



Лектор: Лукин Алексей Сергеевич

Спектральный анализ

Быстрая свертка

Фильтрация

План



- **Спектральный анализ**
 - ▶ Мощность сигнала, теорема Парсеваля
 - ▶ Спектрограммы, усреднение во времени
 - ▶ Частотно-временное разрешение
- **Быстрая свертка**
 - ▶ Свертка в частотной области
 - ▶ Разбиение ядра
- **Фильтрация**
 - ▶ Основные понятия
 - ▶ Фильтры для изображений, их частотные характеристики
 - ▶ Применения: эквалайзеры, реверберация

Мощность и амплитуда



MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

- Мощность пропорциональна квадрату амплитуды

$$P \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x[i]^2$$

- RMS (среднеквадратичное значение) сигнала:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x[i]^2}$$

(пропорционально амплитуде)

- Окна при вычислении RMS
- Вычисление RMS в реальном времени:

$$RMS^2[n] = (1 - \alpha)RMS^2[n-1] + \alpha x[n]^2$$

(экспоненциальное окно)

Теорема Парсеваля



MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

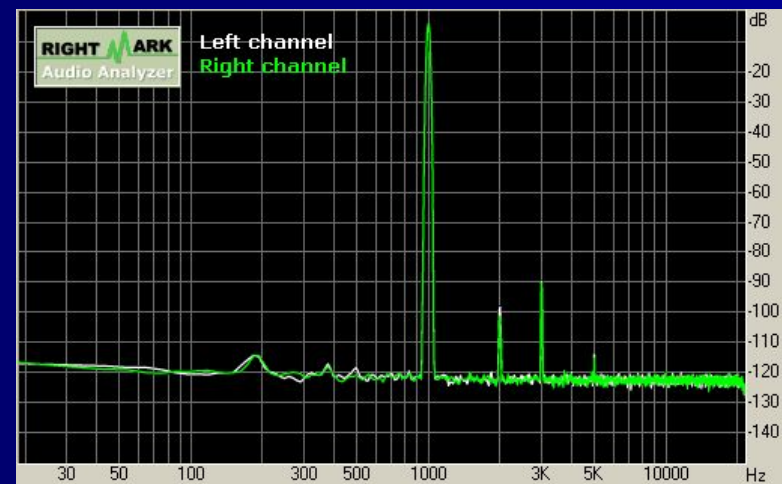
- Энергия сигнала равна энергии спектра
(возможно, с точностью до множителя,
зависящего от нормализации
в формулах преобразования Фурье)
- Применение теоремы для оценки энергии
различных частотных составляющих сигнала
- Пример:

вычисление THD

(total harmonic distortion)

$$THD = \frac{RMS_{distortion}}{RMS_{total}} \cdot 100\%$$

$$\sum_i x[i]^2 = \sum_k |X[k]|^2$$

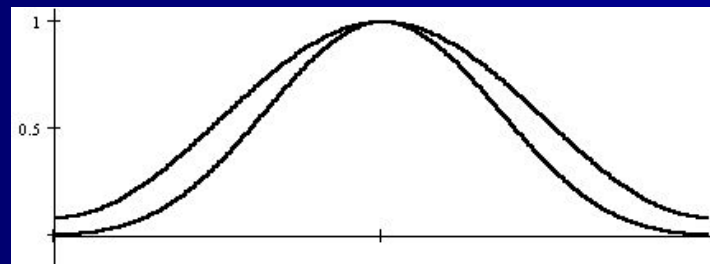


Спектральный анализ



- Как вычислить и отобразить спектр сигнала?
 1. Взять нужный отрезок сигнала длины 2^m ; если нужный отрезок короче – дополнить его нулями.
 2. Если нужно – умножить сигнал на весовое окно, плавно спадающее к краям. Обычно это улучшает свойства спектра.
 3. Вычислить FFT.
 4. Перевести комплексные коэффициенты в полярную форму: получить амплитуды.
 5. Отобразить график зависимости амплитуды от частоты.

Примеры весовых окон



Свойства ДПФ



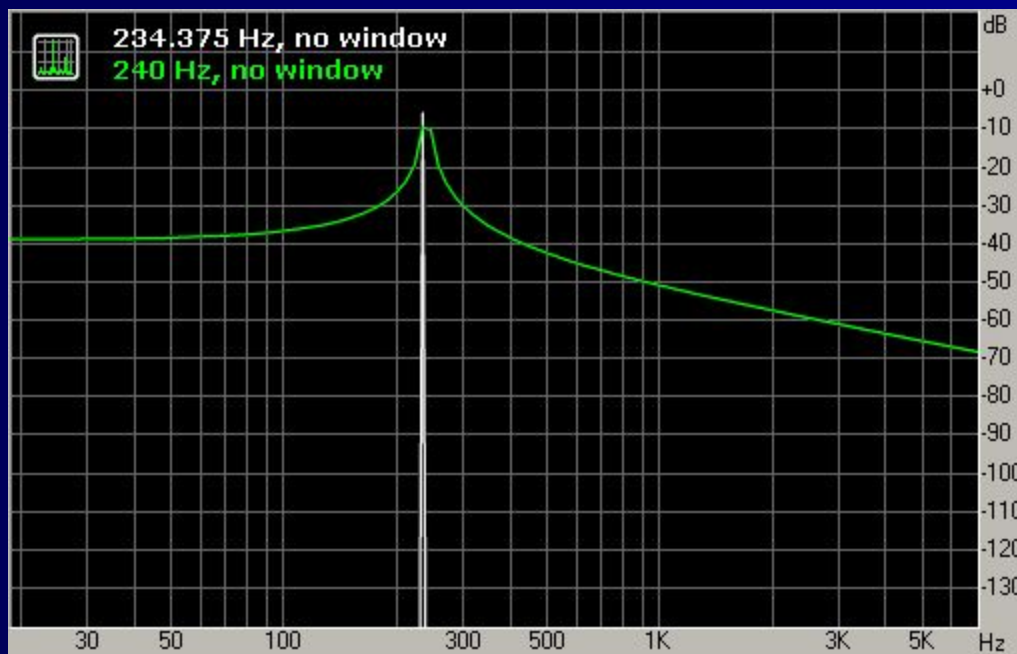
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} kn\right) \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi i}{N} kn\right)$$

- Линейность
- Комплексное ДПФ от вещественного сигнала обладает симметрией относительно коэффициента $k = N/2$. Таким образом, только половина коэффициентов являются значимыми.
- Периодическое продолжение сигнала
- Циклический сдвиг отсчётов сигнала не изменяет амплитудного спектра, а меняет только фазовый

Размытие спектра



- Как выглядит спектр синусоиды, если её частота совпадает/не совпадает с базисными частотами ДПФ?

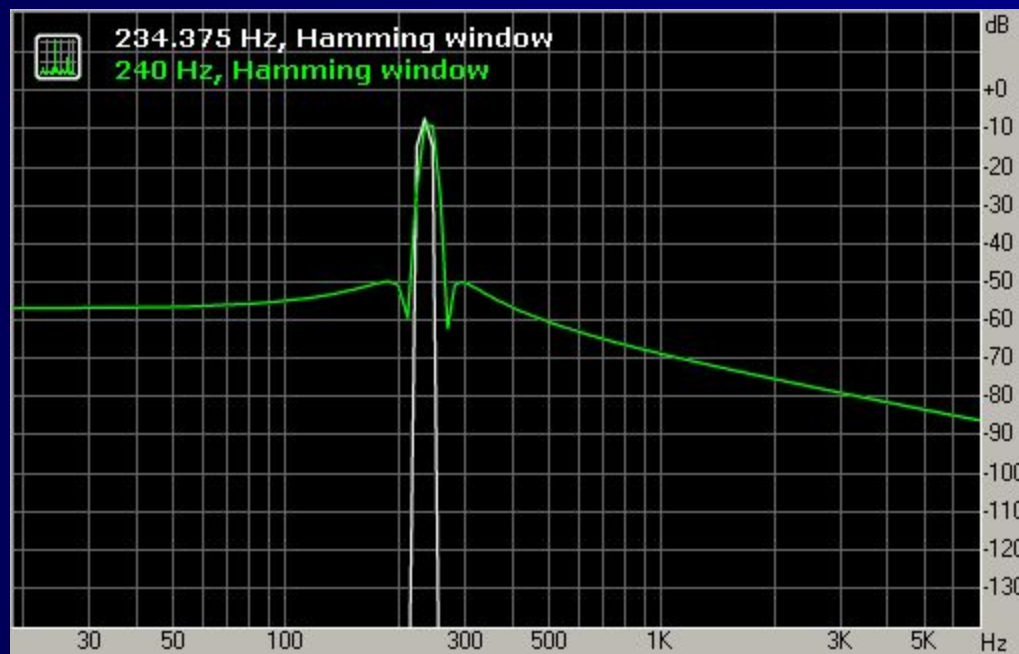


нет окна (прямоугольное окно)

