Описание областей влияния базисных вейвлет-функций при помощи ИТ и построение решения задачи Дирихле для некоторых специальных областей.

Магистрант

кафедры теории функций

Заренок Максим Александрович

Руководители:

доцент кафедры теории функций

Рогозин Сергей Васильевич,

Содержание работы.

Цель работы:

- решение задачи Дирихле для области ограниченной концентрическими окружностями в терминах вейвлет-анализа.

Решение поставленной задачи достигается при помощи определения зон влияния базисных вейвлет-функций и, в частности, слагаемых, содержащихся в этих функциях, т.к. вейвлет-базисы могут быть хорошо локализованными как по частоте, так и по времени.

Основные определения.

Определение. *Если* $\psi \in L^2(R)$ *удовлетворяет условию «допустимости»:*

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

то ψ ***называется «базисным вейвлетом».*** *Относительно каждого базисного вейвлета интегральное преобразование определяется формулой*

$$(W_\psi f)(a,b) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad f \in L^2(R) ,$$

где $a, b \in R$ $\quad a \neq 0$.

Определение. *Тождественно не равная нулю функция* $\omega \in L^2(R)$ *называется функцией-окном, если* $x\omega(x)$ *так же принадлежит* $L^2(R)$ *. Центр и радиус функции-окна определяются как*

$$t^* := \frac{1}{\|\omega\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |\omega(x)|^2 \, dx$$

$$\Delta_\omega := \frac{1}{\|\omega\|_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |\omega(x)|^2 \, dx \right]^{1/2},$$

соответственно; ширина функции окна равняется $2\Delta_\omega$.

Представление решения задачи Дирихле для концентрического кольца

- Задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta U(z)=0 \quad (z\in R_\rho) \\ u(e^{ix})=\varphi(x) \\ u(\rho e^{ix})=\varphi_\rho(x) \end{cases}$$

- Решение

$$U(z)=v_0+\sum_{n=0}^{\infty}V_n(z)$$

где функции V_n выражаются через элементы базиса пространств гармонических в кольце функций

$$\{\ \ln|z|,1,\alpha_n(z),\widetilde{\alpha}_n(z),\alpha_n(\rho/z),\widetilde{\alpha}_n(\rho/z);n\in Z_+\}$$

Основные результаты.

Начнем исследование с вычисления координат центра области влияния слагаемых входящих в базисную функцию

$$t^* = \iint\limits_{|z|<1} z|\beta_n^\nu(z)|^2\,dz = B \iint\limits_{|z|<1} z|z|^{2\nu}(\cos(\nu x))^2\,dz =$$

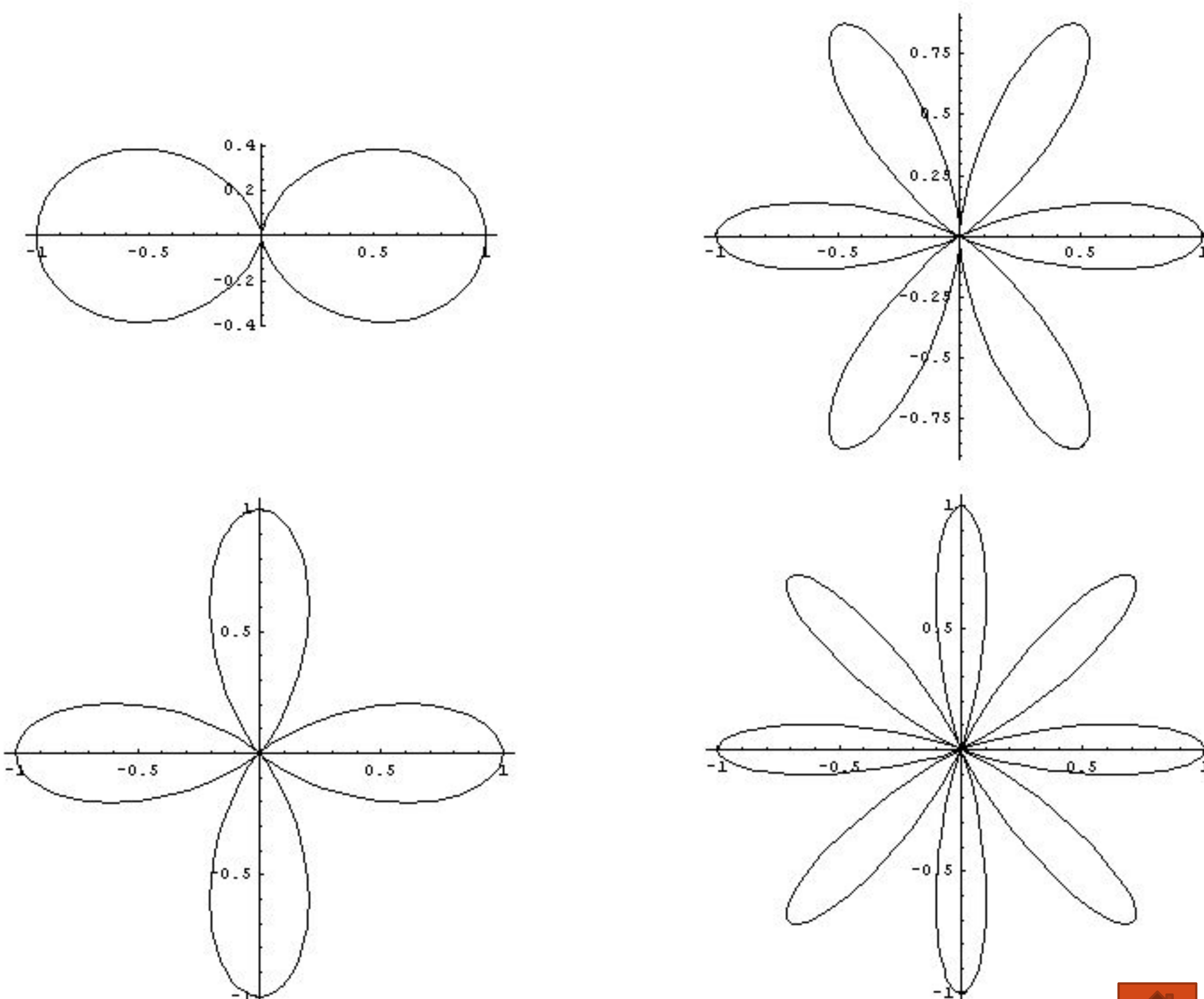
$$= B\int_0^1\int_0^{2\pi}(r\cos x + ri\sin x)r^{2\nu}cos^2(\nu x)\,r\,dr\,dx =$$

$$= B\int_0^1 r^{2\nu+2}dr\int_0^{2\pi}(\cos x + i\sin x)cos^2(\nu x)dx \qquad B = \hat{\Theta}_\varepsilon\left(\frac{\nu}{2^{j+1}}\right)\cos\frac{2\pi\nu(k+1/2)}{2^{j+1}}$$

Получаем, что $\int_0^1 r^{2\nu+2}dr = \frac{1}{3+2\nu}$ и

$$\int_0^{2\pi}(\cos x + i\sin x)cos^2(\nu x)dx = 0$$

Графики подынтегральной функции



Переходим к интегрированию по круговому сектору,

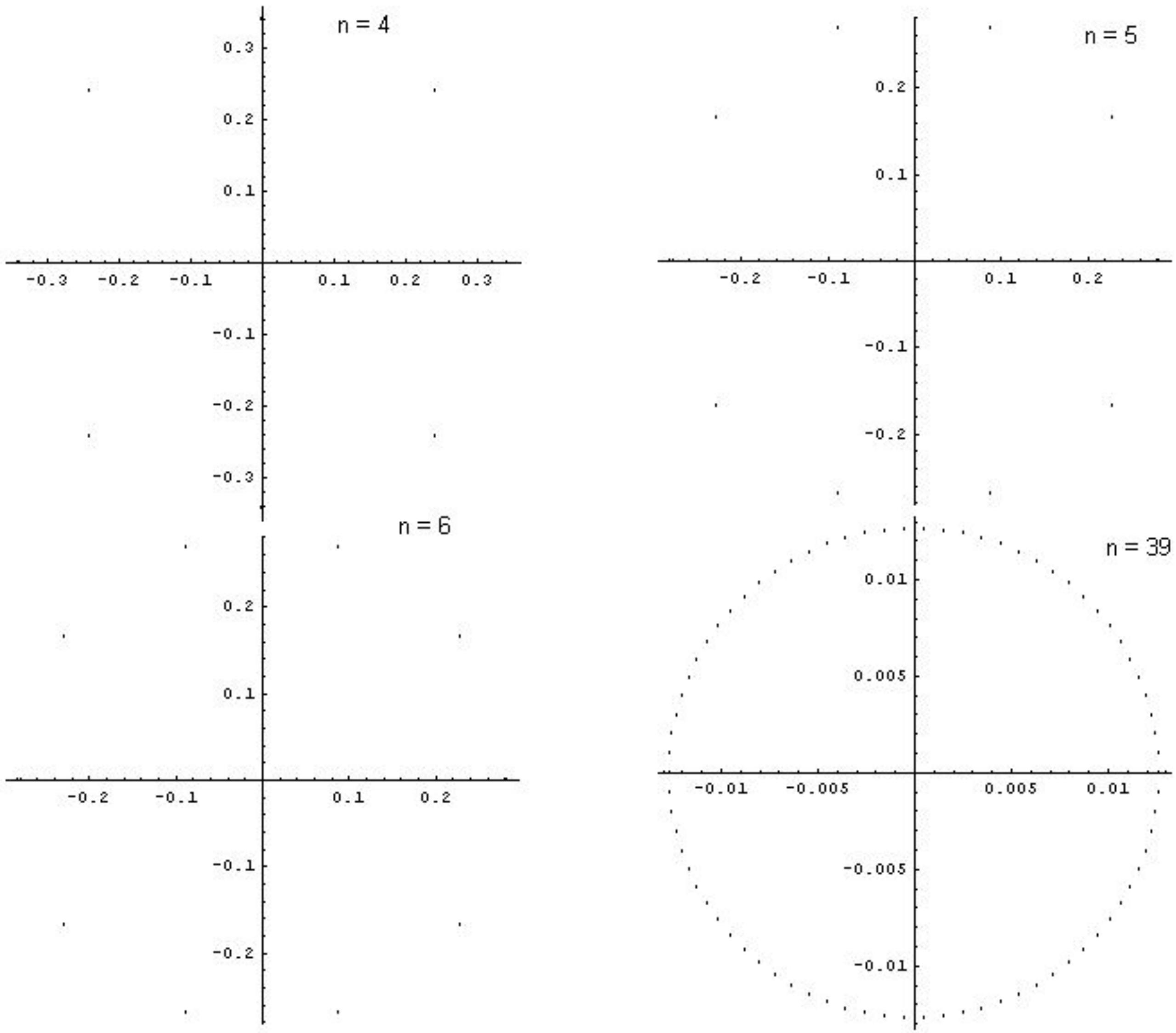
градусная мера, которого равна $\frac{\pi}{\nu}$.

$$t_{\beta_n^\nu}^{l} = \frac{1}{\|\beta_n^\nu\|_2^2}\int_{-\frac{\pi}{2\nu}+\frac{l\pi}{\nu}}^{\frac{\pi}{2\nu}+\frac{l\pi}{\nu}} z\,|\beta_n^\nu(z)|^2 dz = \frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}\sin\frac{\pi}{2\nu}e^{\frac{il\pi}{\nu}}$$

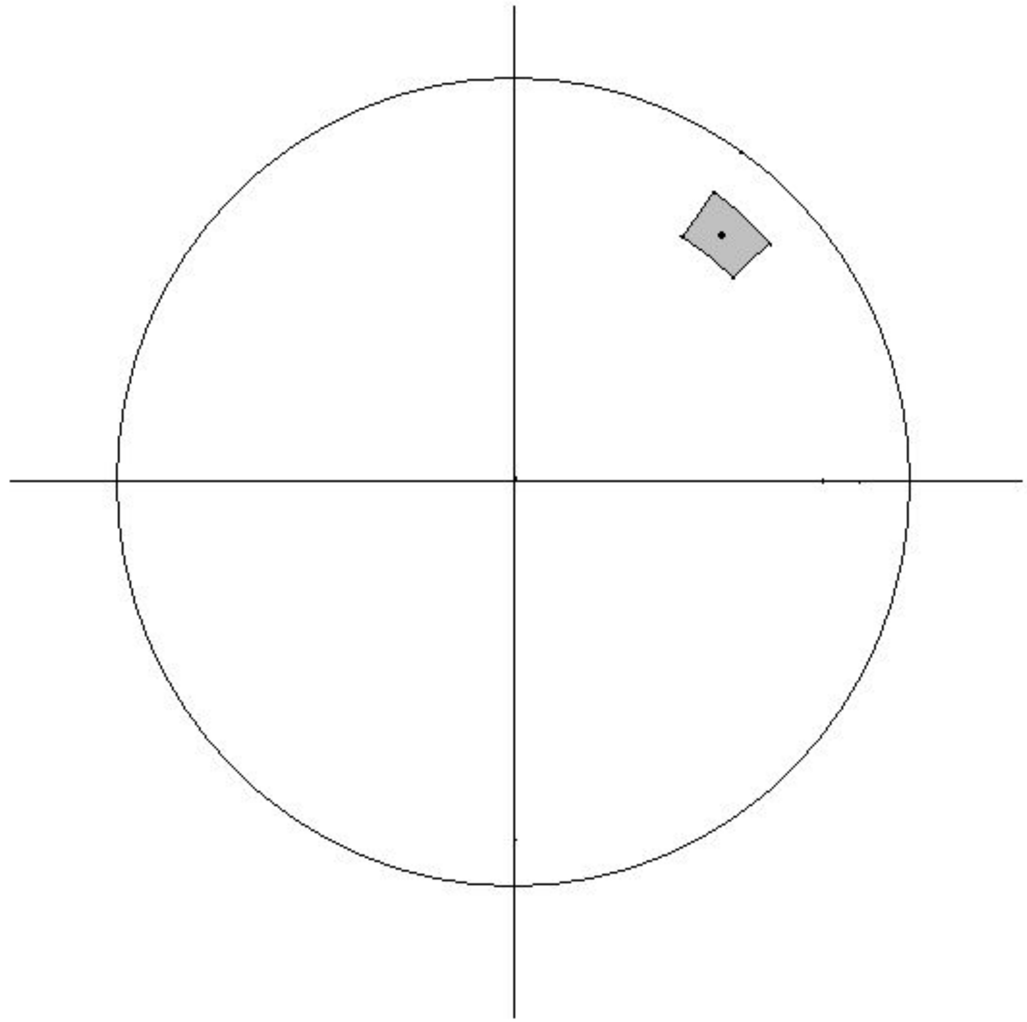
т.е. ν -ое слагаемое n-ой базисной функции имеет

2ν центров окон влияния лежащих на окружности.

Положение центров областей влияния.

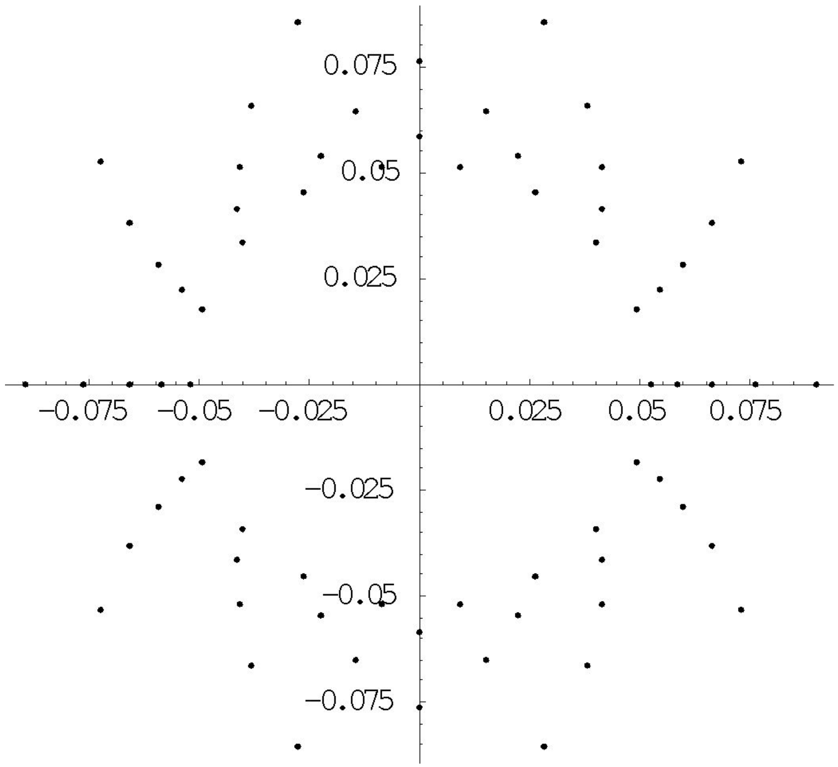


Область влияния будет иметь вид усеченного кругового сектора.

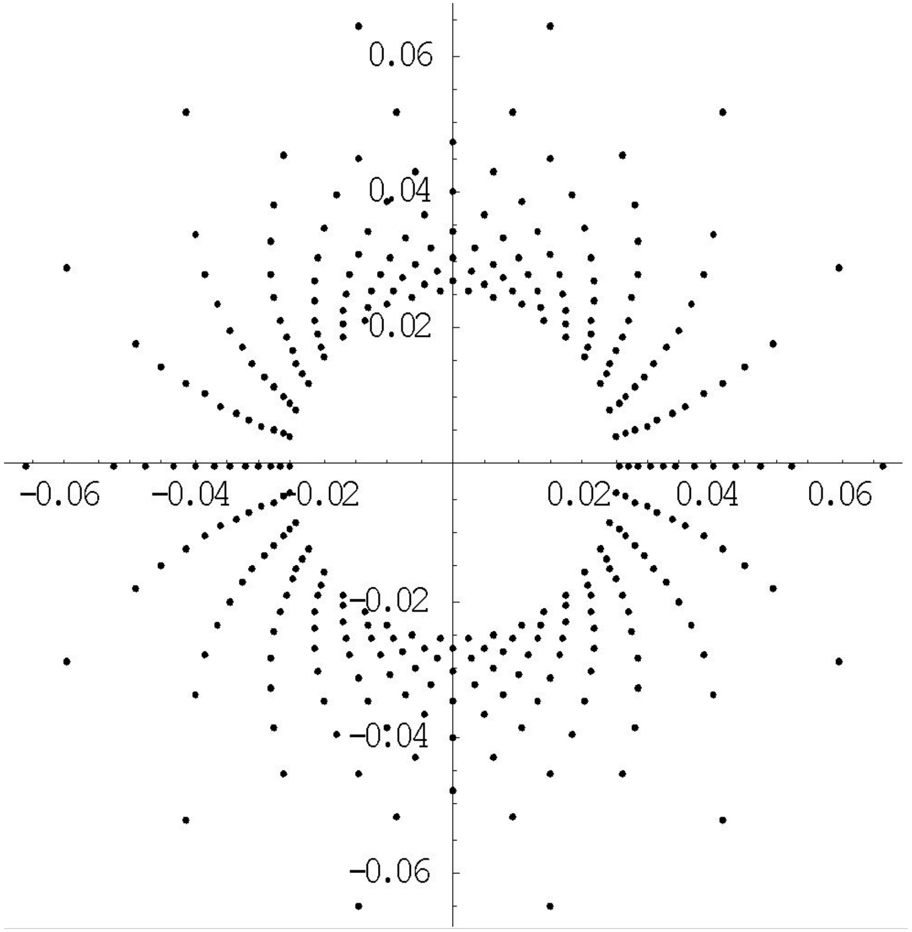


Область влияния базисных функций с различными номерами.

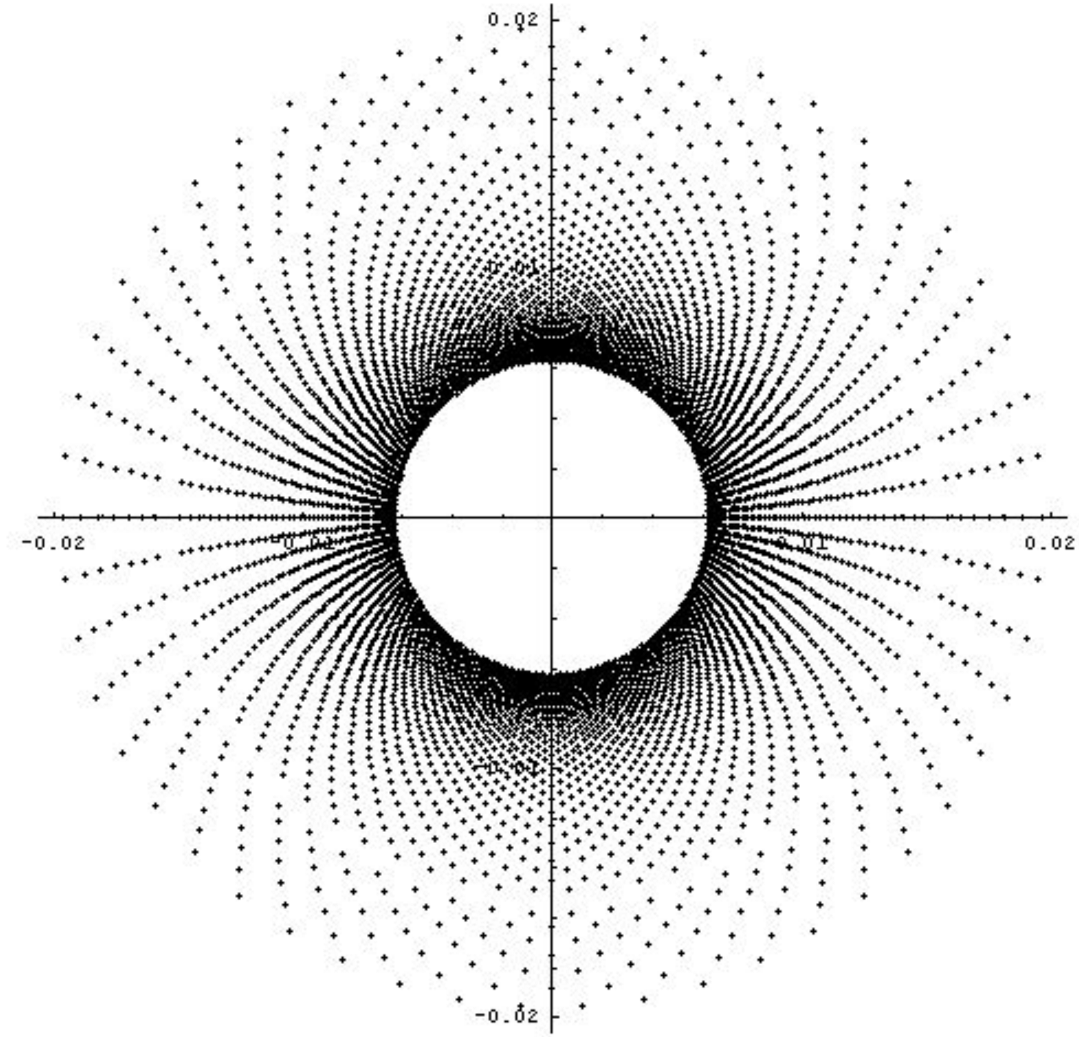
α_4



α_8



α_{32}



Радиус внутренней окружности кольца фиксирован, а т. к. область влияния базисных функций сужается и стремится к нулю, следовательно с некоторого номера область влияния базисных функций не имеет общих точек с кольцом для которого решается наша задача. Значит в решении мы можем оставить конечное число членов .

$$U(z) = v_0 + \sum_{n=0}^{N} V_n(z)$$

Области влияния базисных функций этих членов имеют общие точки с кольцом, для которого решается задача.

Список литературы.

1. Чуи К. Введение в вейвлеты. Москва: «Мир», 2001. – 412 с.
2. Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. Москва: «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2008. – 487 с.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
4. Субботин Ю.Н., Черных Н. И. Гармонические всплески и асимптотика решения задач Дирихле в круге с малым отверстием. // Математическое моделирование, 2002 год, том 14, номер 5, стр. 17 – 30.
5. Субботин Ю.Н., Черных Н.И., Всплески в пространствах гармонических функций. // Известия РАН: серия математическая, 2000, том 64, номер 1, стр. 145 – 174.

Спасибо за внимание!