

**Многоугольники
получающиеся
в сечении куба**



Цель работы:

Продемонстрировать плоские многоугольники, которые получаются при сечении куба плоскостью, выяснить их вид и доказать это исходя из основных теорем и аксиом.

Задача №1

Доказать, что если в сечение куба получится треугольник, то этот треугольник остроугольный.

Пусть $ABCA_1B_1C_1D_1$ – куб, MNP – сечение куба плоскостью.

Обозначим: $AN=x$, $AP=y$, $AM=z$.

Тогда $MN^2 = x^2 + z^2$ $NP^2 = x^2 + y^2$ $MP^2 = y^2 + z^2$.

Рассмотрим треугольник MNP с углами α, β, γ и применим теорему косинусов:

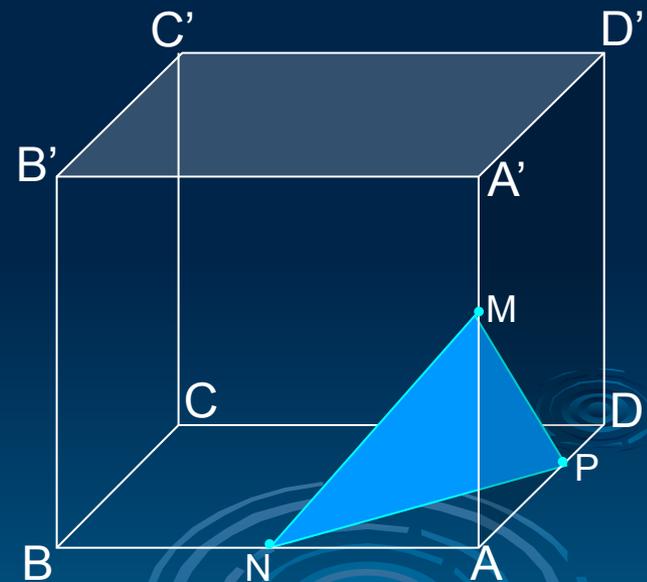
$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos \alpha$$

Перепишав ее иначе:

$$2z^2 = 2\sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \cos \alpha$$

Имеем
$$\cos \alpha = \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2}}$$

Из последнего равенства, очевидно, что $\cos \alpha > 0$, следовательно, $\alpha < 90$.



Задача №2

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины. Вычислить периметр и площадь сечения, если ребро куба равно a .