Весовые окна



- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка

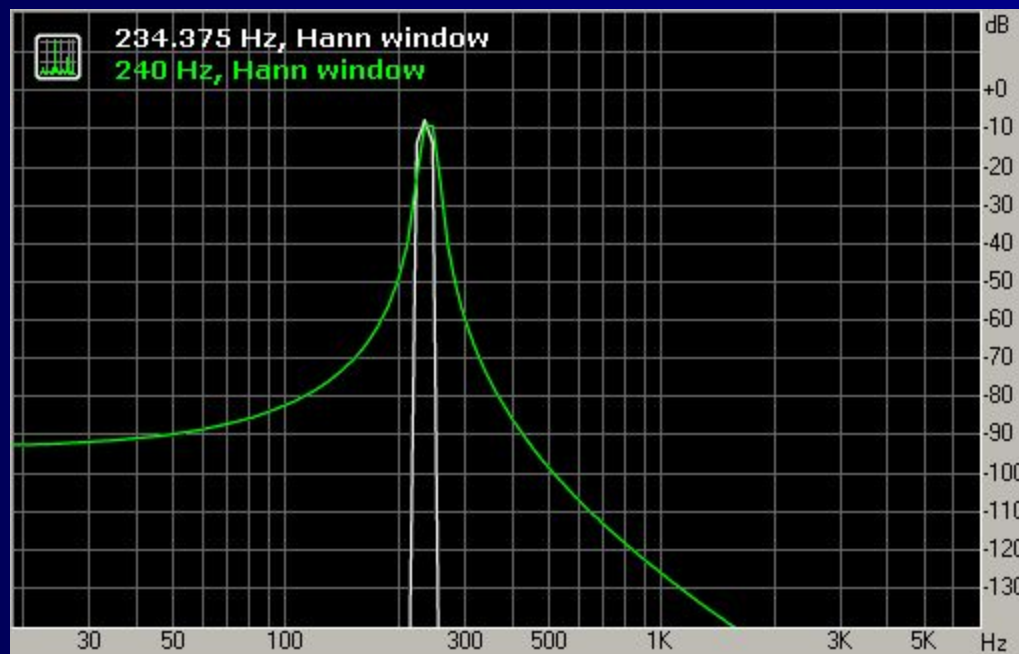


окно Хэмминга (Hamming)

Весовые окна



- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка

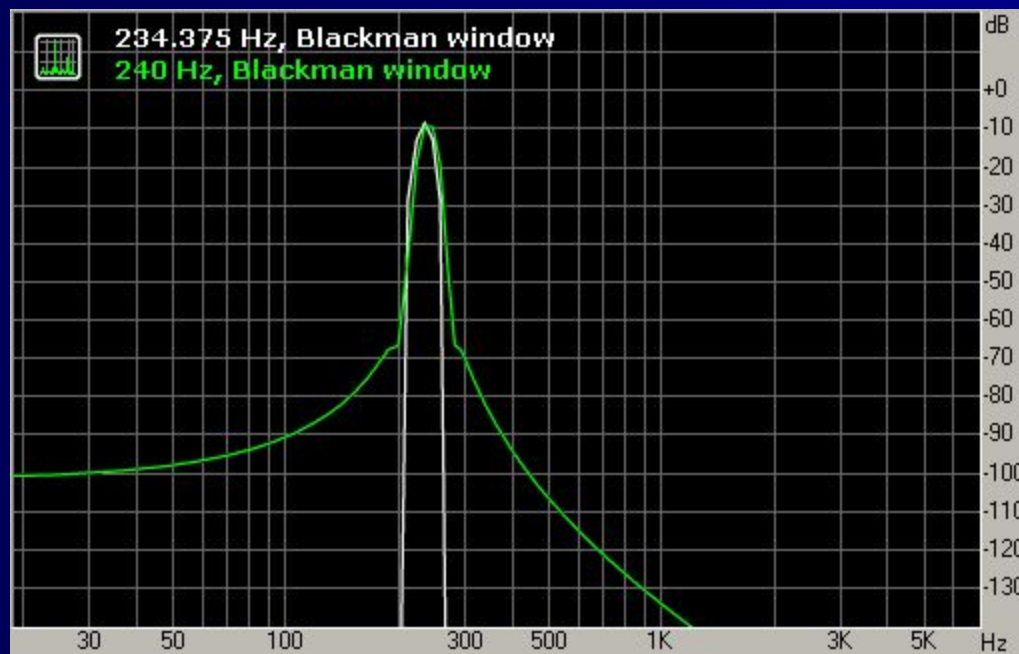


окно Хана (Hann)

Весовые окна



- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка

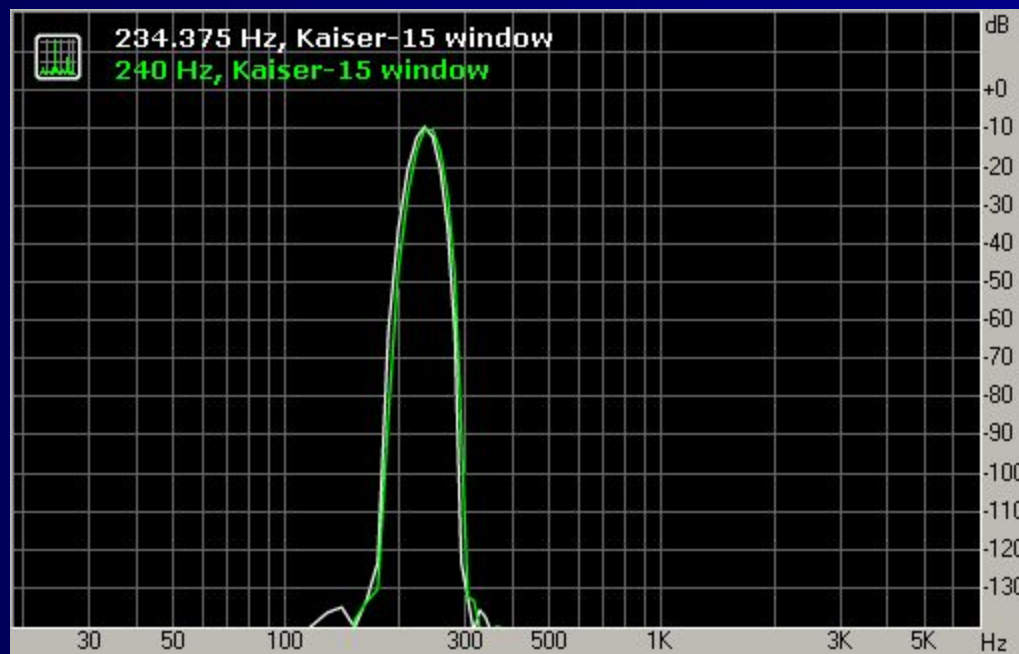


окно Блэкмана (Blackman)

