Лектор: Лукин Алексей Сергеевич

MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

Спектральный анализ
Быстрая свертка
Фильтрация

План

- Спектральный анализ
  - Мощность сигнала, теорема Парсеваля
  - Спектрограммы, усреднение во времени
  - Частотно-временное разрешение
- Быстрая свертка
  - Свертка в частотной области
  - Разбиение ядра
- Фильтрация
  - Основные понятия
  - Фильтры для изображений, их частотные характеристики
  - Применения: эквалайзеры, реверберация

Мощность и амплитуда

- Мощность пропорциональна квадрату амплитуды

$$P \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x[i]^2$$

- RMS (среднеквадратичное зачение) сигнала:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x[i]^2}$$

(пропорционально амплитуде)

- Окна при вычислении RMS

- Вычисление RMS в реальном времени:

$$RMS^2[n] = (1-\alpha)RMS^2[n-1] + \alpha x[n]^2$$

(экспоненциальное окно)

Теорема Парсеваля

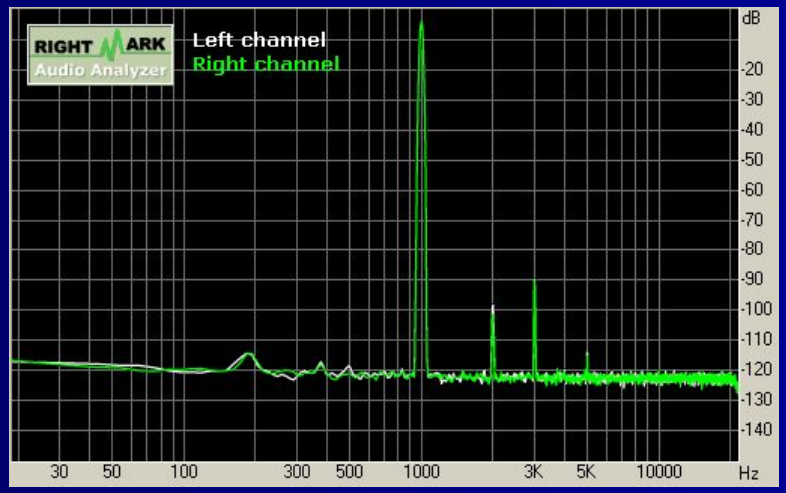
- Энергия сигнала равна энергии спектра
  (возможно, с точностью до множителя, зависящего от нормализации в формулах преобразования Фурье)

$$\sum_i x[i]^2 = \sum_k |X[k]|^2$$

- Применение теоремы для оценки энергии различных частотных составляющих сигнала
- Пример:
  вычисление THD

(total harmonic distortion)

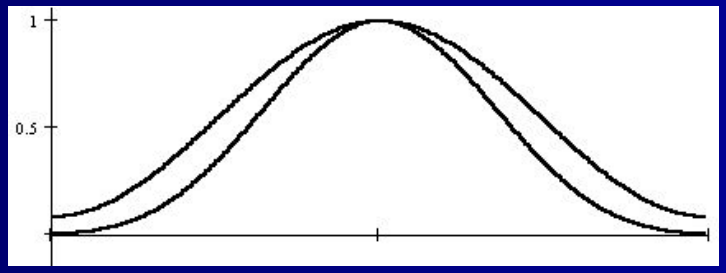
$$THD = \frac{RMS_{distortion}}{RMS_{total}} \cdot 100\%$$



Спектральный анализ

- Как вычислить и отобразить спектр сигнала?
  1. Взять нужный отрезок сигнала длины 2^m; если нужный отрезок короче – дополнить его нулями.
  2. Если нужно – умножить сигнал на весовое окно, плавно спадающее к краям. Обычно это улучшает свойства спектра.
  3. Вычислить FFT.
  4. Перевести комплексные коэффициенты в полярную форму: получить амплитуды.
  5. Отобразить график зависимости амплитуды от частоты.

Примеры весовых окон



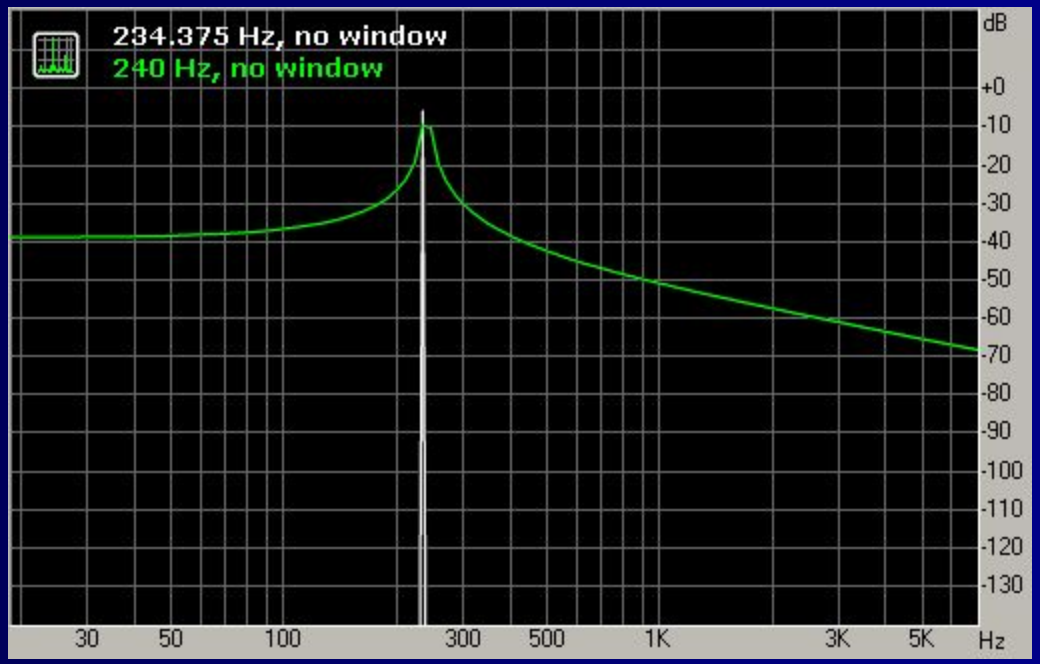
Свойства ДПФ

$$X_k = \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} kn\right) \qquad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi i}{N} kn\right)$$

- Линейность
- Комплексное ДПФ от вещественного сигнала обладает симметрией относительно коэффициента $k = N/2$. Таким образом, только половина коэффициентов являются значимыми.
- Периодическое продолжение сигнала
- Циклический сдвиг отсчётов сигнала не изменяет амплитудного спектра, а меняет только фазовый

Размытие спектра

- Как выглядит спектр синусоиды, если её частота совпадает/не совпадает с базисными частотами ДПФ?



нет окна (прямоугольное окно)

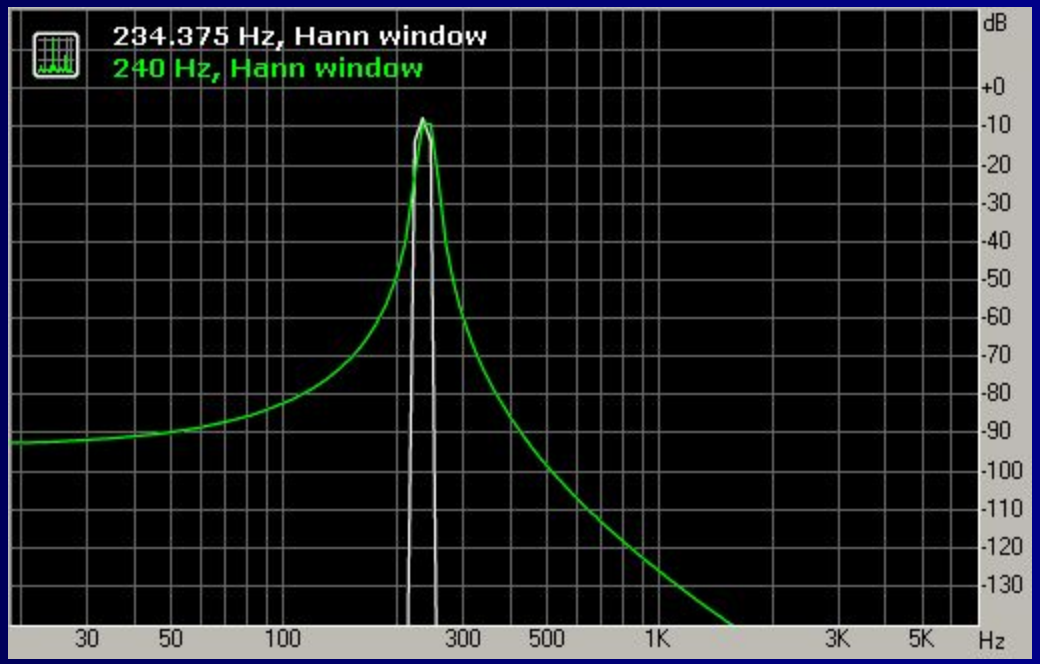
Весовые окна

- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка

окно Хэмминга (Hamming)

