

**Описание областей влияния базисных вейвлет-функций при помощи ИТ и построение решения задачи Дирихле для некоторых специальных областей.**

**Магистрант  
кафедры теории функций  
Заренок Максим  
Александрович**

**Руководители:  
доцент кафедры теории  
функций  
Рогозин Сергей Васильевич,**



# Содержание работы.

1. Цель работы.
2. Основные определения.
3. Задача Дирихле и ее решение.
4. Основные результаты.
5. Список литературы.



## Цель работы:

- решение задачи Дирихле для области ограниченной концентрическими окружностями в терминах вейвлет-анализа.

Решение поставленной задачи достигается при помощи определения зон влияния базисных вейвлет-функций и, в частности, слагаемых, содержащихся в этих функциях, т.к. вейвлет-базисы могут быть хорошо локализованными как по частоте, так и по времени.



# Основные определения.

**Определение.** Если  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию «допустимости»:

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

то  $\psi$  называется «базисным вейвлетом».

Относительно каждого базисного вейвлета интегральное преобразование определяется формулой

$$(W_\psi f)(a, b) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$ .



**Определение.** Тождественно не равная нулю функция  $\omega \in L^2(\mathbb{R})$  называется функцией-окном, если  $x\omega(x)$  так же принадлежит  $L^2(\mathbb{R})$ . Центр и радиус функции-окна определяются как

$$t^* := \frac{1}{\|\omega\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |\omega(x)|^2 dx$$

$$\Delta_\omega := \frac{1}{\|\omega\|_2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |\omega(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$

соответственно; ширина функции окна равняется  $2\Delta_\omega$ .



# Представление решения задачи Дирихле для концентрического кольца

- Задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta U(z) = 0 & (z \in R_\rho) \\ u(e^{ix}) = \varphi(x) \\ u(\rho e^{ix}) = \varphi_\rho(x) \end{cases}$$

- Решение

$$U(z) = v_0 + \sum_{n=0}^{\infty} V_n(z)$$

где функции  $V_n$  выражаются через элементы базиса пространств гармонических в кольце функций

$$\{ \ln|z|, 1, \alpha_n(z), \tilde{\alpha}_n(z), \alpha_n(\rho/z), \tilde{\alpha}_n(\rho/z); n \in \mathbb{Z}_+ \}$$



# Основные результаты.

Начнем исследование с вычисления координат центра области влияния слагаемых входящих в базисную функцию

$$\begin{aligned} t^* &= \iint_{|z|<1} z |\beta_n^v(z)|^2 dz = B \iint_{|z|<1} z |z|^{2v} (\cos(vx))^2 dz = \\ &= B \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos x + ri \sin x) r^{2v} \cos^2(vx) r dr dx = \\ &= B \int_0^1 r^{2v+2} dr \int_0^{2\pi} (\cos x + i \sin x) \cos^2(vx) dx \end{aligned}$$