Весовые окна

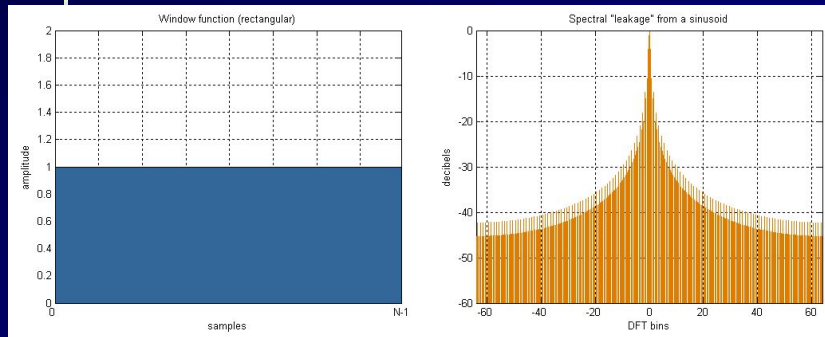


- Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка

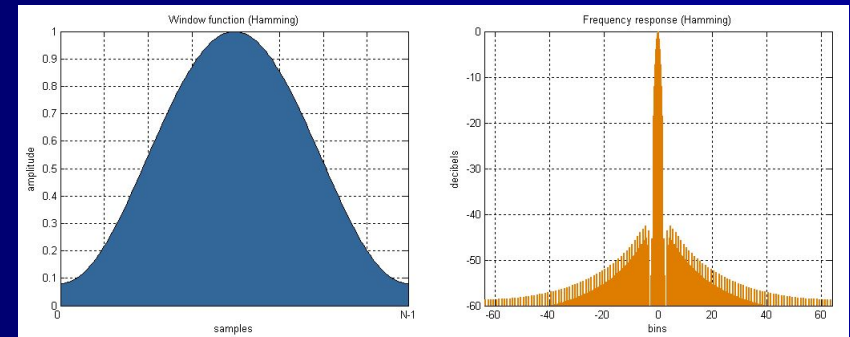


окно Кайзера (Kaiser), $\beta = 15$

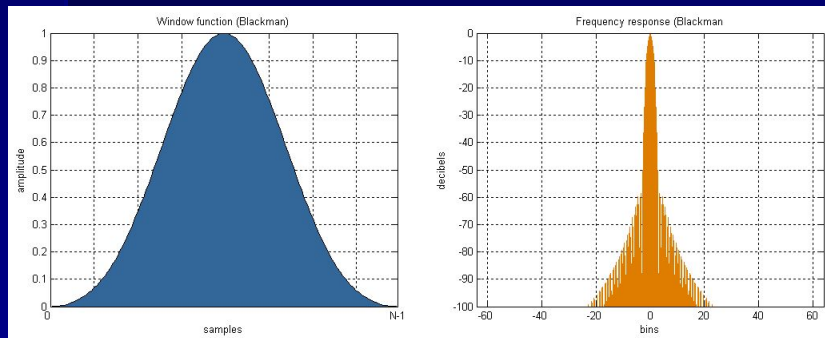
Весовые окна



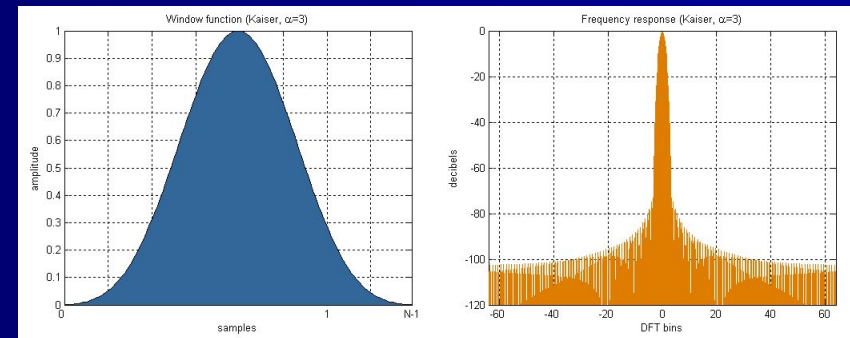
Прямоугольное (нет окна)



Hamming



Blackman



Kaiser

Спектральный анализ

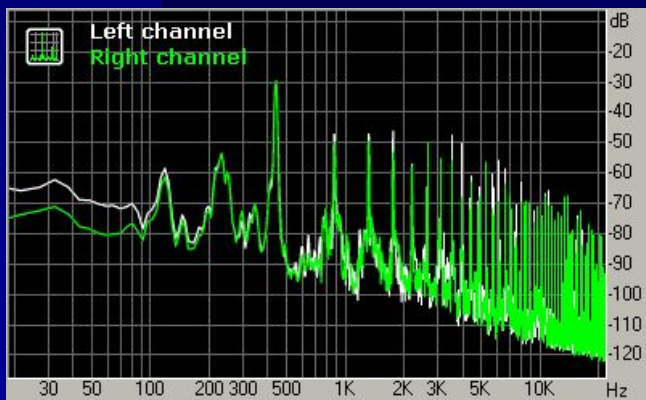


- Отображение спектра звука: спектрограмма
 - ▶ Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты
 - ▶ Низкие частоты – слева, высокие – справа
 - ▶ Часто применяется логарифмический масштаб частот и амплитуд: “log-log-спектрограмма”
 - ▶ Временное и частотное разрешение спектрограммы

Децибелы:

$$D = 20 \lg \frac{A_1}{A_0}$$

A_1 – амплитуда измеряемого сигнала,
 A_0 – амплитуда сигнала, принятого за начало отсчета (0 дБ)



Разница на 6 дБ – разница по амплитуде в 2 раза,
разница на 12 дБ – разница по амплитуде в 4 раза.

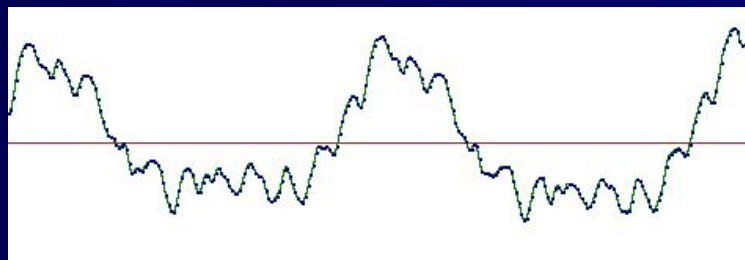
Часто за 0 дБ принимается либо самый тихий слышимый звук, либо самый мощный звук, который может воспроизвести аудиоустройство.

Спектральный анализ

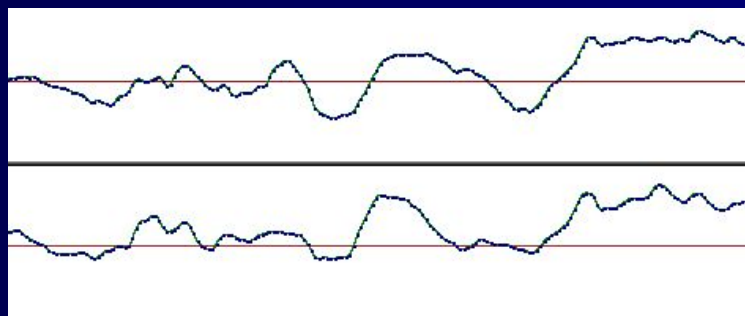
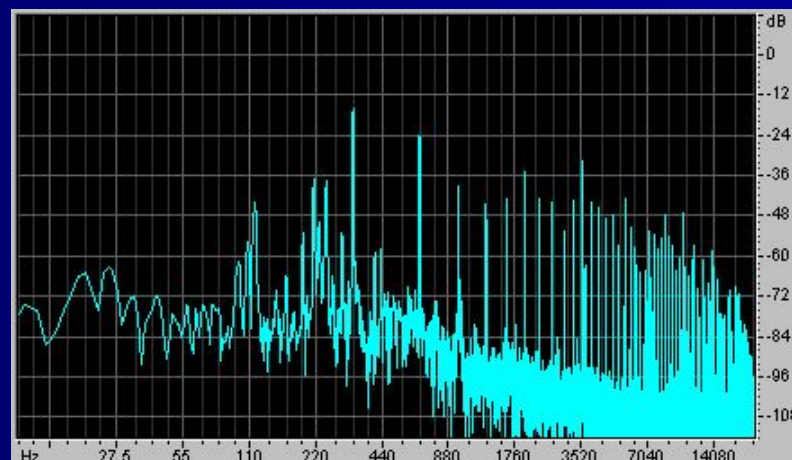


MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

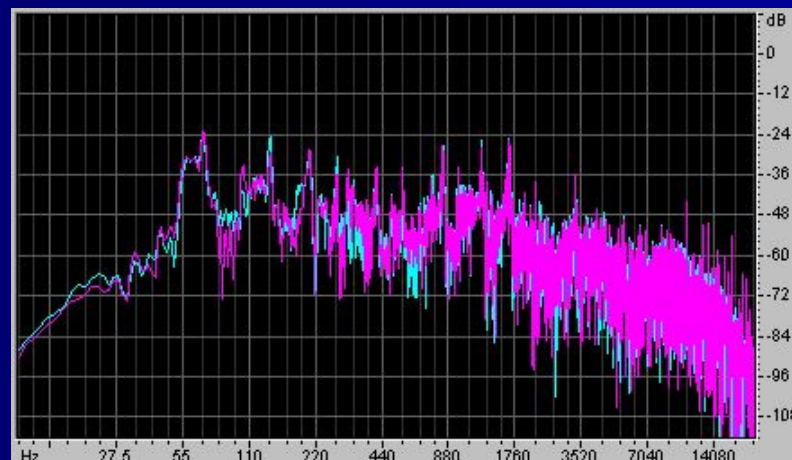
- Примеры звуков и их спектров



Нота на гитаре



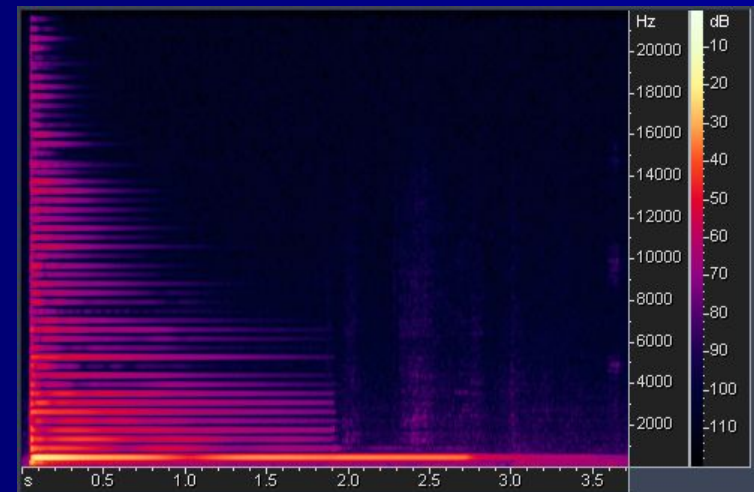
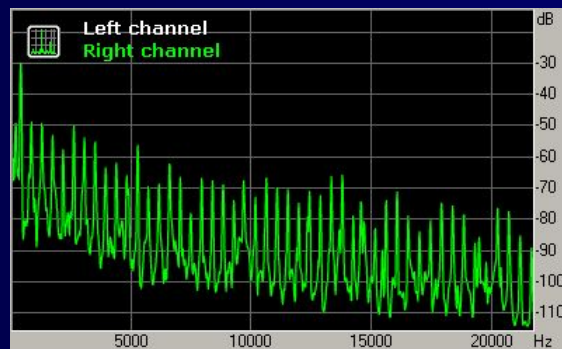
Песня (стерео запись)