Весовые окна

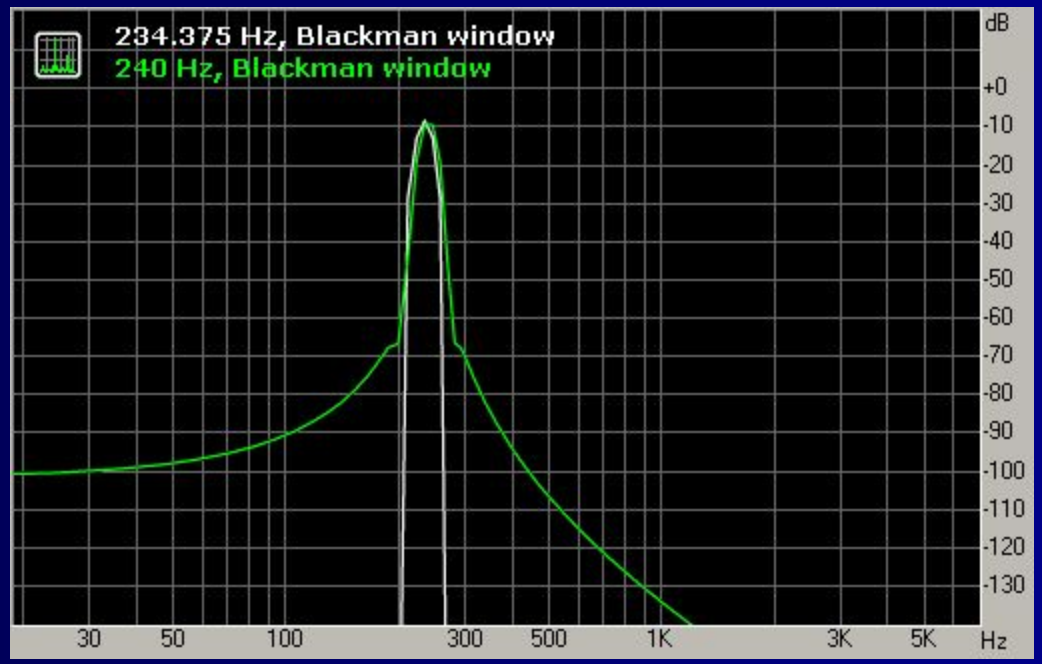
- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка



окно Хана (Hann)

Весовые окна

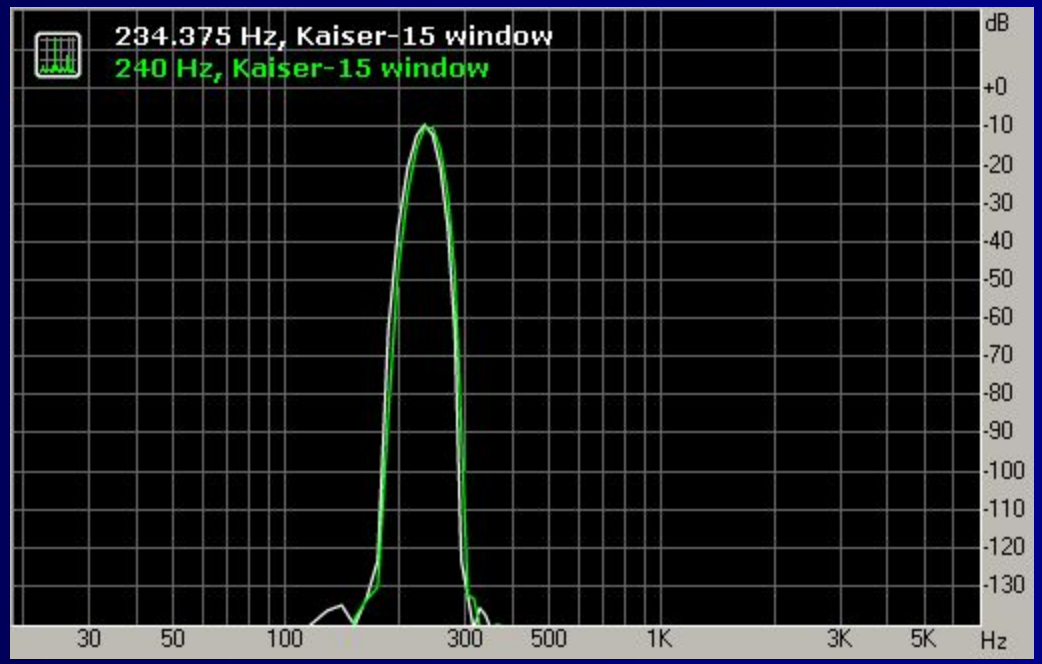
- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка



окно Блэкмана (Blackman)

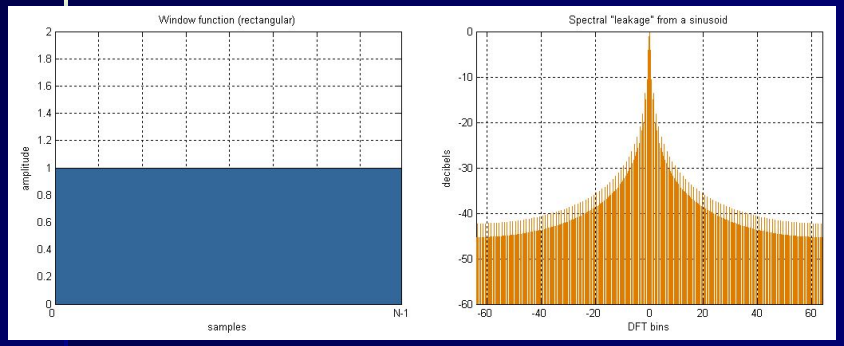
Весовые окна

- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка

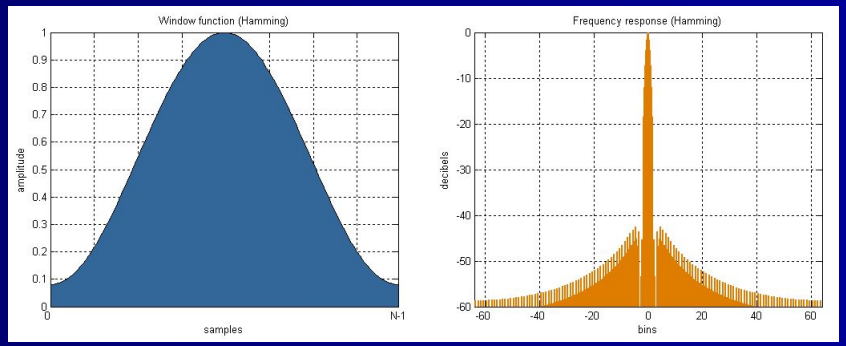


окно Кайзера (Kaiser), β = 15

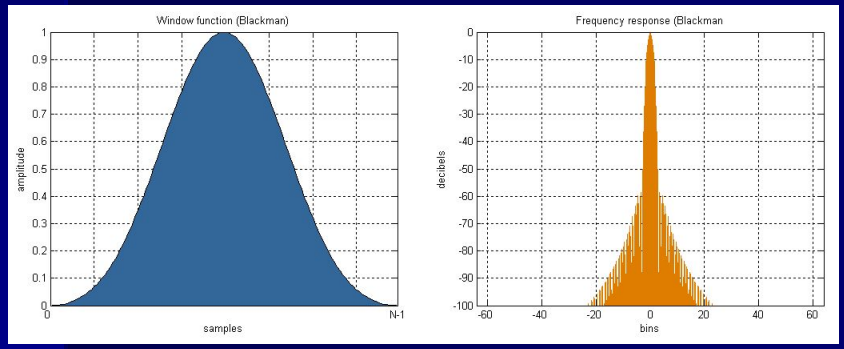
Весовые окна



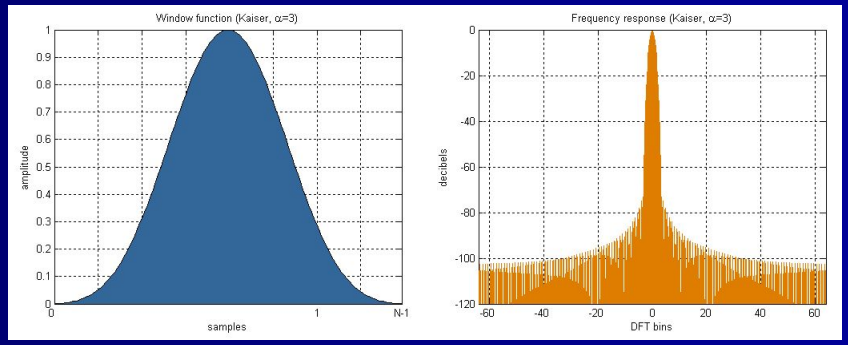
Прямоугольное (нет окна)