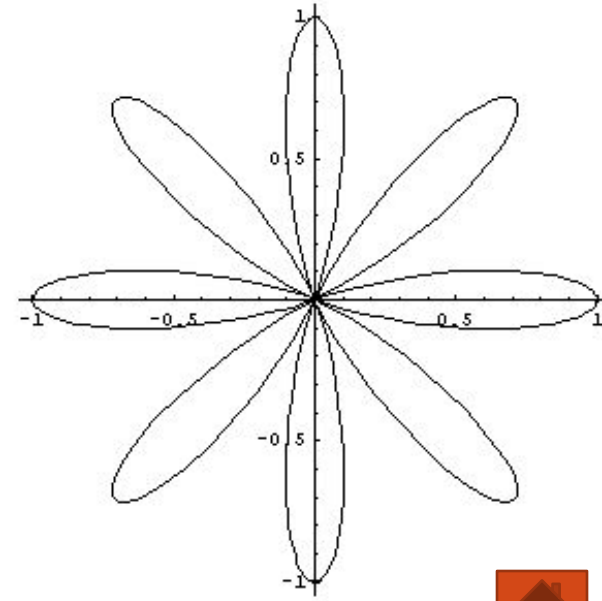
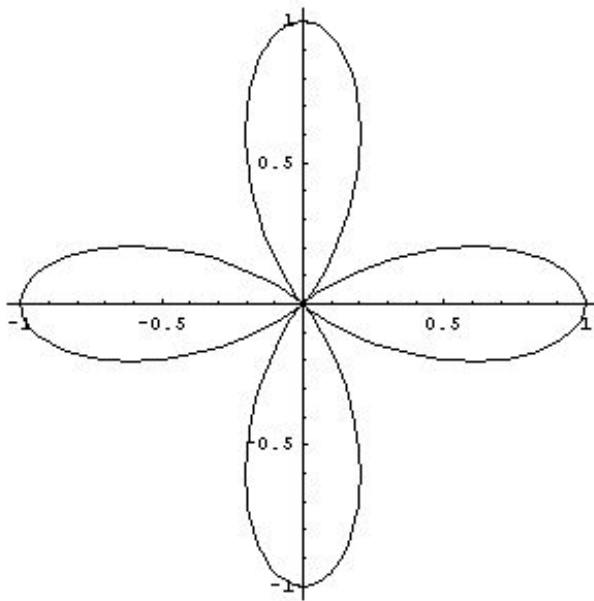
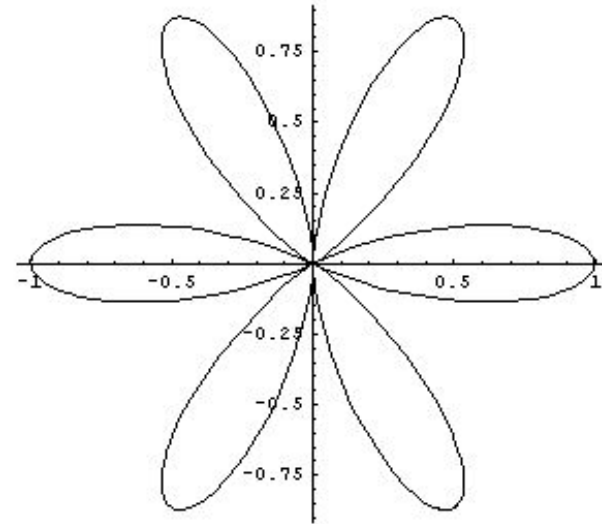
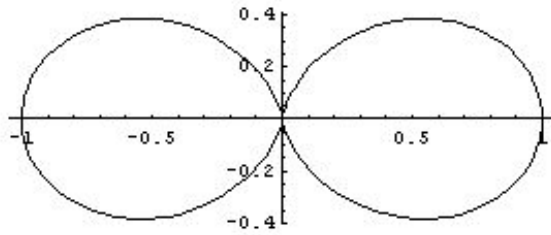
$$B = \tilde{\Theta}_\varepsilon \left( \frac{v}{2j+1} \right) \cos \frac{2\pi v(k+1/2)}{2j+1}$$

