$x = \pi - \operatorname{arcctg}|a| + \pi n$, где $n \in Z$

Алгоритм решения

1. Угол - в стандартный вид;

X должен быть с плюсом

Знак

Приведение к острому углу

2. «Очистить» функцию;

Привести к виду синус, косинус, тангенс, котангенс равны …

3. Определить какое уравнение, решить ;

= 0,±1
Решать по окружности

= a
Решать по формулам

Уравнение синуса – минус 1 в степени n (a>0), минус 1 в степени n + 1 (a<0),

Уравнение косинуса – ± arc (a>0), ± (π – arc) (a<0),

Уравнения tg, ctg решать по формулам

Для sin, , tg, ctg прибавлять πn;
для cos - 2πn

Тренинг

1. Решите уравнения, отвечая на вопросы:

	$\sin x = ½$	$\cos x = ½$	$\mathrm{tg} x = \sqrt{3}$
Что это?			
Как это?			
Что прибавляется?			
$x =$			

Уравнение sin ***Уравнение tg*** πn πn $2\pi n$

Уравнение cos $\pm$ ***arccos…*** πn $(-1)^n$ ***arcsin…*** $2\pi n$

arctg… $x = (-1)^n \arcsin ½ + \pi n$

$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$

$x = \pm \arccos ½ + 2\pi n$

$x = \pm \pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \mathrm{arctg} \sqrt{3} + \pi n$

$x = \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$

Тренинг

1. Решите уравнения, отвечая на вопросы:

	$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$	$\text{ctg}\,x = -\sqrt{3}$
Что это?			
Как это?			
Что прибавляется?			
$x =$			

Уравнение sin ***Уравнение ctg*** πn πn $2\pi n$

Уравнение cos $\pm(\pi - \arccos\ldots)$ $(-1)^{n+1} \arcsin\ldots$ πn $2\pi n$

$\pi - \text{arcctg}\ldots$

$x = (-1)^{n+1}\,\pi/6 + \pi n,$

$n \in Z$

$x = \pi - \pi/3 + \pi n, \; n \in Z$

$x = 2\pi/3 + \pi n$

$x = \pm(\pi - \pi/3) + 2\pi n,$

$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n, \; n \in Z$