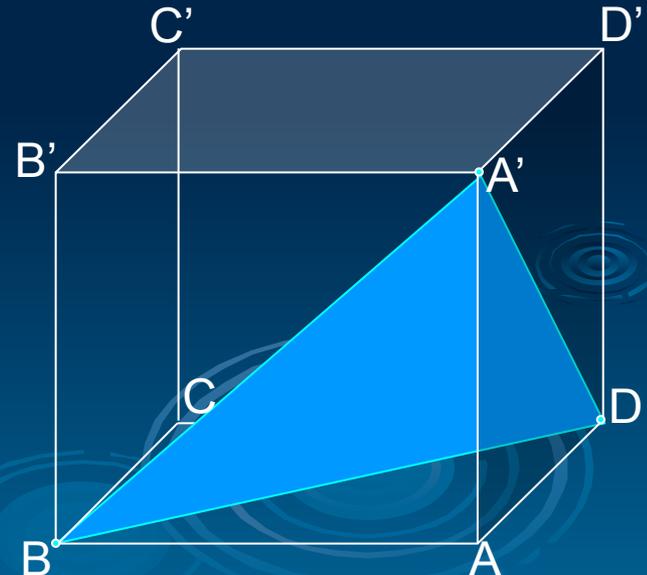
Сечение будет являться
правильный

треугольник, т.к. его
стороны будут являться

диагоналями граней
куба. Соответственно

периметр будет равен $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

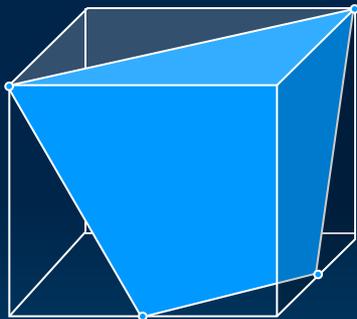
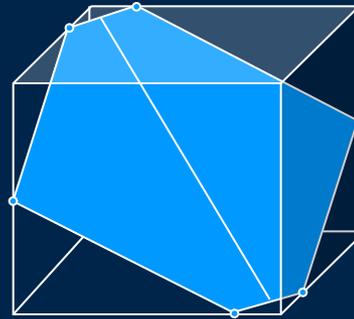
а площадь равна $3a^2\sqrt{2}$



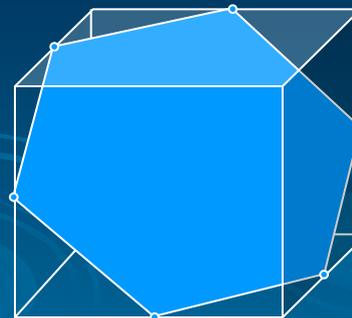
Задача №3

Какую форму может иметь сечение куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных ребер?

шестиугольник с одной осью симметрии:



равнобедренная трапеция:

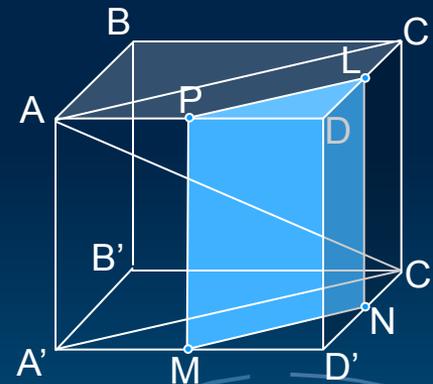


правильный шестиугольник:

ПРЯМОУГОЛЬНИК

Диагональ куба выбрана в той диагональной плоскости, которая параллельна прямой MN .

По условию MN параллельна $A'C'$. Построим MP параллельно DD' и NL параллельно DD' . Тогда PL параллельно MN . Плоскость $MPLN$ параллельна диагональной плоскости $ACC'A'$, поскольку проходит через две пересекающиеся прямые, параллельные двум пересекающимся прямым плоскости $A'C'SA$. Диагональ AC' принадлежит плоскости $A'ACC'$, значит, AC' параллельно (PMN) .

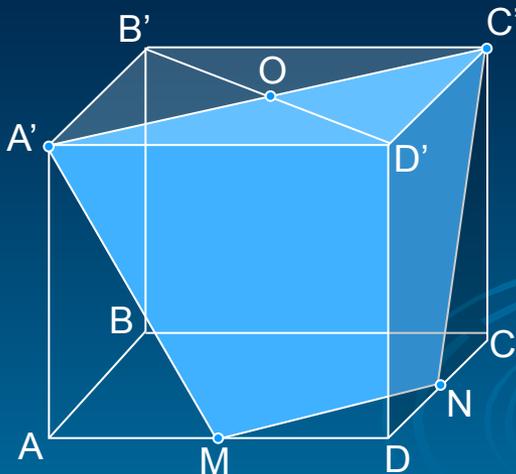


Трапеция

Провести сечение куба через M и N двух смежных сторон основания и центр O грани верхнего основания. Вычислить площадь сечения, если ребро куба равно a

Решение:

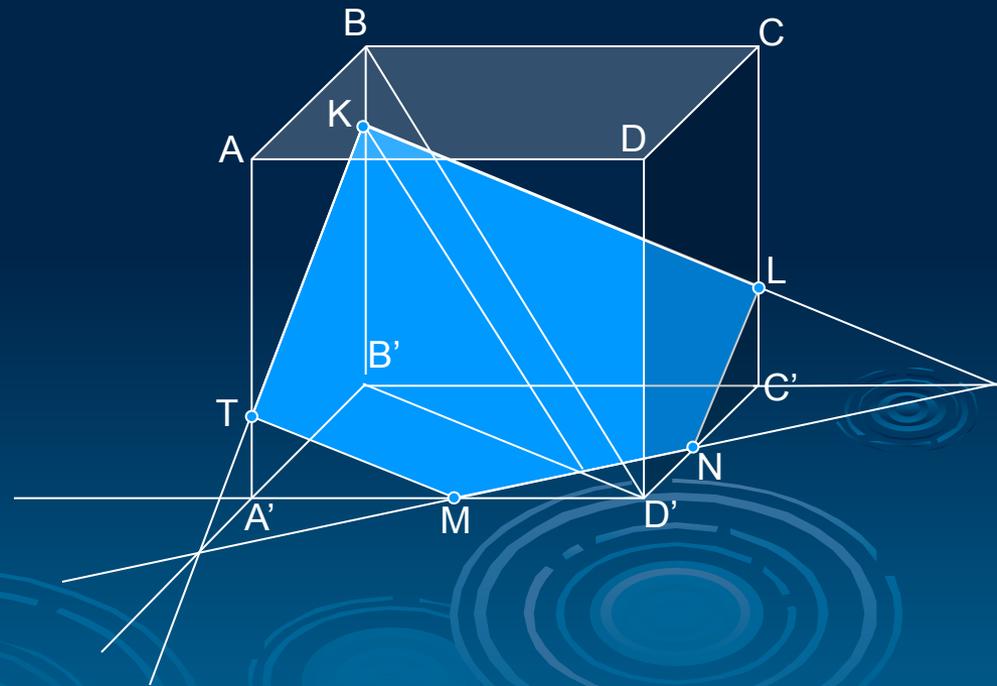
Плоскость сечения пересекает грань $A'B'C'D'$ по прямой, которая параллельна NM и проходит через точку O . Это прямая $A'C'$. Трапеция $A'C'N'M'$ - равнобедренная стороны которой $A'C'$ равно $a\sqrt{2}$
 $NM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $A'M = C'N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Зная стороны трапеции и высоту, площадь равна $\frac{9a^2}{8}$.



Пятиугольник с одной осью

Плоскость параллельна диагонали куба, выходящей из общей вершины указанных сторон основания.

Пусть M и N – середины двух смежных сторон грани $A'B'C'D'$. Отрезки MN и $B'D'$ пересекаются в точке P . Проводим отрезок PK параллельно диагоналям BD' . Через две пересекающиеся прямые PK и MN проводим плоскость $KLMNT$. Она параллельна диагонали BD' .



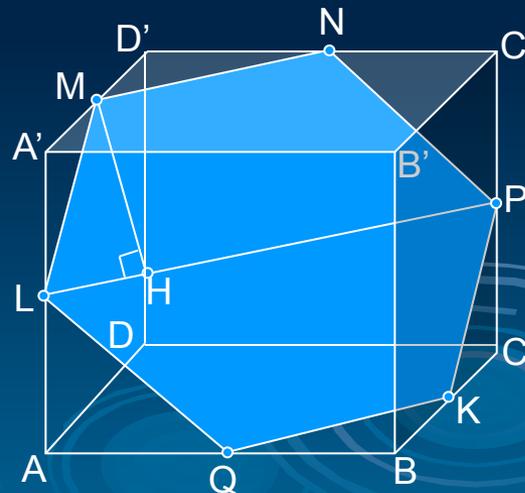
Правильный шестиугольник

Правильный шестиугольник получается, когда сечение проходит

через середины трех пар противоположных ребер.

Докажем, что шестиугольник MNPCKQL правильный.