Получаем, что  $\int_0^1 r^{2v+2} dr = \frac{1}{3+2v}$  и

$$\int_0^{2\pi} (\cos x + i \sin x) \cos^2(vx) dx = 0$$



# функции





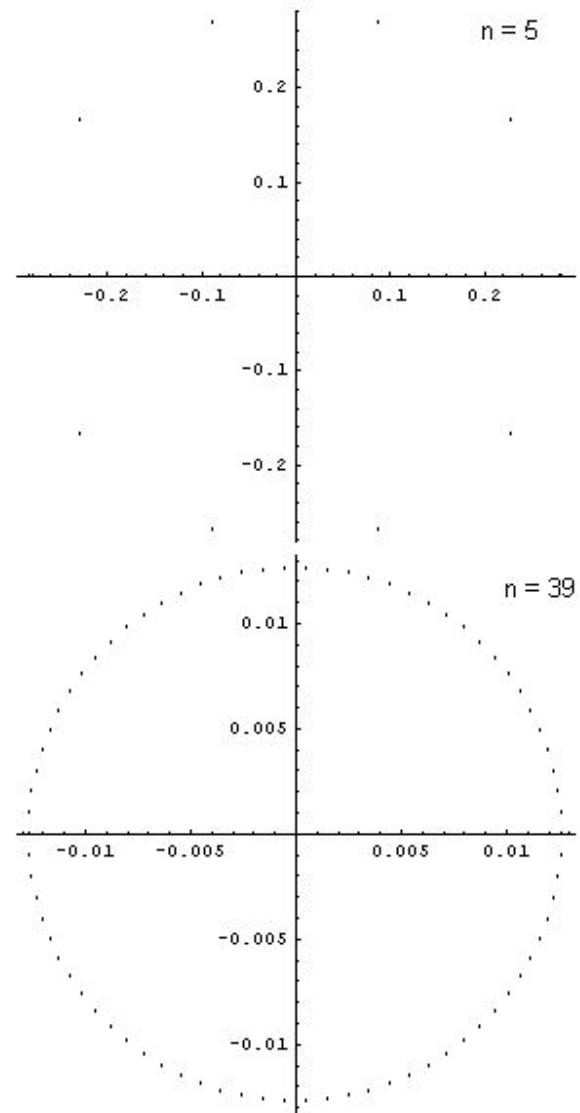
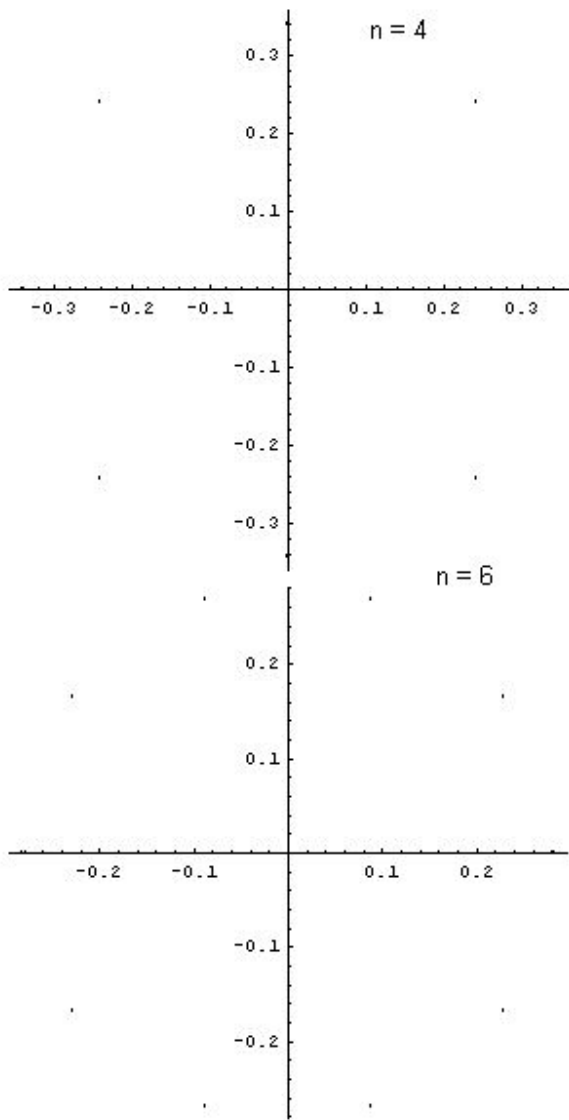
Переходим к интегрированию по круговому сектору,  
 градусная мера, которого равна  $\frac{\pi}{\nu}$ .

$$t_{\beta_n^{\nu}}^l = \frac{1}{\|\beta_n^{\nu}\|_2^2} \int_{-\frac{\pi}{2\nu} + \frac{i\pi}{\nu}}^{\frac{\pi}{2\nu} + \frac{i\pi}{\nu}} z |\beta_n^{\nu}(z)|^2 dz = \frac{4\nu^2}{4\nu^2 - 1} \sin \frac{\pi}{2\nu} e^{\frac{i\pi}{\nu}}$$