Hamming



Blackman



Kaiser

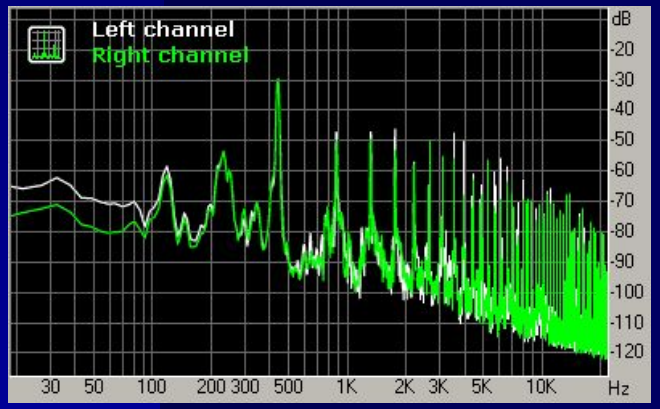
Формулы и картинки: http://en.wikipedia.org/wiki/Window_Function

Спектральный анализ

- Отображение спектра звука: спектрограмма
  - Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты
  - Низкие частоты – слева, высокие – справа
  - Часто применяется логарифмический масштаб частот и амплитуд: “log-log-спектрограмма”
  - Временное и частотное разрешение спектрограммы

Децибелы: $$D = 20\lg\frac{A_1}{A_0}$$

A_1 – амплитуда измеряемого сигнала, A_0 – амплитуда сигнала, принятого за начало отсчета (0 дБ)

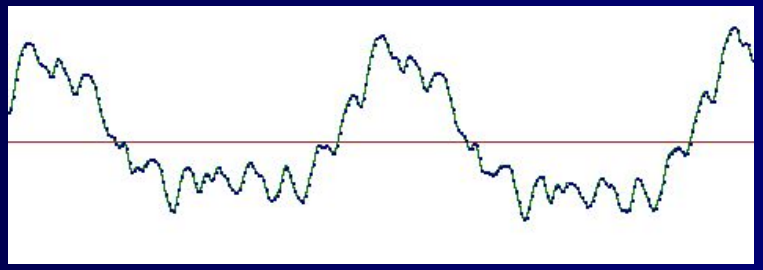


Разница на 6 дБ – разница по амплитуде в 2 раза, разница на 12 дБ – разница по амплитуде в 4 раза.

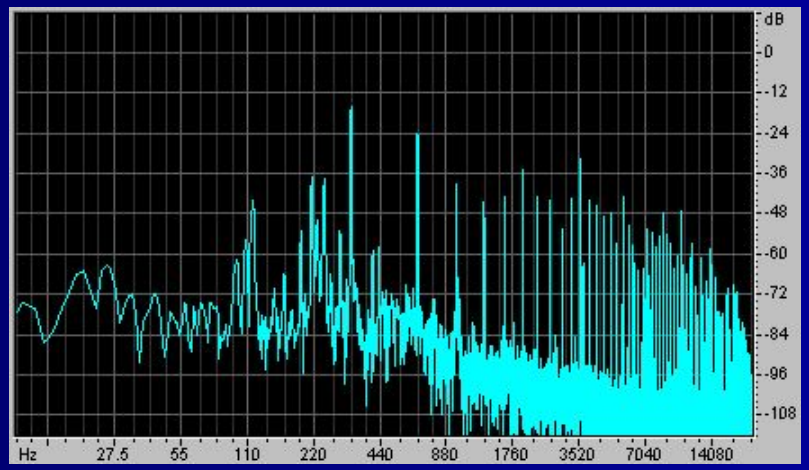
Часто за 0 дБ принимается либо самый тихий слышимый звук, либо самый мощный звук, который может воспроизвести аудиоустройство.

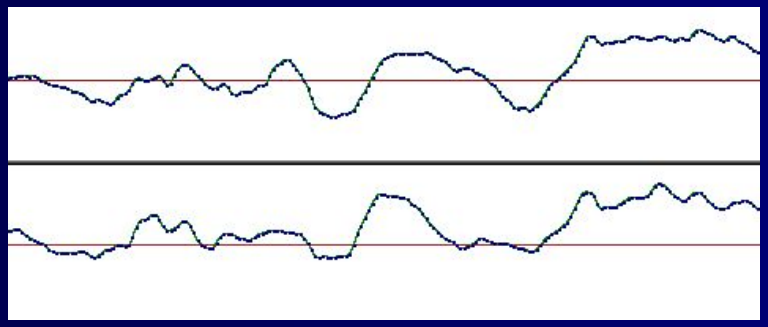
Спектральный анализ

- Примеры звуков и их спектров

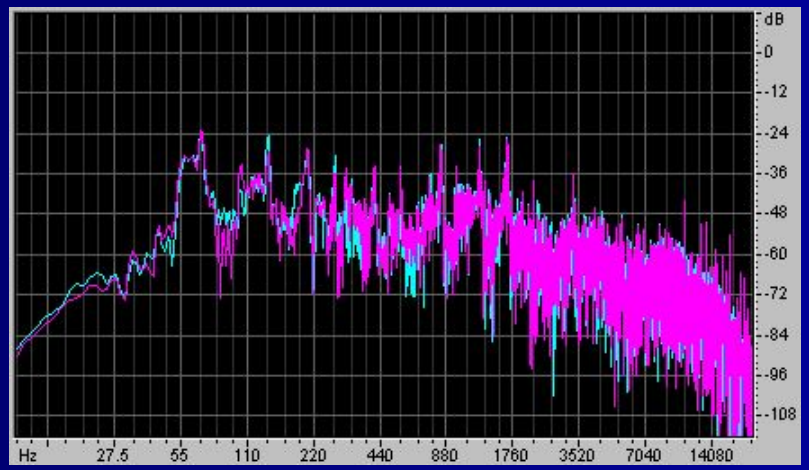


Нота на гитаре





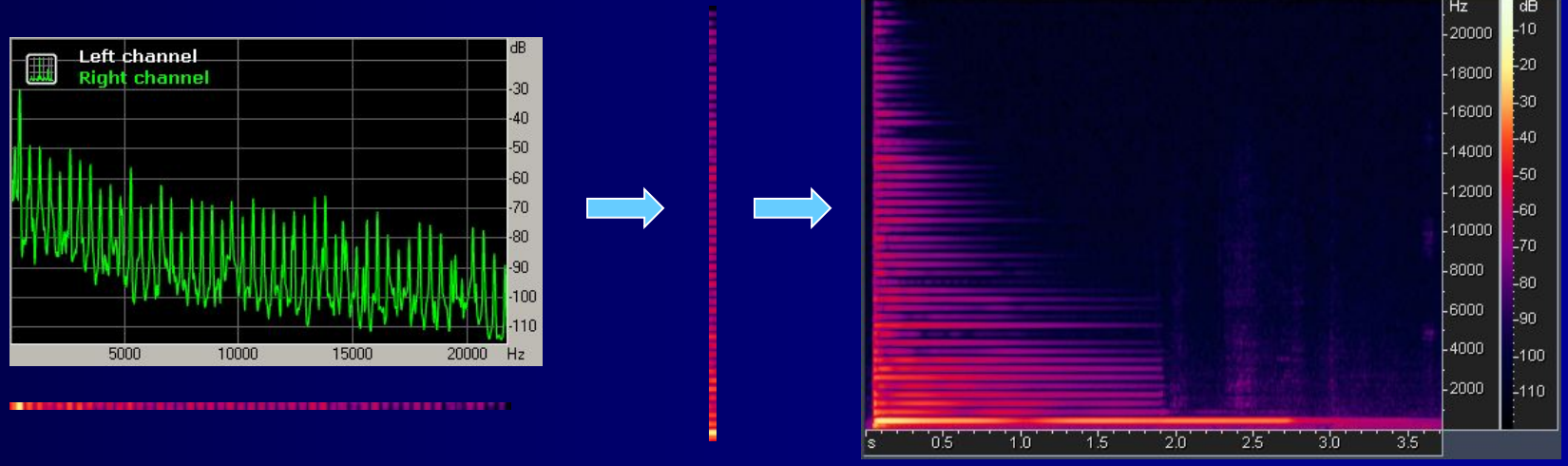
Песня (стерео запись)



Спектральный анализ

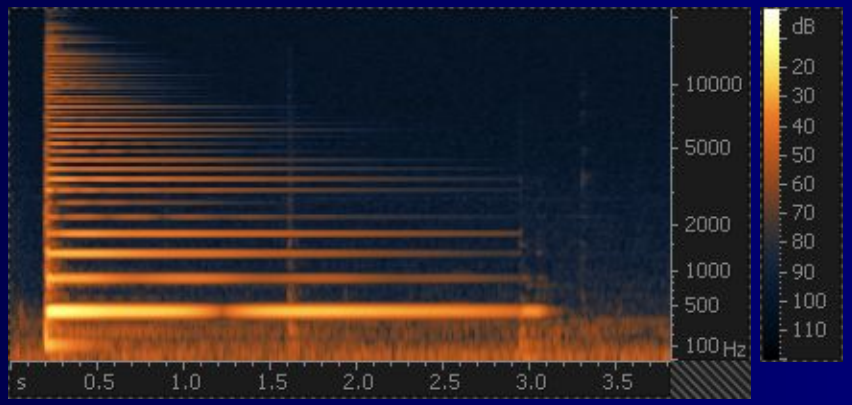
- Отображение спектра звука: спектрограмма (сонограмма)
  - Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты и от времени, показывает изменение спектра во времени
  - Short Time Fourier Transform (STFT)

$$STFT[n,\omega] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m] \cdot w[m] \cdot e^{-i\omega m}$$

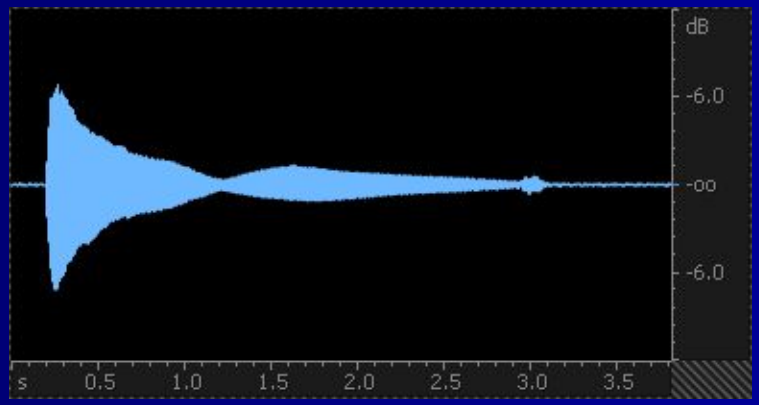


Спектральный анализ

- Отображение спектра звука: спектрограмма (сонограмма)
  - Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты и от времени, показывает изменение спектра во времени
  - Низкие частоты – снизу, высокие – сверху
  - Время идет справа налево
  - Амплитуда – яркость или цвет
  - Частотное и временное разрешение
  - Short Time Fourier Transform (STFT)



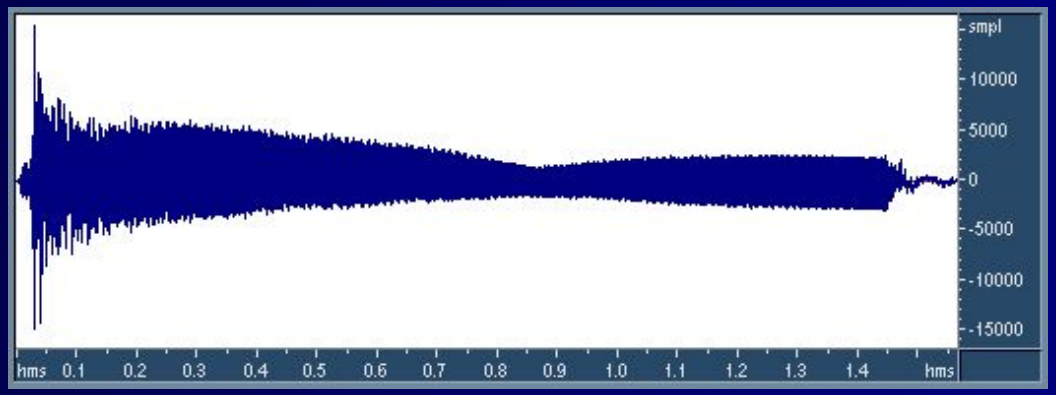
Спектрограмма

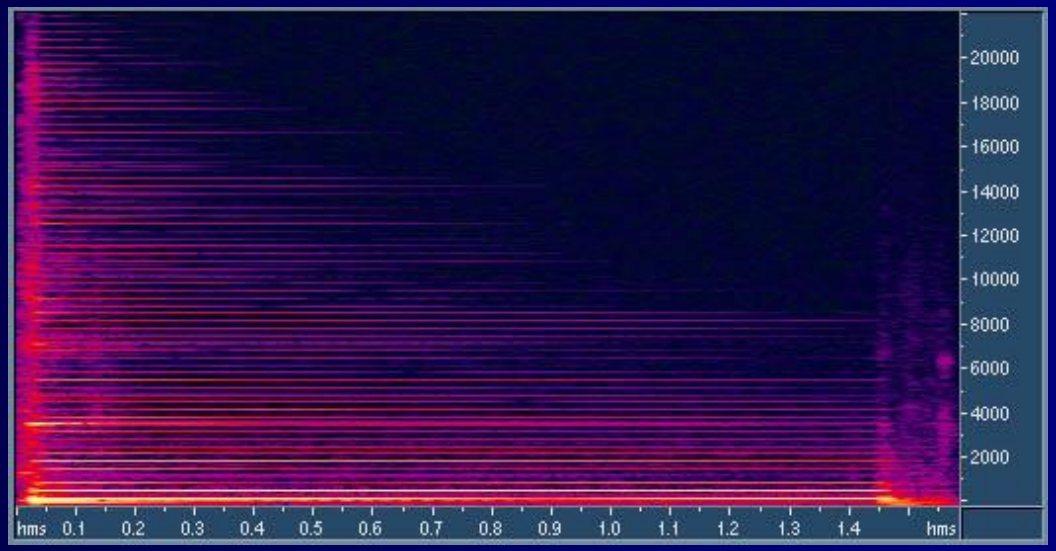


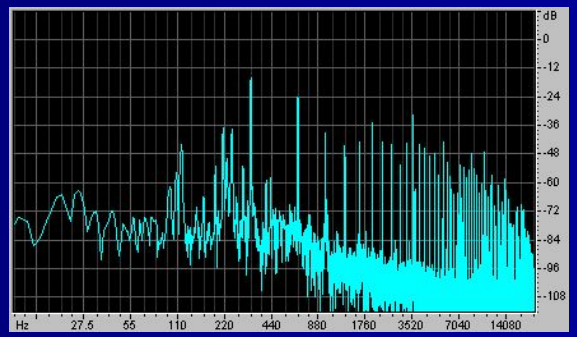
Осциллограмма (форма волны)