Спектральный анализ

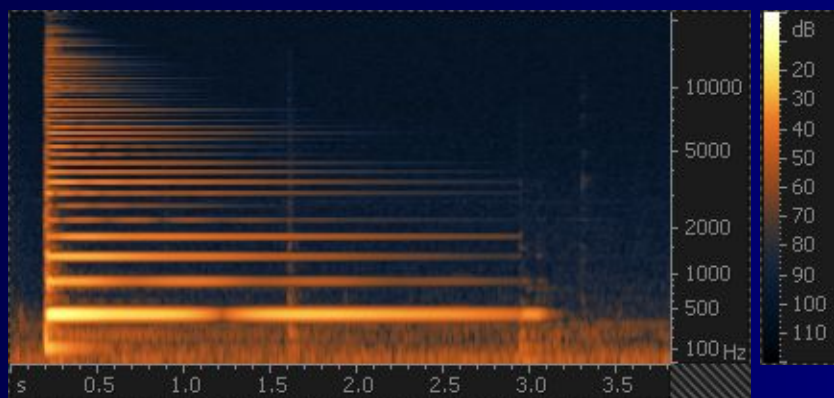
- Отображение спектра звука: спектрограмма (сонограмма)
 - ▶ Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты и от времени, показывает изменение спектра во времени
 - ▶ Short Time Fourier Transform (STFT)

$$STFT[n, \omega] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m] \cdot w[m] \cdot e^{-i\omega m}$$

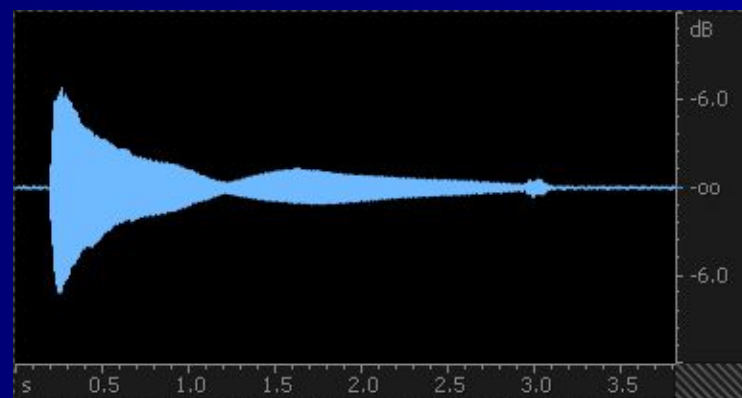


Спектральный анализ

- Отображение спектра звука: спектрограмма (сонограмма)
 - ▶ Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты и от времени, показывает изменение спектра во времени
 - ▶ Низкие частоты – снизу, высокие – сверху
 - ▶ Время идет справа налево
 - ▶ Амплитуда – яркость или цвет
 - ▶ Частотное и временное разрешение
 - ▶ Short Time Fourier Transform (STFT)



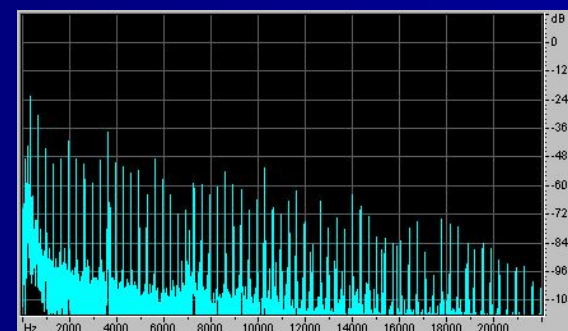
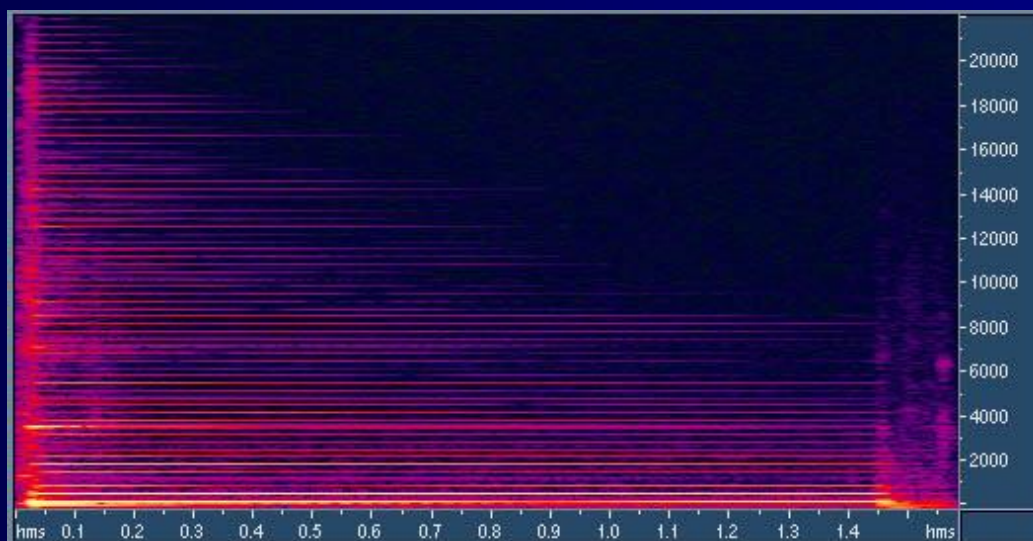
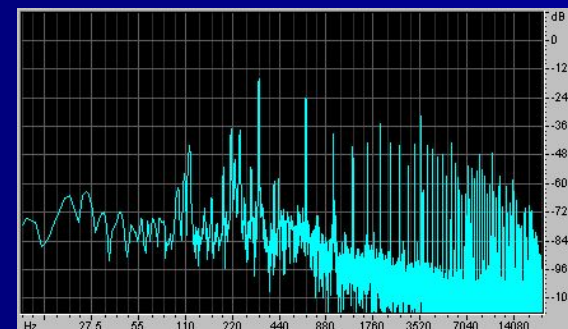
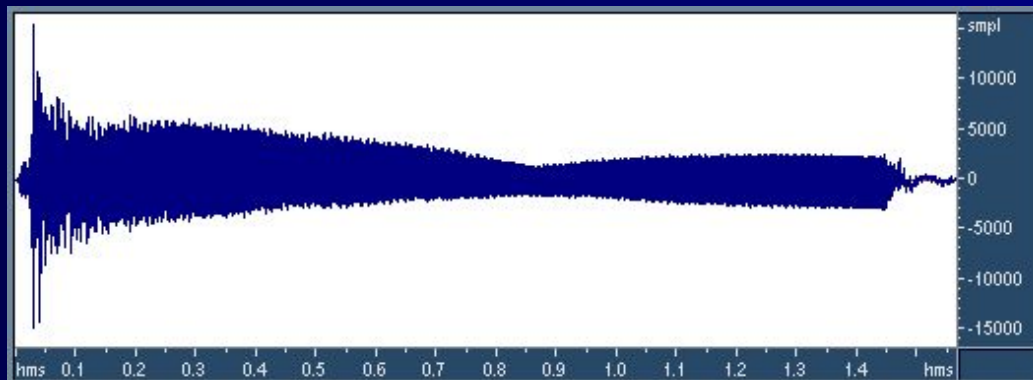
Спектрограмма



Осциллограмма (форма волны)