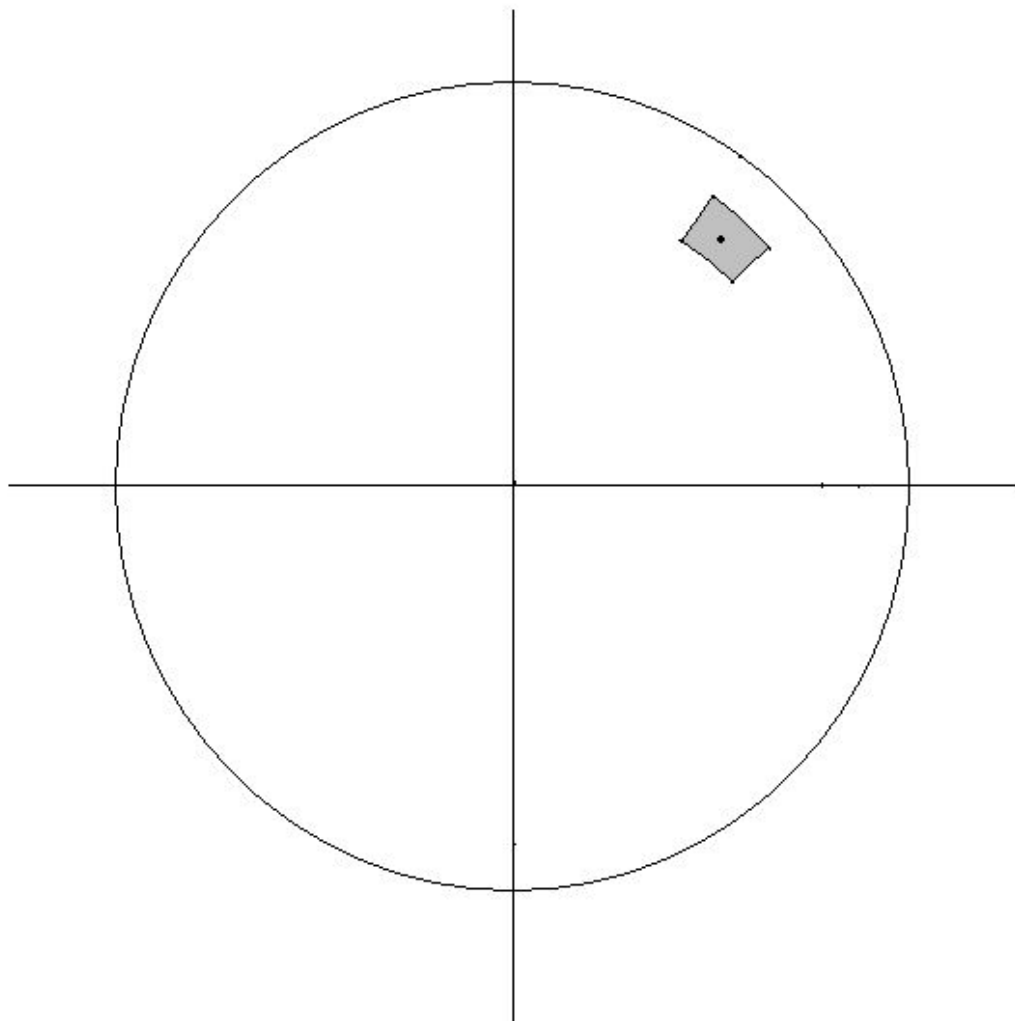
т.е.  $\nu$ -ое слагаемое  $n$ -ой базисной функции имеет  
 $2\nu$  центров окон влияния лежащих на окружности.