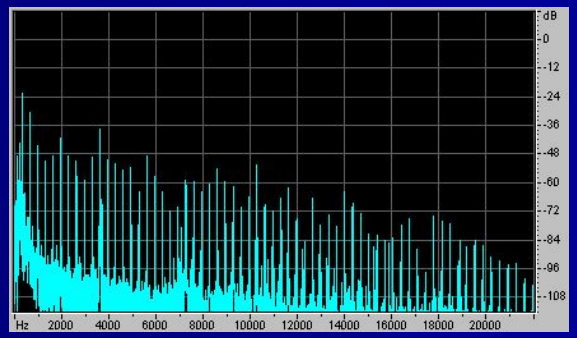
Спектральный анализ

- Примеры звуков и их спектрограмм









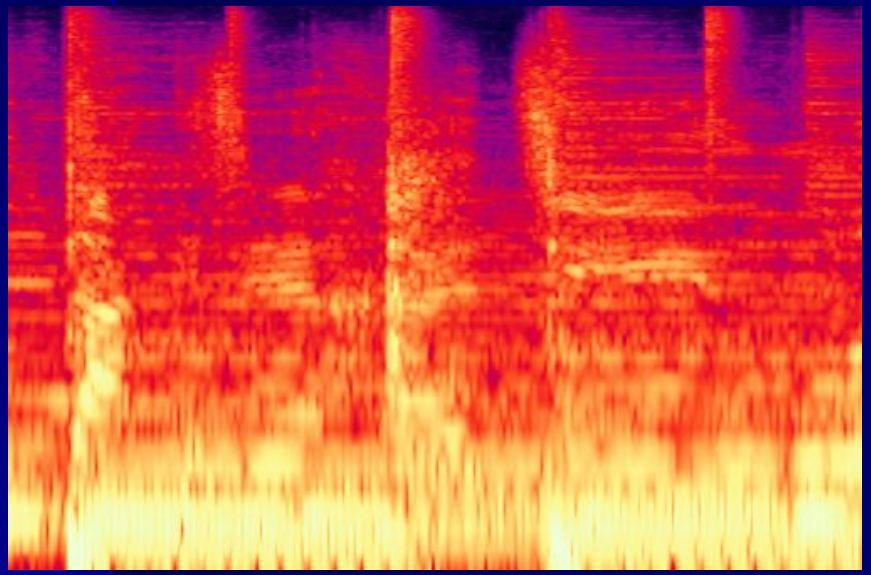
Нота на гитаре

Спектральный анализ

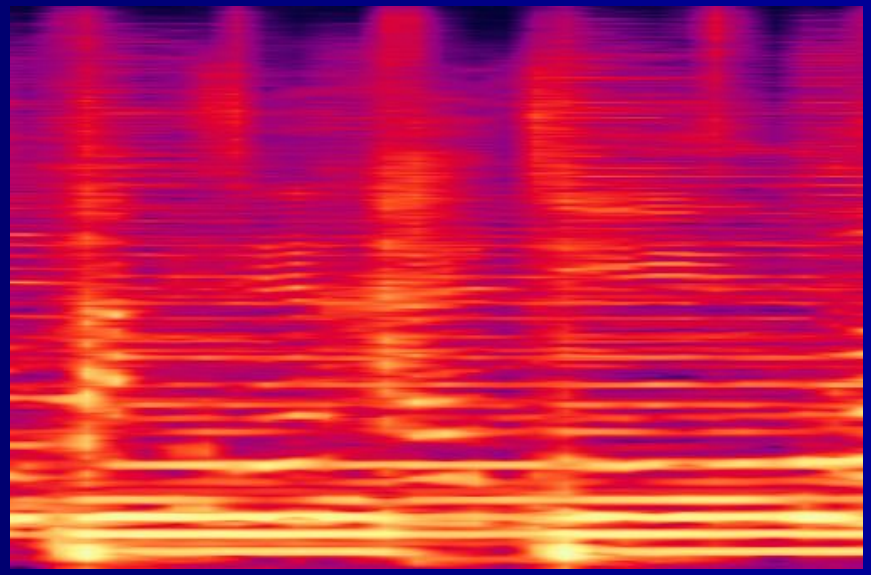
- Спектрограммы шума
- Типы шумов: белый (постоянная PSD), розовый (3 дБ/окт.), коричневый (6 дБ/окт.)
- Вариация и усреднение спектрограмм

Построение спектрограмм

- Мел-шкала частот
- Недостаточное частотное разрешение на НЧ, недостаточное временное разрешение на ВЧ



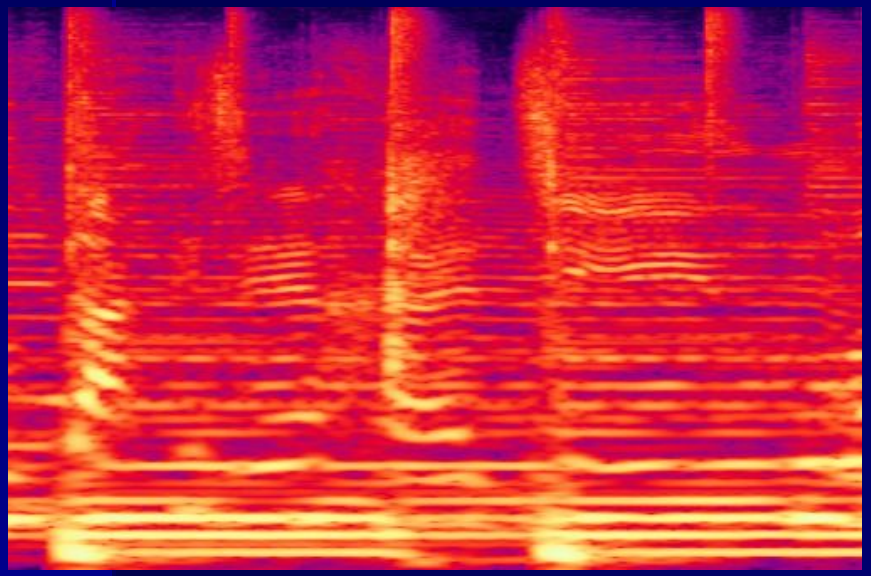
Обычная спектрограмма,
окно 512 точек



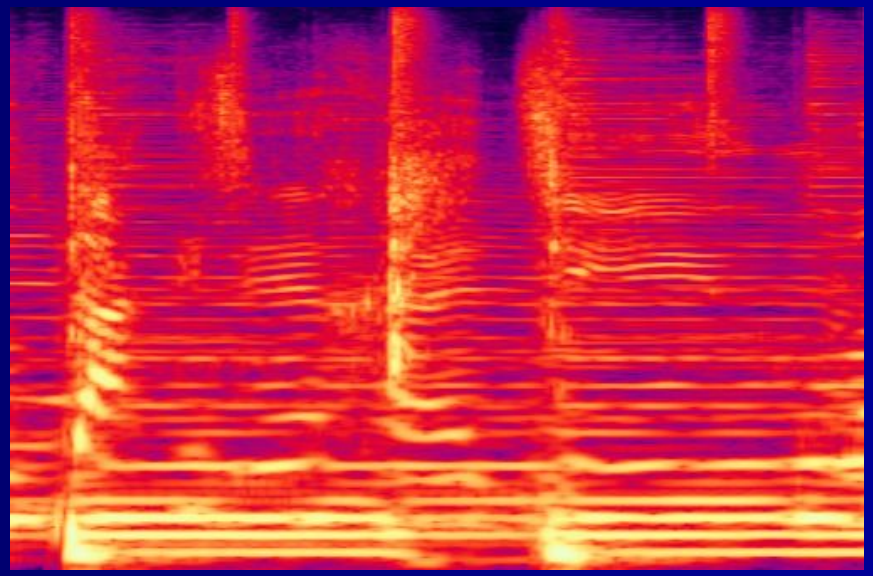
Обычная спектрограмма,
окно 4096 точек

Построение спектрограмм

- Адаптивное частотно-временное разрешение спектрограмм
- Критерий оптимальности: максимально компактная локализация энергии (минимальное размытие спектрограммы)



Адаптивная спектрограмма, разрешение зависит от частоты



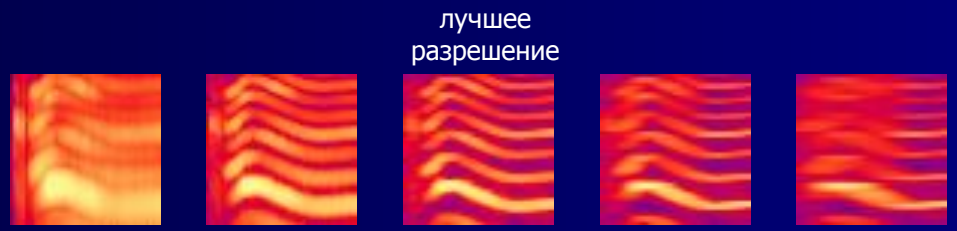
Адаптивная спектрограмма, оптимальное разрешение

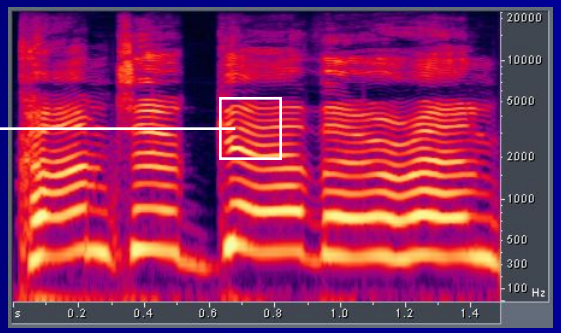
Построение спектрограмм

- Критерий оптимальности: максимальное компактирование (локализация) энергии

$$r_0 = \arg\min_r S_r \qquad S_r = \frac{norm_{L1}(a)}{norm_{L2}(a)\cdot\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,r}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} a_{i,r}^2}}$$

Здесь $a_{i,r}$ – амплитуды STFT в блоке разрешения r,
S_r – мера размытости спектра для данного разрешения r,
r_0 – лучшее разрешение, для которого размытость минимальна.