Спектральный анализ

- Примеры звуков и их спектрограмм



Нота на гитаре

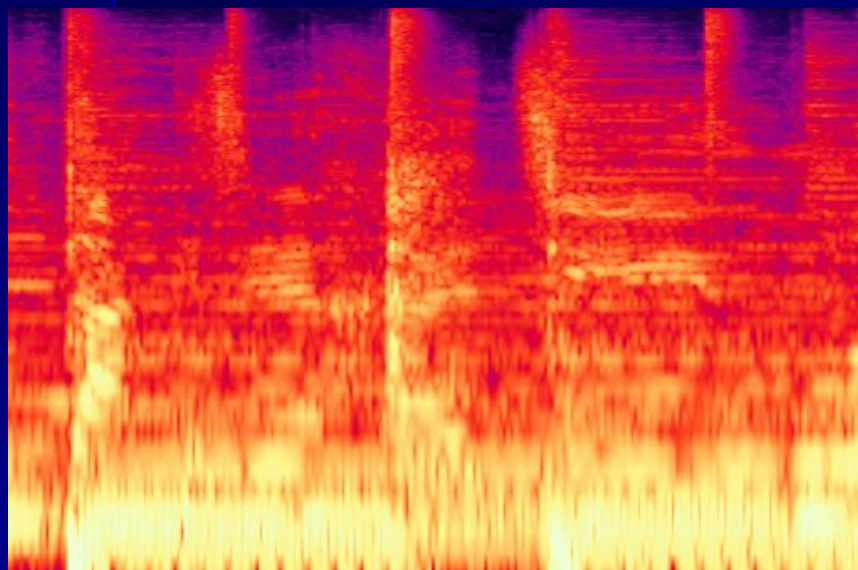
Спектральный анализ



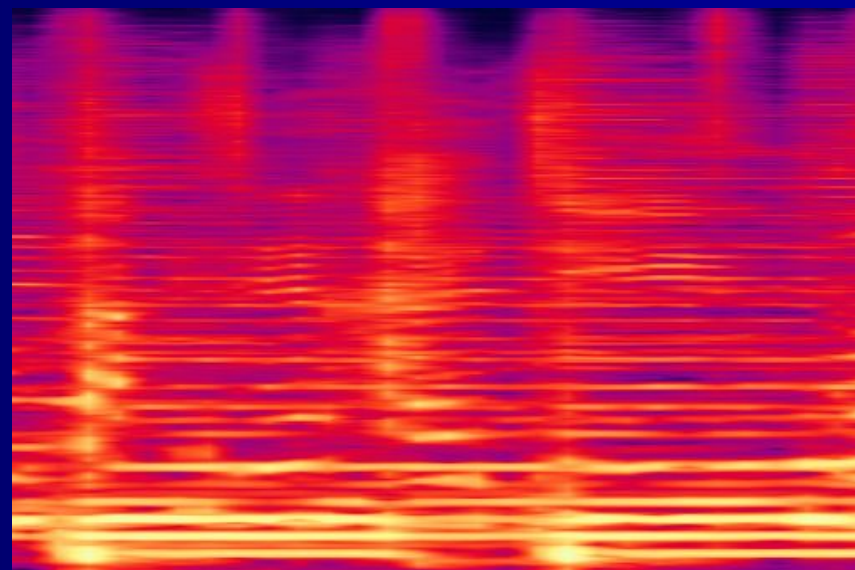
- Спектрограммы шума
- Типы шумов: белый (постоянная PSD), розовый (3 дБ/окт.), коричневый (6 дБ/окт.)
- Вариация и усреднение спектрограмм

Построение спектрограмм

- Мел-шкала частот
- Недостаточное частотное разрешение на НЧ, недостаточное временное разрешение на ВЧ

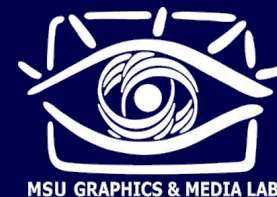


Обычная спектрограмма,
окно 512 точек

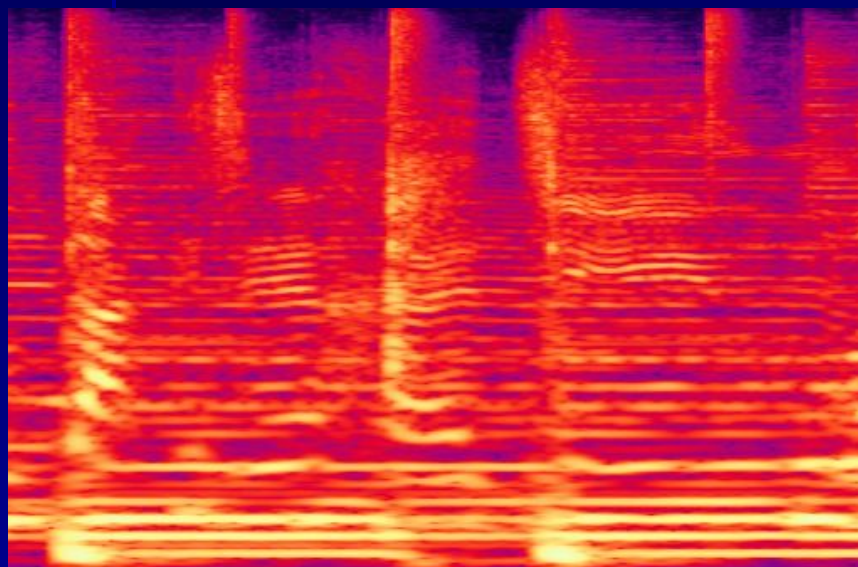


Обычная спектрограмма,
окно 4096 точек

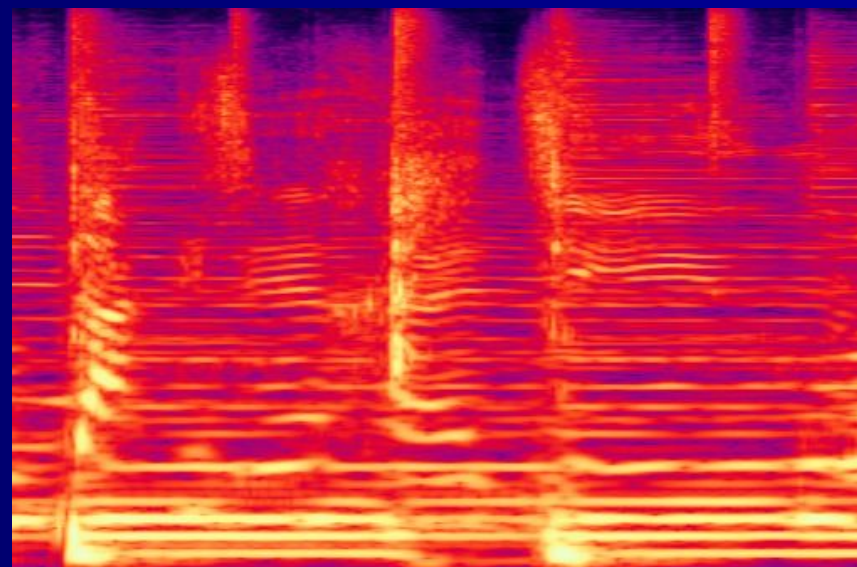
Построение спектрограмм



- Адаптивное частотно-временное разрешение спектрограмм
- Критерий оптимальности: максимально компактная локализация энергии (минимальное размытие спектрограммы)



Адаптивная спектрограмма,
разрешение зависит от частоты



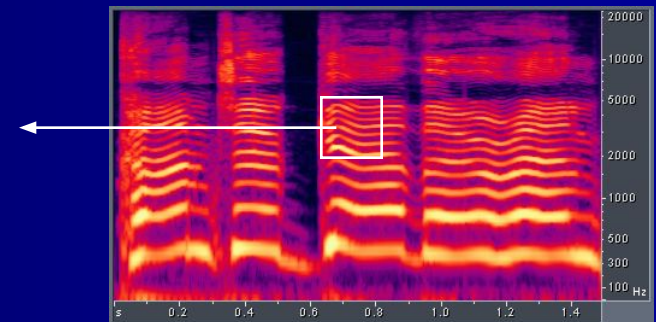
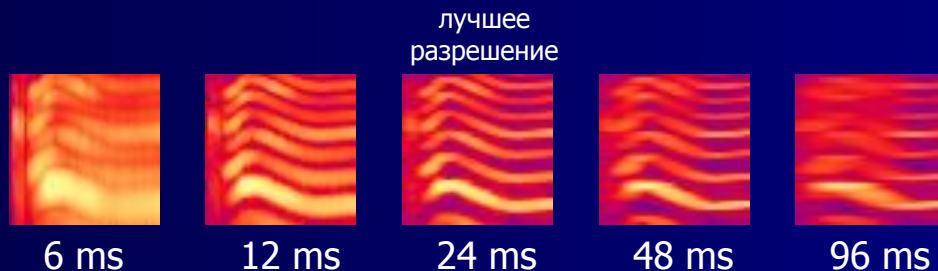
Адаптивная спектрограмма,
оптимальное разрешение

Построение спектрограмм

- Критерий оптимальности: максимальное компактирование (локализация) энергии

$$r_0 = \arg \min_r S_r \quad S_r = \frac{\text{norm}_{L1}(a)}{\text{norm}_{L2}(a) \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_{i,r}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n a_{i,r}^2}}$$

Здесь $a_{i,r}$ – амплитуды STFT в блоке разрешения r ,
 S_r – мера размытости спектра для данного разрешения r ,
 r_0 – лучшее разрешение, для которого размытость минимальна.



Свертка и фильтрация



MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

■ Основные термины

- ▶ Свертка (*convolution*), фильтрация (*filtering*)
- ▶ Фильтр (*filter*), ядро фильтра (*kernel*)
- ▶ Импульсная, частотная и фазовая характеристики (*impulse, frequency, phase response*)

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

■ Применения фильтрации

- ▶ Анти-алиасинг изображений, нахождение границ
- ▶ Звуковой эквалайзер
- ▶ Моделирование реверберации помещения

Быстрая свертка



MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

- Прямое вычисление: $M \cdot N$ умножений (M – размер ядра свертки, N – длина сигнала)
- Теорема свертки: свертка* во временной области эквивалентна умножению в частотной области, умножение во временной области эквивалентно свертке* в частотной области.
- Алгоритм быстрой свертки:
 1. Вычислить спектры сигнала и ядра свертки (FFT)
 2. Перемножить эти спектры
 3. Вернуть полученный спектр во временную область (IFFT)
- Почему это быстрее? Потому что переход в частотную область и обратно быстрый: FFT

* Речь идет о т.н. круговой свертке

Быстрая свертка



- Как изменяется длина сигнала при свертке? Она увеличивается на длину ядра минус 1 (т.к. каждый входной отсчет превращается в ядро и они складываются с наложением)
- Значит, если взять сигнал длины N , ядро длины M и произвести свертку через FFT размера N , то результат свертки (длины $N+M-1$) не поместится в результате IFFT (длины N). Произойдет **круговая свертка** (заворачивание результата по времени).
- Следовательно, для предотвращения круговой свертки надо взять размер FFT как минимум $N+M-1$

Вычисление свертки



- Быстрая свертка через FFT $IFFT(FFT(x(n)) \cdot FFT(h(n)))$
 - ▶ Неоптимальна по скорости, когда длины сигнала и ядра сильно различаются
 - ▶ Неприменима при потоковой обработке (*когда входной сигнал поступает в реальном времени и его длина неизвестна*)
- Секционная свертка
 - ▶ Используем свойство линейности и инвариантности к сдвигу: разбиваем сигнал на блоки и делаем быструю свертку блочно
 - ▶ Увеличение длины каждого блока на $M-1$ → сложение результатов с перекрытием (*метод OLA: overlap-add*)

Подробности – см. в методичке

Разбиение ядра



- Проблема секционной свертки: сигнал надо накапливать блоками, сравнимыми по размеру с длиной ядра свертки (*иначе – неэффективно*) → задержки при real-time
- Partitioned convolution (*свертка с разбиением ядра*)
 - ▶ Цель – уменьшение задержки
 - ▶ Недостаток – некоторое увеличение времени обработки

Секционная свертка: $x(n) * h(n) = (x_1(n) + \dots + x_m(n) + \dots) * h(n)$

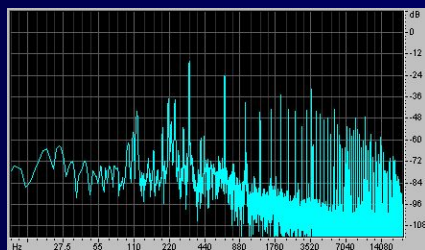
Разбиение ядра: $x(n) * h(n) = (x_1(n) + \dots + x_m(n) + \dots) * (h_1(n) + \dots + h_k(n))$

(раскрываем скобки)

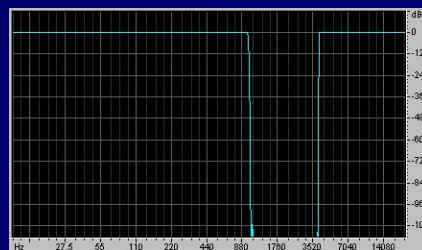
Частотная характеристика



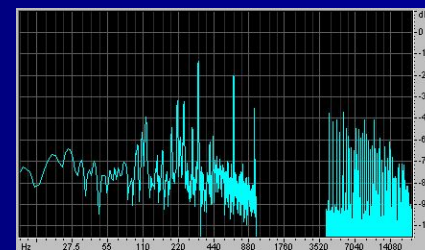
- Получение частотной характеристики по ядру
 1. Дополнение нулями
 2. FFT
 3. Берем модули комплексных коэффициентов
- Свертка = перемножение частотных характеристик



*

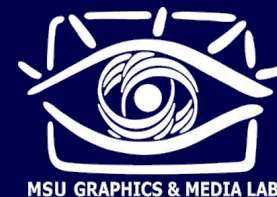


=

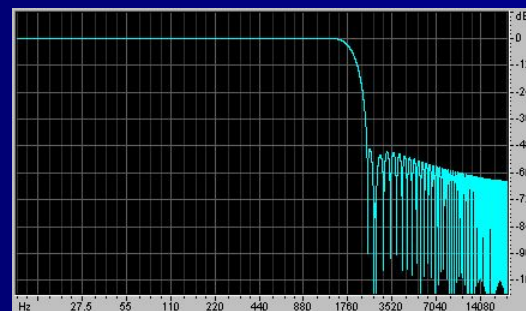
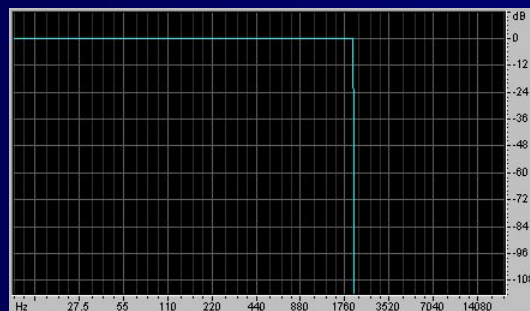


Перемножение амплитуд = сложение децибелов

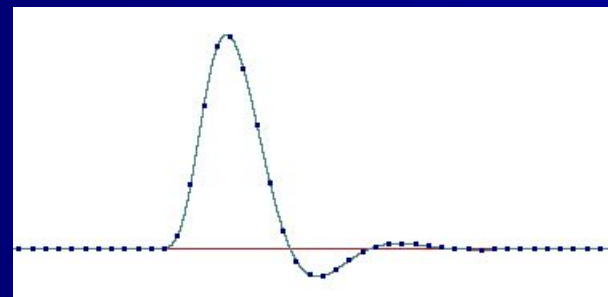
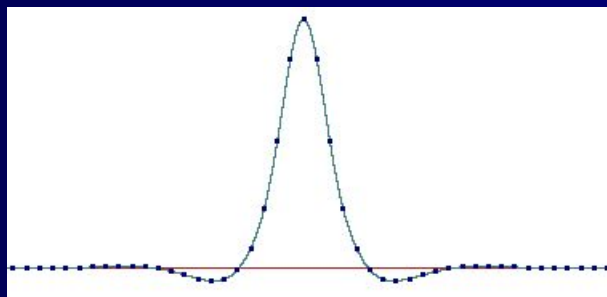
Виды фильтров



- Идеальные и реальные фильтры, виды искажений



- FIR (*finite impulse response*) и IIR (*infinite i. r.*) фильтры
- Линейность ФЧХ («линейность фазы»)



Построение фильтров



- Простейший НЧ-фильтр – windowed sinc

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\alpha n} \cdot w(n)$$

- Метод спектральной инверсии*
 - ▶ Вычитание фильтра из единичного импульса – вычитает его АЧХ из единичной
 - ▶ Инверсия каждого второго отсчета в фильтре – разворачивает АЧХ фильтра по частоте

* Применим для фильтров с линейной ФЧХ

Построение фильтров



- **Метод весового окна**
 - ▶ Построение фильтра с линейной фазой по произвольной заданной частотной характеристике
 - ▶ Частотная характеристика приближается с любым заданным уровнем точности
- **Более сложные методы**
 - ▶ Чуть меньшее число точек ядра при соблюдении той же частотной характеристики
 - ▶ Специальные требования (*к фазовой характеристике, к монотонности частотной характеристики и т.п.*)

Построение фильтров



- **Метод весового окна** (*идея метода – взять обратное FFT от требуемой АЧХ*)
 1. Дана требуемая АЧХ (частотная характеристика)
 2. Произвольно выбираем размер FFT N и берем амплитуды коэффициентов Фурье по АЧХ ($N/2+1$ точка)
 3. Записываем нули в фазы и делаем IFFT
 4. Циклический сдвиг ядра
 5. Применение весового окна
 6. Контроль реальной полученной АЧХ (*см. получение АЧХ по ядру фильтра*)
 7. Если АЧХ недостаточно соответствует требованиям – увеличиваем размер FFT и снова конструируем фильтр