# Положение центров областей ВЛИЯНИЯ.

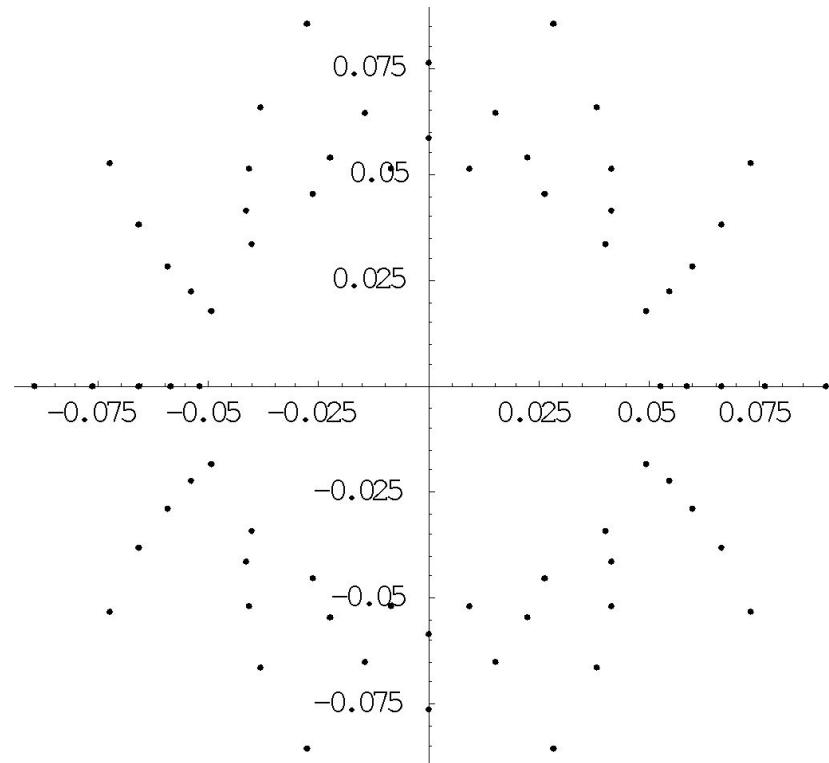


**Область влияния будет иметь вид усеченного кругового сектора.**

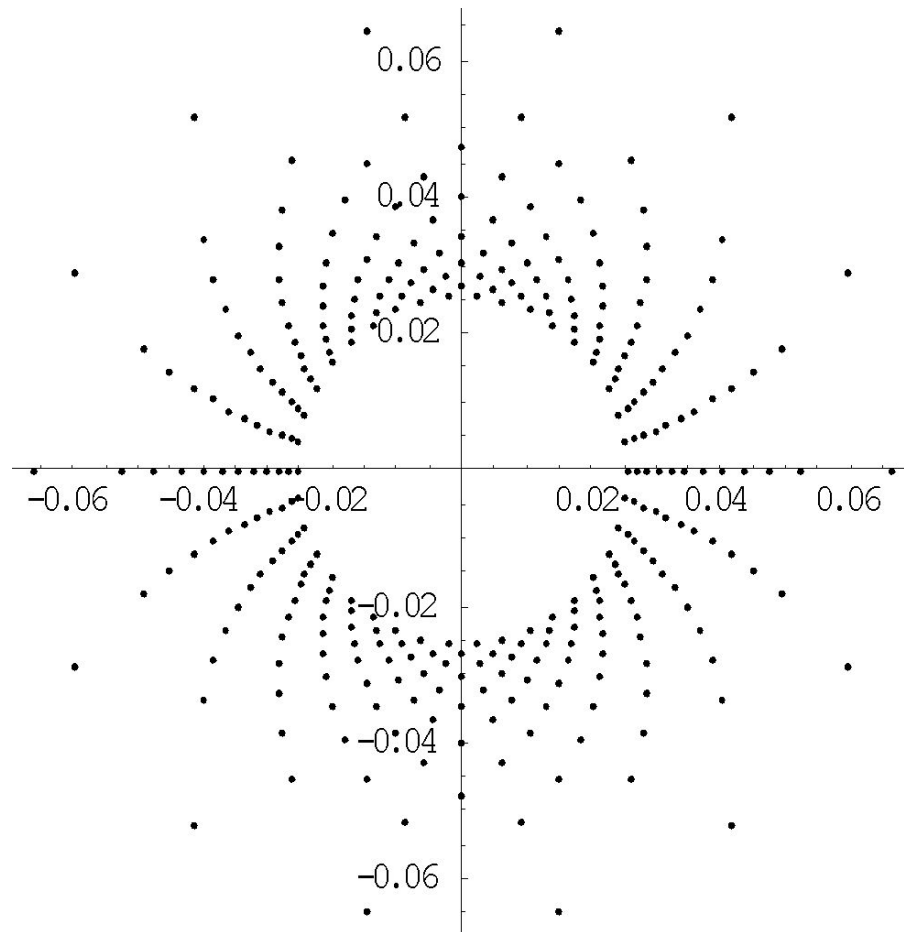


# Область влияния базисных функций с различными номерами.

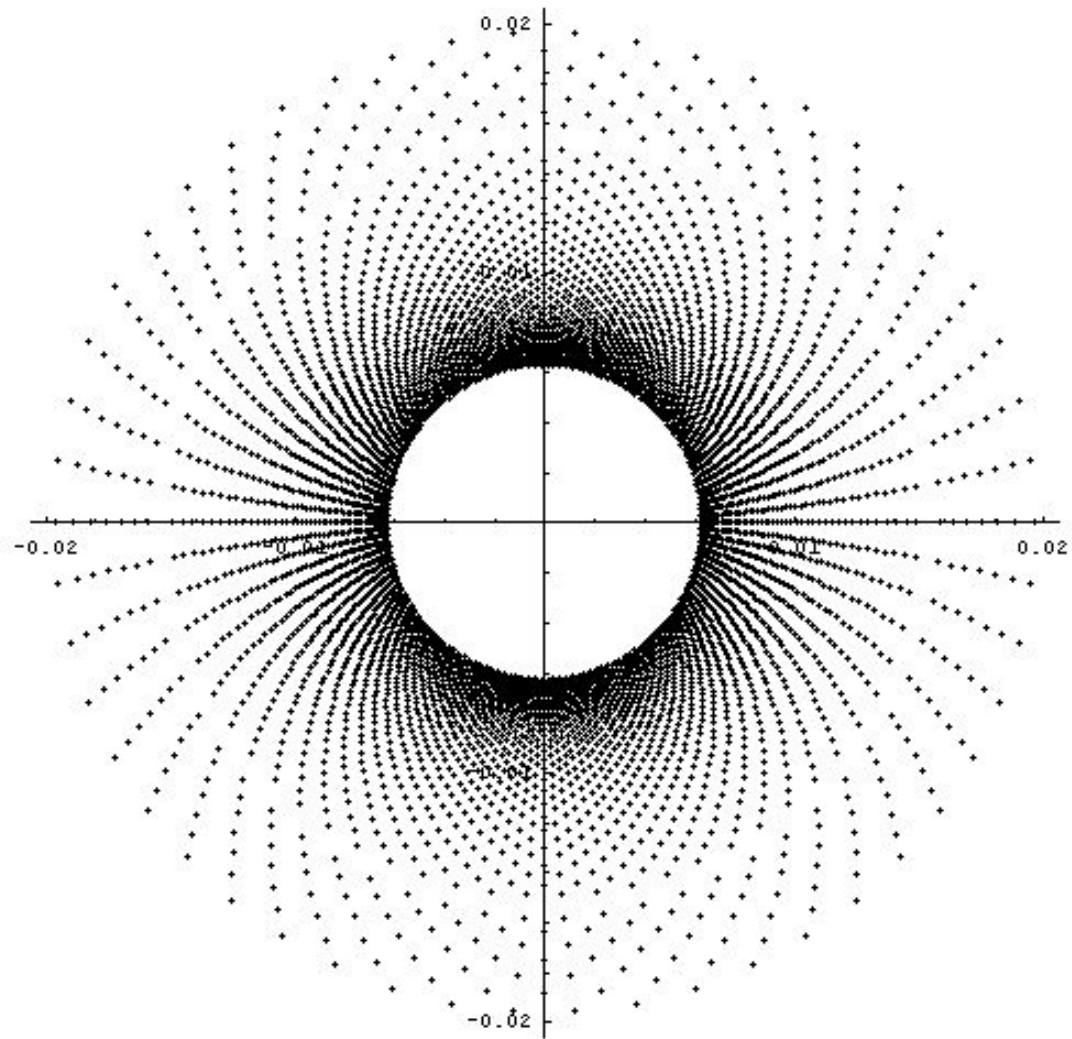
$\alpha_4$



$\alpha_g$



$\alpha_{32}$



Радиус внутренней окружности кольца фиксирован, а т. к. область влияния базисных функций сужается и стремится к нулю, следовательно с некоторого номера область влияния базисных функций не имеет общих точек с кольцом для которого решается наша задача. Значит в решении мы можем оставить конечное число

членов

$$U(z) = v_0 + \sum_{n=0}^N V_n(z)$$

Области влияния базисных функций этих членов имеют общие точки с кольцом, для которого решается задача.



# Список литературы.

1. Чуи К. Введение в вейвлеты. Москва: «Мир», 2001. – 412 с.
2. Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. Москва: «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2008. – 487 с.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
4. Субботин Ю.Н., Черных Н. И. Гармонические всплески и асимптотика решения задач Дирихле в круге с малым отверстием. // Математическое моделирование, 2002 год, том 14, номер 5, стр. 17 – 30.
5. Субботин Ю.Н., Черных Н.И., Всплески в пространствах гармонических функций. // Известия РАН: серия математическая, 2000, том 64, номер 1, стр. 145 – 174.





**Спасибо за внимание!**