Свертка и фильтрация

- Основные термины
  - Свертка *(convolution)*, фильтрация *(filtering)*
  - Фильтр *(filter)*, ядро фильтра *(kernel)*
  - Импульсная, частотная и фазовая характеристики *(impulse, frequency, phase response)*

$$y[n] = h[n] * x[n] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

- Применения фильтрации
  - Анти-алиасинг изображений, нахождение границ
  - Звуковой эквалайзер
  - Моделирование реверберации помещения

Быстрая свертка

- Прямое вычисление: M·N умножений (M – размер ядра свертки, N – длина сигнала)
- Теорема свертки: свертка* во временной области эквивалентна умножению в частотной области, умножение во временной области эквивалентно свертке* в частотной области.
- Алгоритм быстрой свертки:
  1. Вычислить спектры сигнала и ядра свертки (FFT)
  2. Перемножить эти спектры
  3. Вернуть полученный спектр во временную область (IFFT)
- Почему это быстрее? Потому что переход в частотную область и обратно быстрый: FFT

---

* Речь идет о т.н. круговой свертке

Быстрая свертка

- Как изменяется длина сигнала при свертке? Она увеличивается на длину ядра минус 1 *(т.к. каждый входной отсчет превращается в ядро и они складываются с наложением)*

- Значит, если взять сигнал длины N, ядро длины M и произвести свертку через FFT размера N, то результат свертки *(длины N+M-1)* не поместится в результате IFFT *(длины N)*. Произойдет **круговая свертка** *(заворачивание результата по времени)*.

- Следовательно, для предотвращения круговой свертки надо взять размер FFT как минимум N+M-1

Вычисление свертки

MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

- Быстрая свертка через FFT $IFFT\left(FFT(x(n))\cdot FFT(h(n))\right)$
  - Неоптимальна по скорости, когда длины сигнала и ядра сильно различаются
  - Неприменима при потоковой обработке *(когда входной сигнал поступает в реальном времени и его длина неизвестна)*
- Секционная свертка
  - Используем свойство линейности и инвариантности к сдвигу: разбиваем сигнал на блоки и делаем быструю свертку блочно
  - Увеличение длины каждого блока на M-1 → сложение результатов с перекрытием *(метод OLA: overlap-add)*

Подробности – см. в методичке

Разбиение ядра

- Проблема секционной свертки: сигнал надо накапливать блоками, сравнимыми по размеру с длиной ядра свертки *(иначе – неэффективно)* $\longrightarrow$ задержки при real-time
- Partitioned convolution *(свертка с разбиением ядра)*
  - Цель – уменьшение задержки
  - Недостаток – некоторое увеличение времени обработки

Секционная свертка: $x(n) * h(n) = \left(x_1(n) + \ldots + x_m(n) + \ldots\right) * h(n)$

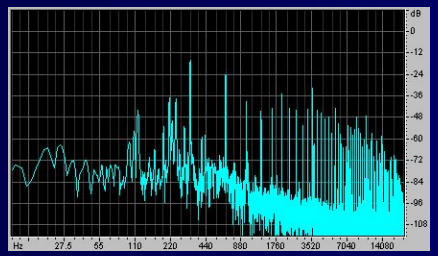
Разбиение ядра: $x(n) * h(n) = \left(x_1(n) + \ldots + x_m(n) + \ldots\right) * \left(h_1(n) + \ldots + h_k(n)\right)$

(раскрываем скобки)

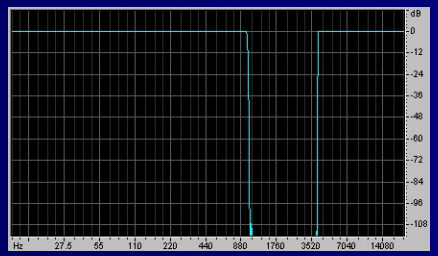
Частотная характеристика

- Получение частотной характеристики по ядру
  1. Дополнение нулями
  2. FFT
  3. Берем модули комплексных коэффициентов

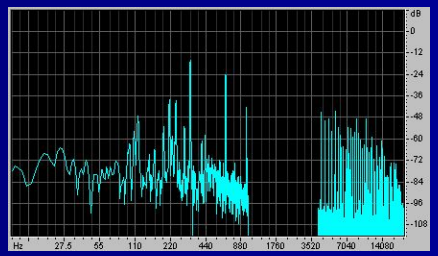
- Свертка = перемножение частотных характеристик



*



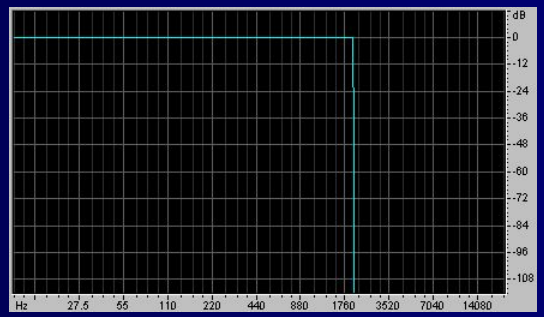
=

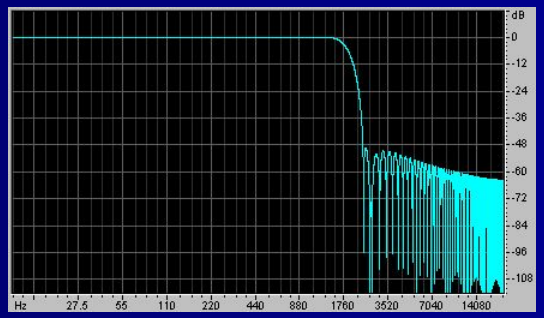


Перемножение амплитуд = сложение децибелов

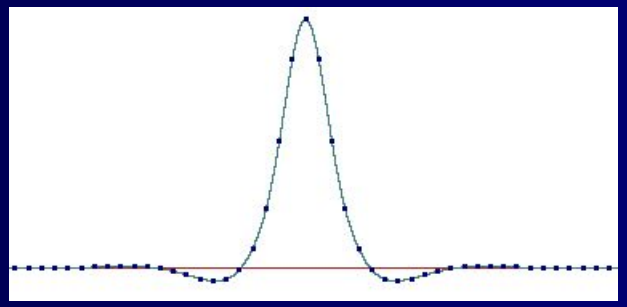
Виды фильтров

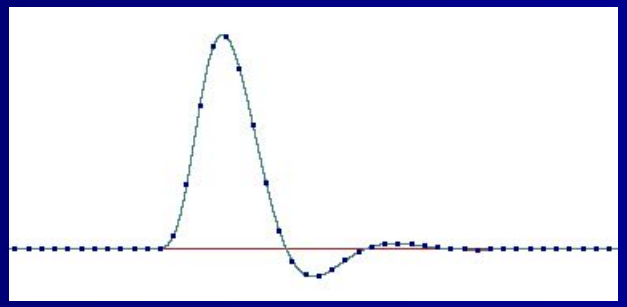
- Идеальные и реальные фильтры, виды искажений





- FIR *(finite impulse response)* и IIR *(infinite i. r.)* фильтры
- Линейность ФЧХ *(«линейность фазы»)*





Построение фильтров

- Простейший НЧ-фильтр – windowed sinc

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\alpha n} \cdot w(n)$$

- Метод спектральной инверсии*
  - Вычитание фильтра из единичного импульса – вычитает его АЧХ из единичной
  - Инверсия каждого второго отсчета в фильтре – разворачивает АЧХ фильтра по частоте

* Применим для фильтров с линейной ФЧХ

Построение фильтров

- Метод весового окна
  - Построение фильтра с линейной фазой по произвольной заданной частотной характеристике
  - Частотная характеристика приближается с любым заданным уровнем точности
- Более сложные методы
  - Чуть меньшее число точек ядра при соблюдении той же частотной характеристики
  - Специальные требования *(к фазовой характеристике, к монотонности частотной характеристики и т.п.)*

Построение фильтров

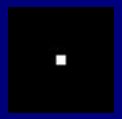
- Метод весового окна *(идея метода – взять обратное FFT от требуемой АЧХ)*
  1. Дана требуемая АЧХ (частотная характеристика)
  2. Произвольно выбираем размер FFT N и берем амплитуды коэффициентов Фурье по АЧХ (N/2+1 точка)
  3. Записываем нули в фазы и делаем IFFT
  4. Циклический сдвиг ядра
  5. Применение весового окна
  6. Контроль реальной полученной АЧХ *(см. получение АЧХ по ядру фильтра)*
  7. Если АЧХ недостаточно соответствует требованиям – увеличиваем размер FFT и снова конструируем фильтр

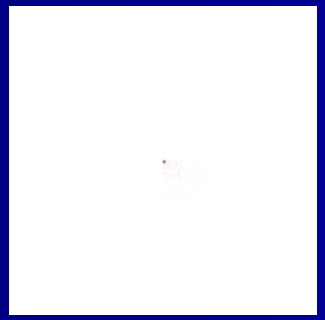
Подробности – см. в методичке

Двумерные фильтры

- Единичный импульс

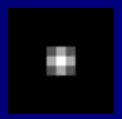
$$\delta[m,n]$$

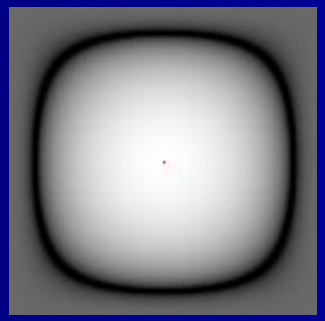




- Простейшее размытие

$$Ker[k,p] = \frac{1}{15} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

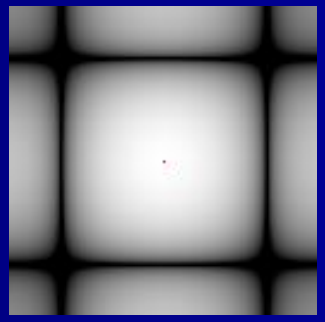




Двумерные фильтры

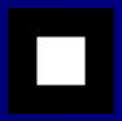
- Константное размытие 3x3

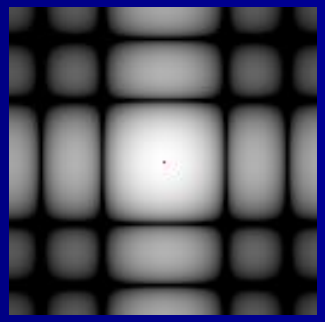
$$Ker[k,p] = \frac{1}{Sum}$$



- Константное размытие 5x5

$$Ker[k,p] = \frac{1}{Sum}$$

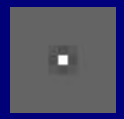


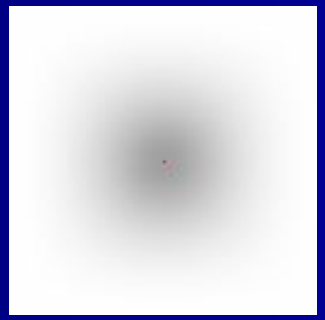


Двумерные фильтры

- Повышение четкости

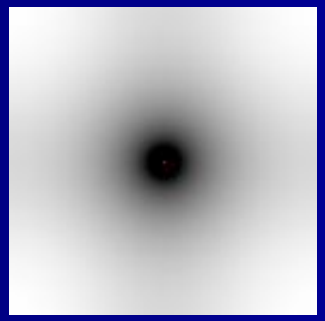
$$\frac{1}{10}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & -2 & -1\\ -2 & 22 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{Vmatrix}$$





- Выделение границ

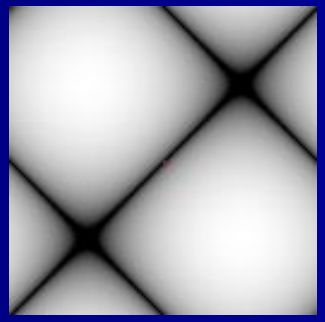
$$\begin{Vmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{Vmatrix}$$



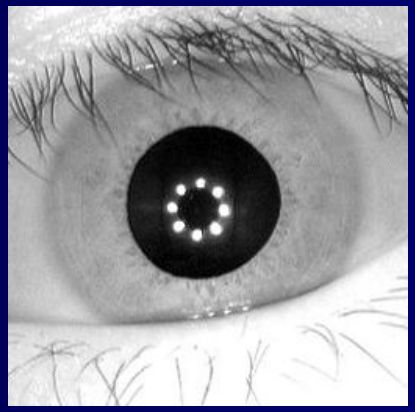
Двумерные фильтры

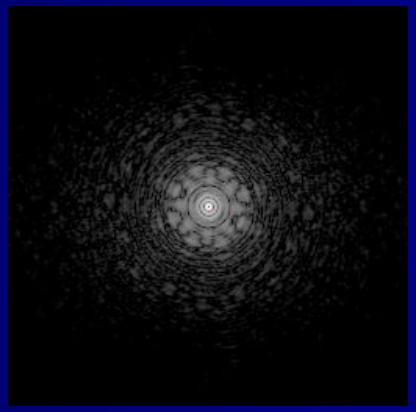
- Тиснение

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$



- Пример спектра изображения





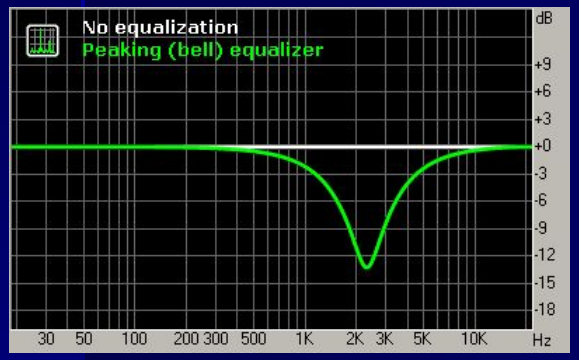
Эквалайзеры

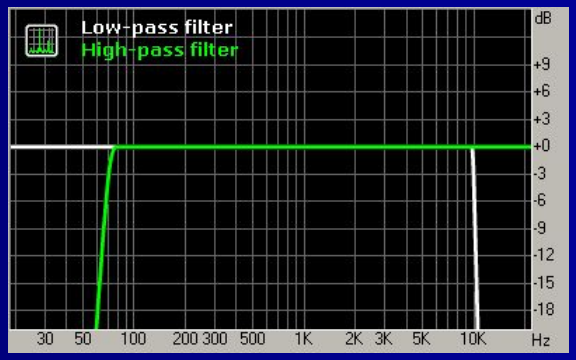
MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

- Эквалайзер – устройство коррекции тембра сигнала, изменяющее амплитуды его частотных составляющих
- Изначально применялись для выравнивания АЧХ неидеального звукового тракта
- Вскоре стали использоваться и творчески, для создания нужных тембров или аккуратного совмещения инструментов в фонограмме

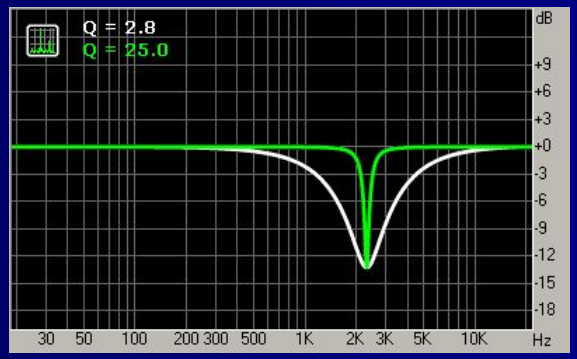
АЧХ

- Амплитудно-частотная характеристика (frequency response)





- Добротность (Q) определяет ширину полосы воздействия

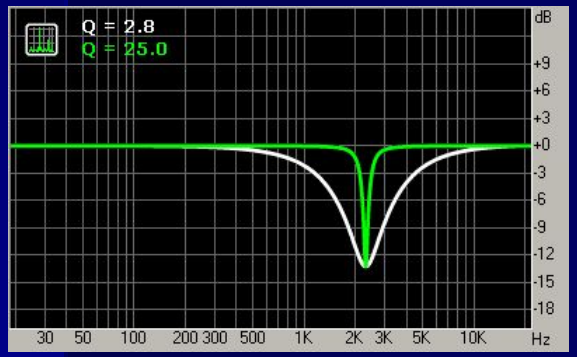


Виды эквалайзеров

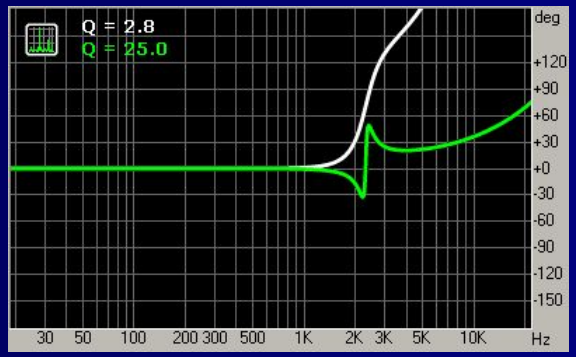
- По управлению АЧХ:
  - Параметрические: можно выбирать одну из имеющихся форм АЧХ и задавать ее параметры: центральную частоту, коэффициент усиления и добротность
  - Графические: пользователь «рисует» требуемую АЧХ непосредственно на дисплее или с помощью набора регуляторов усиления на различных частотах
  - Параграфические: гибрид предыдущих
- По принципу действия:
  - Аналоговые: состоят из конденсаторов, катушек индуктивности, операционных усилителей
  - Цифровые: используют FIR или IIR фильтры

ФЧХ и ГВЗ

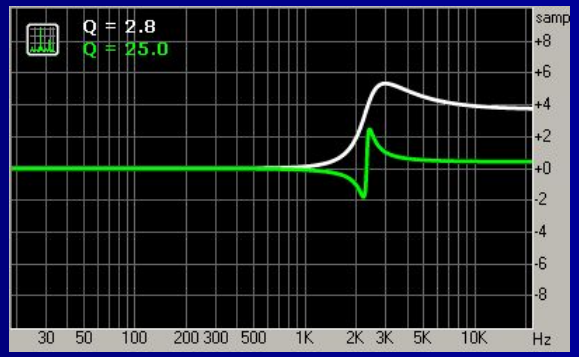
- Фазово-частотная характеристика *(phase response)*
  - ► Изменение фазы в зависимости от частоты
- Групповое время задержки *(group delay)*
  - ► Задержка различных частотных составляющих



АЧХ



ФЧХ



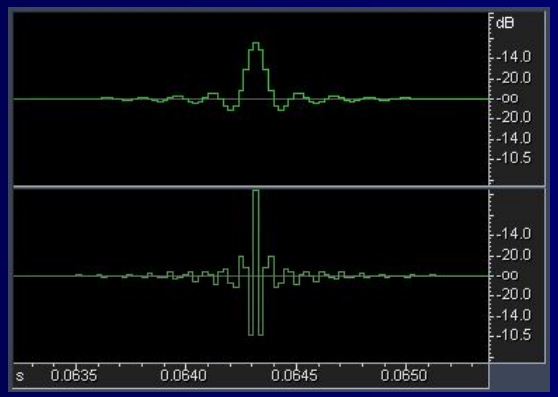
ГВЗ

Импульсная характеристика

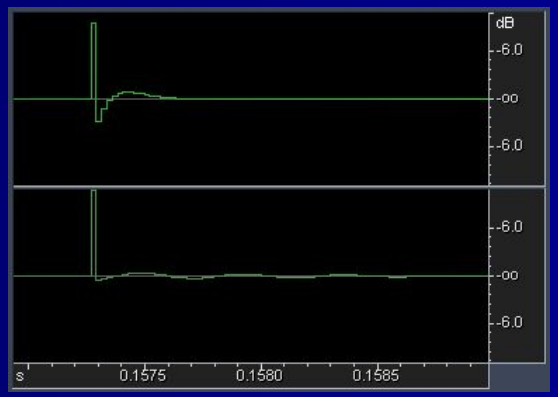
- Конечная (FIR)
  - Легко достичь линейной ФЧХ
- Бесконечная (IIR)
  - Нелинейная ФЧХ
- Звон фильтров (ringing)

$$y_i = \sum_{-M \le k \le M} x_{i-k} h_k$$

$$y_i = \sum_{0 \le k \le N} b_k x_{i-k} + \sum_{1 \le k \le N} a_k y_{i-k}$$



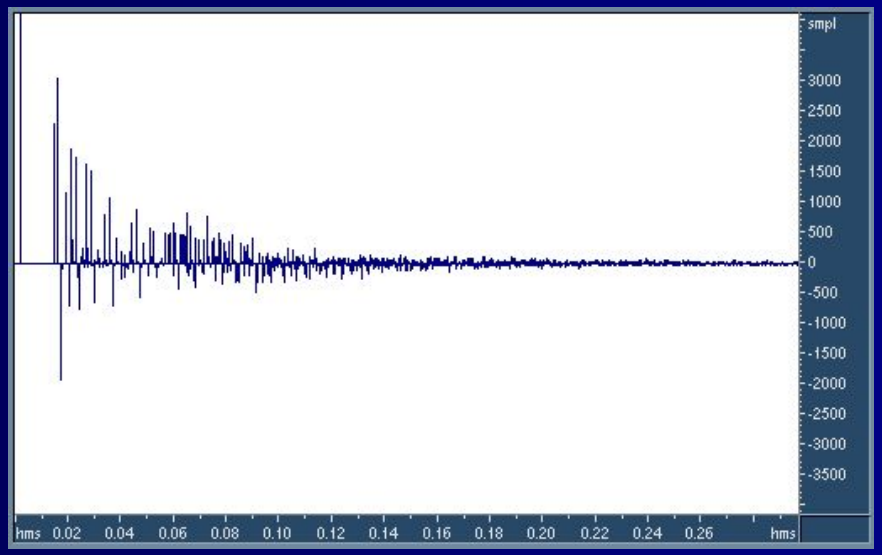
Линейная ФЧХ



Нелинейная ФЧХ

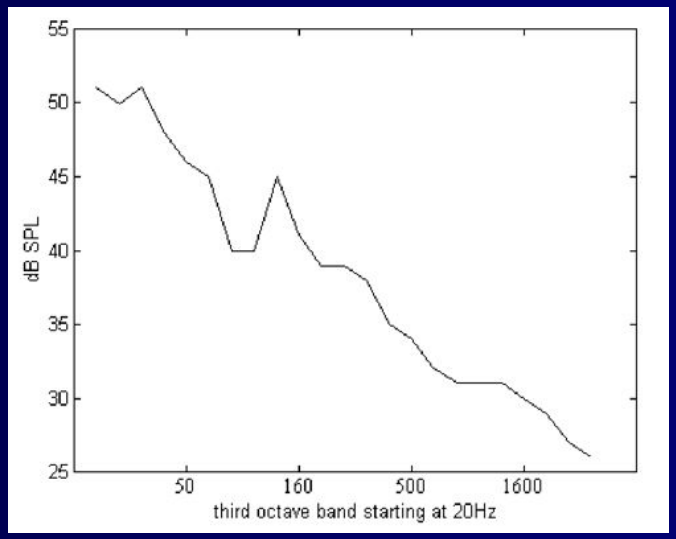
Измерение реверберации

- Импульсный отклик помещения
- Реверберация: прямой звук, ранние и поздние отражения

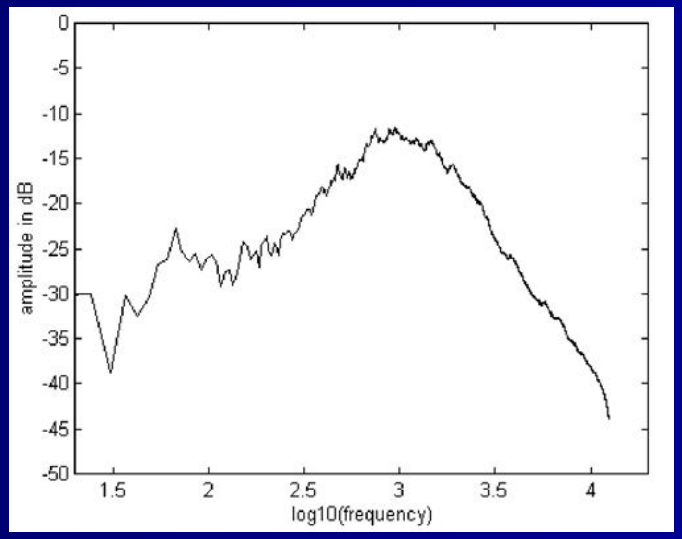


Измерение реверберации

- Способы измерения импульсного отклика:
  - Единичный импульс *(плохое соотношение сигнал/шум)*
  - Звук стартового пистолета / лопающегося воздушного шарика *(неровный спектр, маленькая энергия на НЧ)*



Шум измеряемого зала



Стартовый пистолет

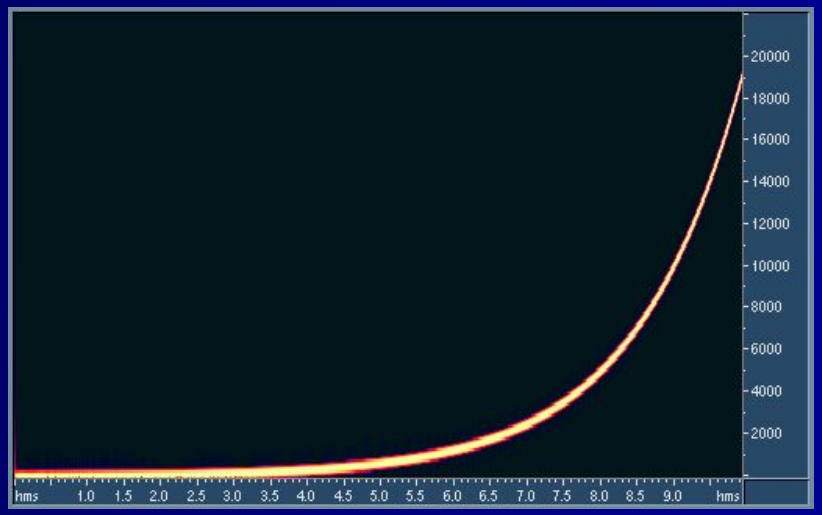
Используются материалы Дэвида Гризингера (Lexicon)

Измерение реверберации

- Способы измерения импульсного отклика:
  - Белый шум, MLS-последовательности *(чувствительны к нелинейным искажениям)*
  - Скользящий тон (swept sine, «плавающий синус»)

- Деконволюция

  (обратная свертка)



Скользящий тон

Реверберация

MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

- Что почитать:
  - Дэвид Гризингер: http://world.std.com/~griesngr/
  - Ирина Алдошина: http://www.625-net.ru/archive/z0803/aldo.htm