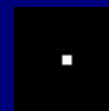
Подробности – см. в методичке

Двумерные фильтры



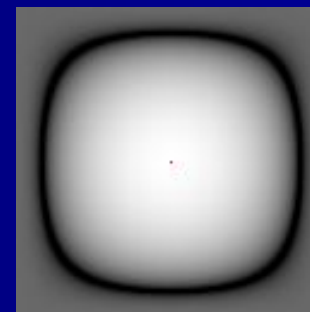
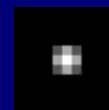
- Единичный импульс

$$\delta[m, n]$$



- Простейшее размытие

$$Ker[k, p] = \frac{1}{15} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

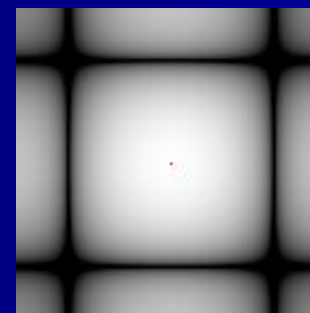


Двумерные фильтры



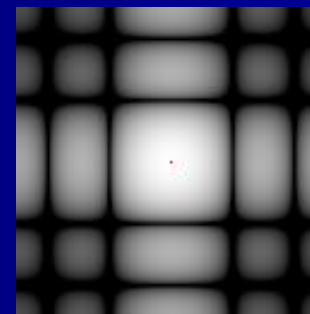
- Константное размытие 3x3

$$Ker[k, p] = \frac{1}{Sum}$$



- Константное размытие 5x5

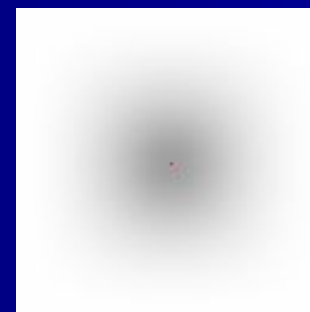
$$Ker[k, p] = \frac{1}{Sum}$$



Двумерные фильтры

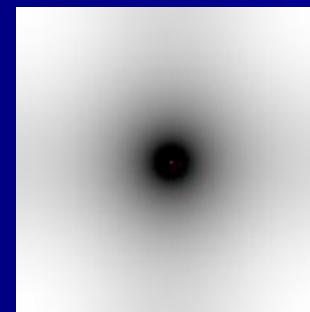
- Повышение четкости

$$\frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 22 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$



- Выделение границ

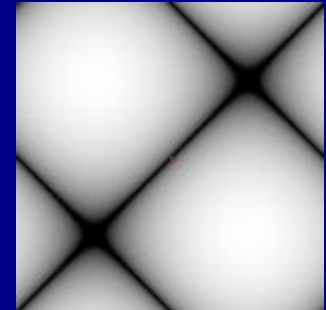
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$



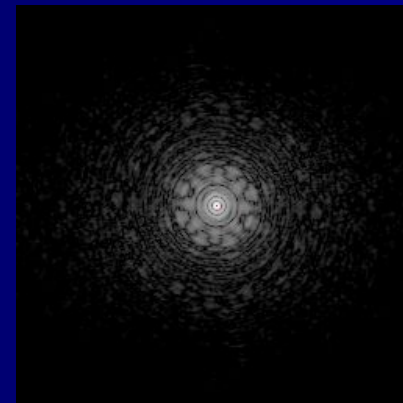
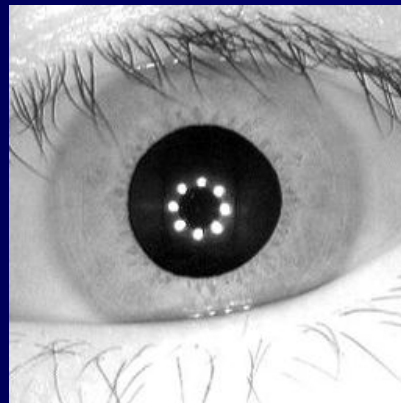
Двумерные фильтры

- Тиснение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Пример спектра изображения



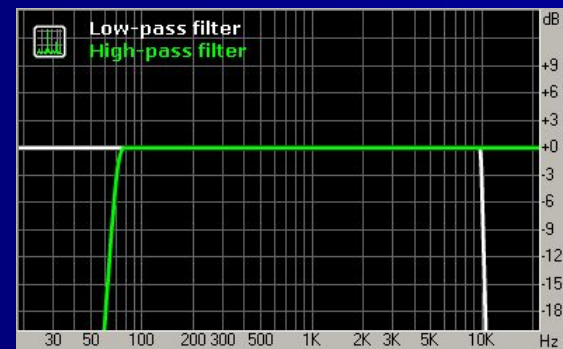
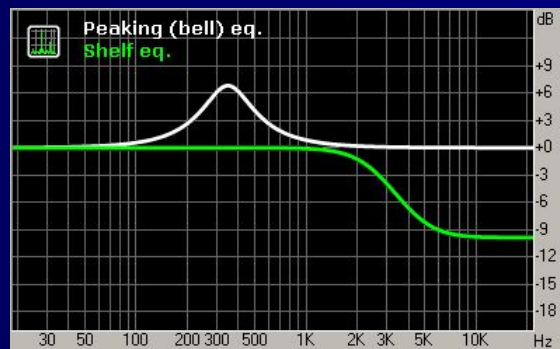
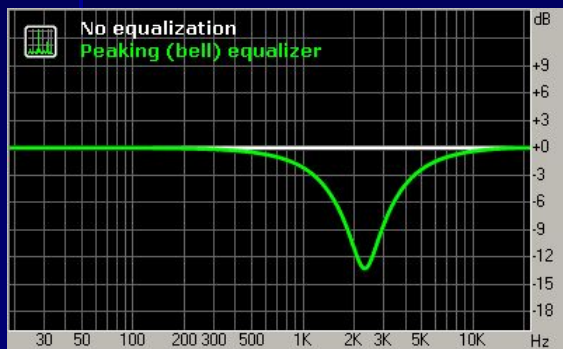
Эквалайзеры



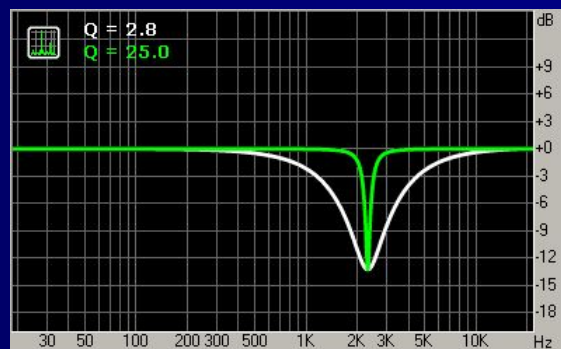
MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

- Эквалайзер – устройство коррекции тембра сигнала, изменяющее амплитуды его частотных составляющих
- Изначально применялись для выравнивания АЧХ неидеального звукового тракта
- Вскоре стали использоваться и творчески, для создания нужных тембров или аккуратного совмещения инструментов в фонограмме

- Амплитудно-частотная характеристика (frequency response)



- Добротность (Q) определяет ширину полосы воздействия



Виды эквалайзеров



MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

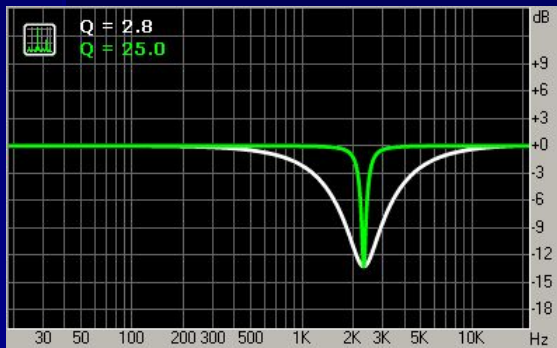
- По управлению АЧХ:
 - ▶ Параметрические: можно выбирать одну из имеющихся форм АЧХ и задавать ее параметры: центральную частоту, коэффициент усиления и добротность
 - ▶ Графические: пользователь «рисует» требуемую АЧХ непосредственно на дисплее или с помощью набора регуляторов усиления на различных частотах
 - ▶ Параграфические: гибрид предыдущих
- По принципу действия:
 - ▶ Аналоговые: состоят из конденсаторов, катушек индуктивности, операционных усилителей
 - ▶ Цифровые: используют FIR или IIR фильтры

ФЧХ и ГВЗ

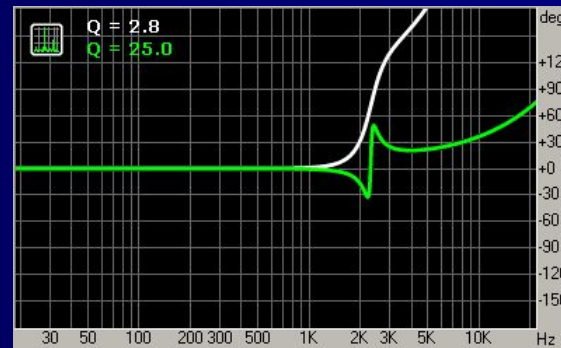


MSU GRAPHICS & MEDIA LAB

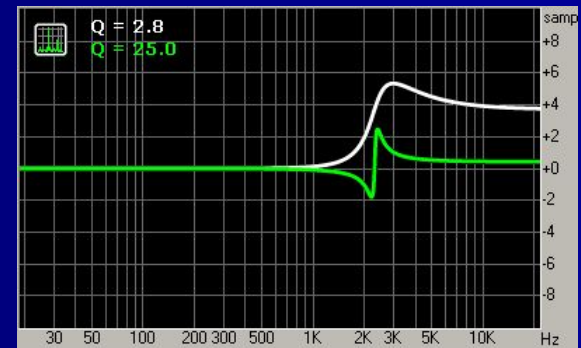
- Фазово-частотная характеристика (*phase response*)
 - ▶ Изменение фазы в зависимости от частоты
- Групповое время задержки (*group delay*)
 - ▶ Задержка различных частотных составляющих



АЧХ



ФЧХ



ГВЗ

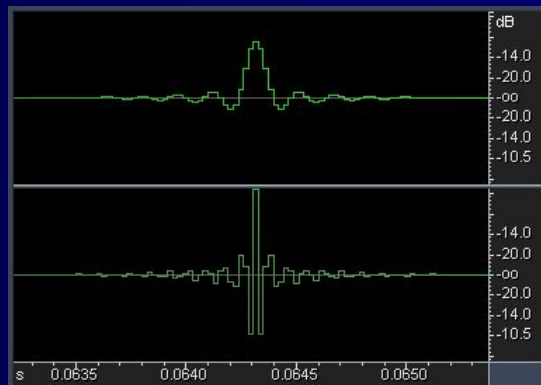
Импульсная характеристика



- Конечная (FIR)
 - ▶ Легко достичь линейной ФЧХ
- Бесконечная (IIR)
 - ▶ Нелинейная ФЧХ
- Звон фильтров (ringing)

$$y_i = \sum_{-M \leq k \leq M} x_{i-k} h_k$$

$$y_i = \sum_{0 \leq k \leq N} b_k x_{i-k} + \sum_{1 \leq k \leq N} a_k y_{i-k}$$



Линейная ФЧХ

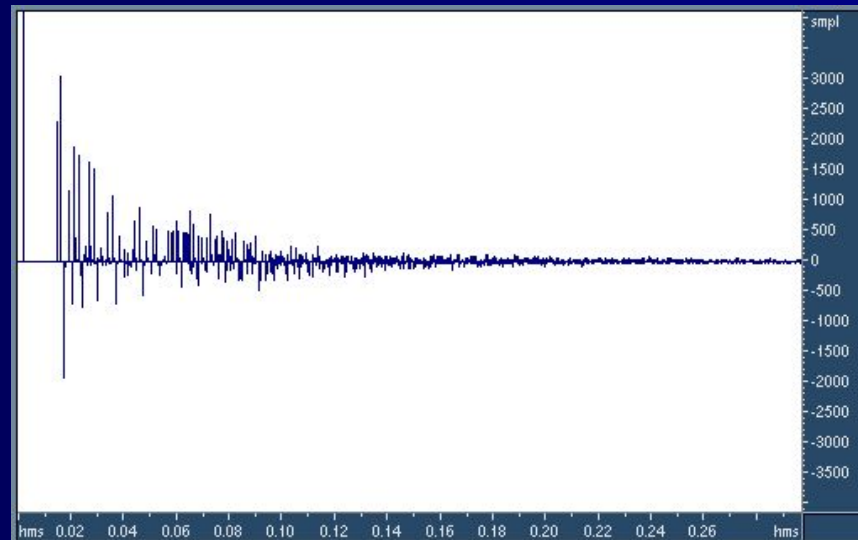


Нелинейная ФЧХ

Измерение реверберации



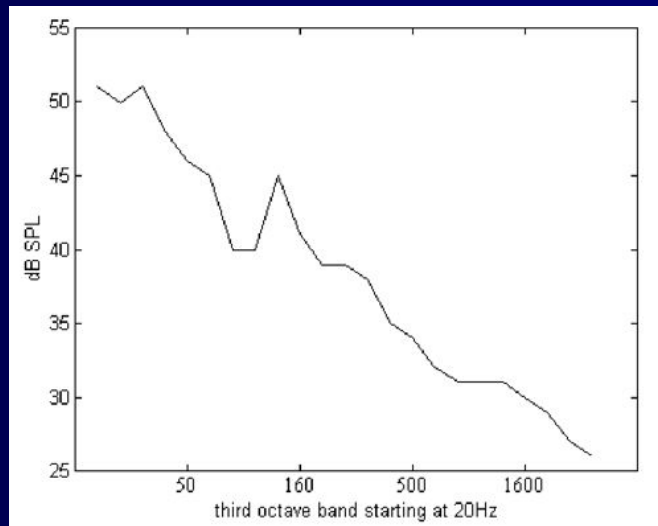
- Импульсный отклик помещения
- Реверберация: прямой звук, ранние и поздние отражения



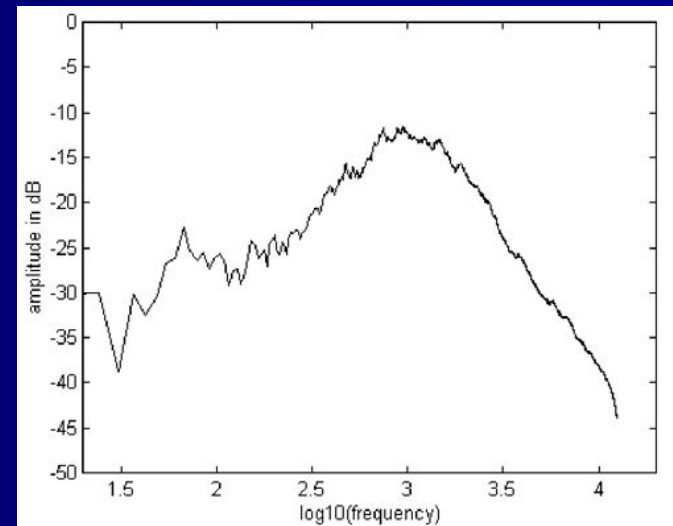
Измерение реверберации



- Способы измерения импульсного отклика:
 - ▶ Единичный импульс (*плохое соотношение сигнал/шум*)
 - ▶ Звук стартового пистолета / лопающегося воздушного шарика (*неровный спектр, маленькая энергия на НЧ*)



Шум измеряемого зала



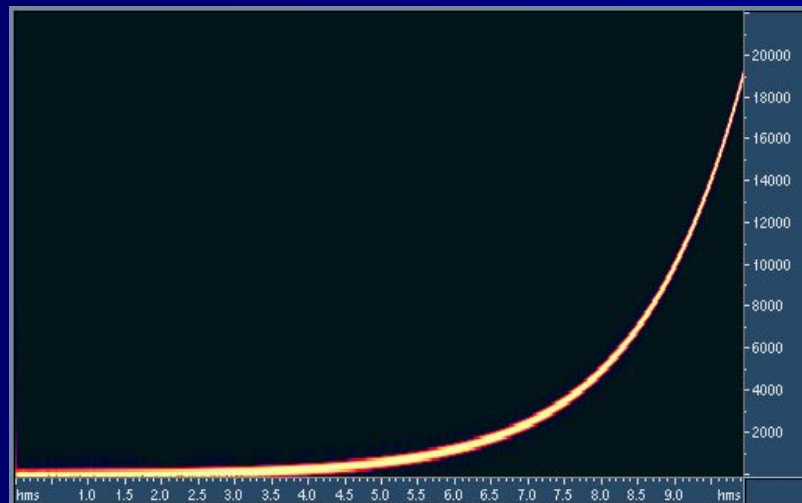
Стартовый пистолет

Измерение реверберации



- Способы измерения импульсного отклика:
 - ▶ Белый шум, MLS-последовательности (*чувствительны к нелинейным искажениям*)
 - ▶ Скользящий тон (swept sine, «плавающий синус»)

- Деконволюция
(обратная свертка)



Скользящий тон

Реверберация



- Что почитать:
 - ▶ Дэвид Гризингер: <http://world.std.com/~griesngr/>
 - ▶ Ирина Алдошина: <http://www.625-net.ru/archive/z0803/aldo.htm>