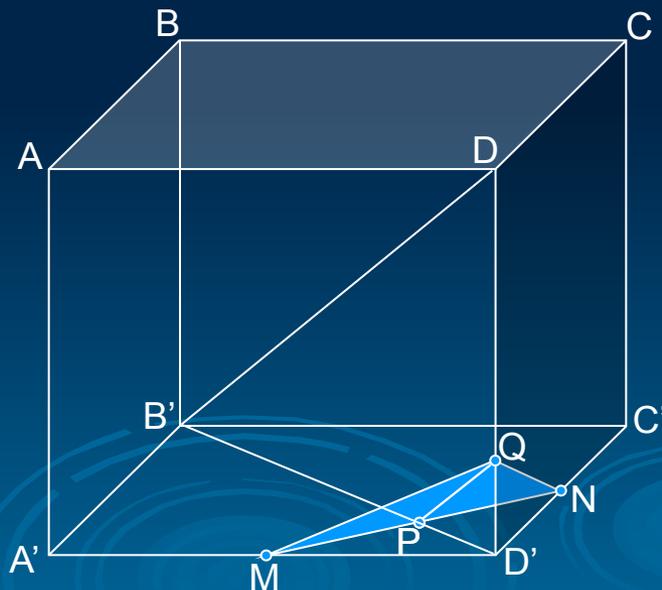
$$MN=MP=PK=QK=QL=ML= \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Треугольник

Плоскость параллельна диагонали $B'D$.

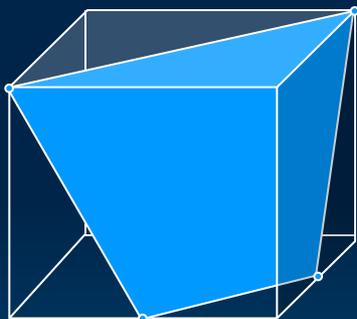
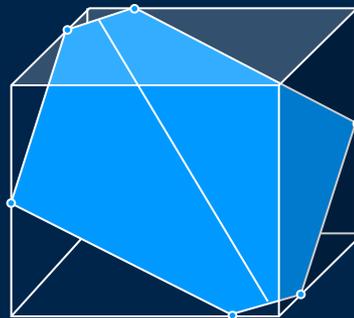
Пусть точка P – пересечение отрезков $B'D'$ и MN . В диагональной плоскости $BDD'B'$ проводим отрезок PQ параллельный диагонали $B'D$. Искомое сечение представляет собой треугольник MQN .



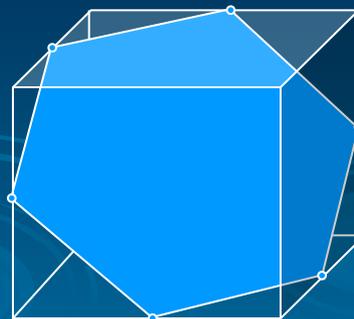
Задача №3

Какую форму может иметь сечение куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных ребер?

шестиугольник с одной осью симметрии:



равнобедренная трапеция:



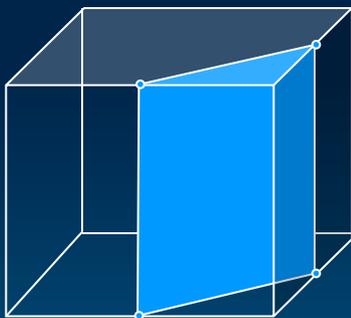
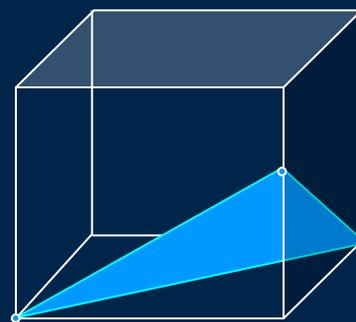
правильный шестиугольник:

Задача №4

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания параллельных диагоналей куба

Задача интересна тем, что в условии не указано, о какой диагонали идет речь. Значит, возможны три случая:

равнобедренный треугольник:



прямоугольник:

пятиугольник с одной осью симметрии:

