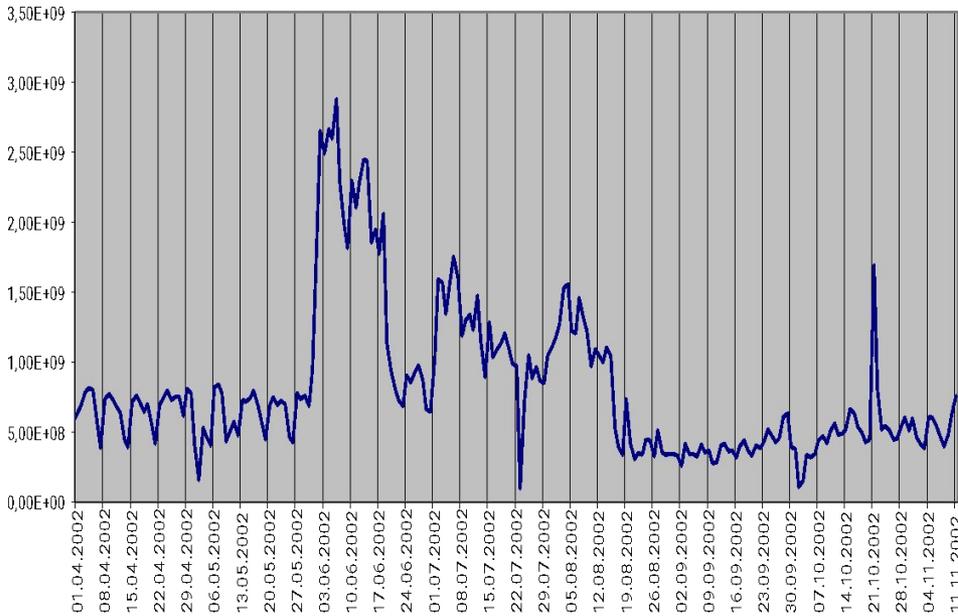


Лекция 8



- Анализ временных рядов
- Спектральный анализ (разложение в ряд Фурье, периодограмма)

Случайная функция

Это функция неслучайного аргумента, которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной

Случайный процесс

Неслучайный аргумент t -время

Статистические характеристики случайной функции (изучает корреляционная теория)

1. Математическое ожидание - неслучайная функция - при каждом значении t = мат. ожиданию сечения.
2. Дисперсия - неслучайная функция, состоит из дисперсий сечений.
3. Корреляционная функция (автокорреляция) равна коэффициенту корреляции между двумя сечениями..

Стационарный случайный процесс

1. Математическое ожидание постоянно (стационарность в широком смысле).

2. Автокорреляционная функция зависит только от разности аргумента.

В.Е. Гмурман. Теория вер. и мат. статистика. Стр. 386-449

Анализ временных рядов

Временной ряд - реализация
(траектория, выборочная функция)
случайной функции.

временным рядом называют последовательность
наблюдений, упорядоченных по времени

Аргумент (t) дискретно меняется через равные промежутки.

Временной ряд

Реализация случайного процесса -
неслучайная функция аргумента t (*времени*) -
результат экспериментов (опытов).

Временной ряд (случайная последовательность)
Аргумент (t) дискретно меняется через равные
промежутки.

Визуализация временного ряда



месячные международные авиаперевозки (в тысячах)

в течение 12 лет.

(Бокс и Дженкинс, 1976, стр. 531)

Модель временного ряда

тренд

случайная
составляющая

$$Y(t) = f(t) + g(t) + \varepsilon(t)$$

периодическая
(сезонная) составляющая

Анализ тренда

Не существует "автоматического" способа обнаружения тренда в временном ряде.

Два распространенных способа:

- 1) если тренд монотонный (возрастает или убывает), то используется регрессионный анализ;
- 2) если большая ошибка (разброс в значениях), то сначала делают сглаживание (окнами), потом регрессионный анализ.

Анализ периодической (сезонной) составляющей

1. Анализ автокорреляций (процесс авторегрессии и скользящего среднего *АРСС* - модель не известна. Прогноз по предыдущим значениям с осреднением)
2. Анализ Фурье. Периодограмма.
Отличие от *АРСС* и экспоненциального сглаживания - периоды заранее неизвестны.

Анализ Фурье

МОДЕЛЬ

$$x(t_i) = \bar{x} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(2\pi f_k t_i) + \sum_{k=1}^n \beta_k \sin(2\pi f_k t_i) + e_t,$$

k – $k = \overline{1, n}$;

гармоника ряда
 $f_k = k/(N\Delta)$ -

частота

k -й гармоники ряда;

e_t –

последовательность независимых, нормально
распределенных случайных величин с нулевым

средним значением и дисперсией σ_e^2 .

Оценки коэффициентов по МНК

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i)$$

$$\alpha_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) \cos(2\pi f_k t_i),$$

$$\beta_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) \sin(2\pi f_k t_i),$$

$$k = \overline{1, n-1},$$

Оценки коэффициентов по МНК (продолжение)

$$\alpha_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) (-1)^i,$$

$$\beta_n = 0$$

Модель с амплитудой и фазой

$$x(t) = \bar{x} + \sum_{k=1}^n R_k \cos(2\pi f_k t - \varphi_k) + e_t$$

$$R_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right),$$

$$T_k = \frac{N\Delta}{k},$$

$$f_k = \frac{1}{T_k}$$

Периодограмма или *линейчатый спектр Фурье*

$$I(f_k) = \alpha_k^2 + \beta_k^2$$

Интенсивность k-той гармоники

Оценка дисперсии величины $x(t_i)$

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x(t_i) - \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \alpha_n^2$$

где $N=2 \cdot n$,

т.е. общее число наблюдений – четная величина. При нечетном $N=2 \cdot n-1$ α_n исчезает.

слагаемое

1. Выделение значимых гармоник по критерию Фишера

$$\frac{I(f_k) / \nu_1}{S^2 / \nu_2} > F(\alpha, \nu_1, \nu_2)$$

ν_1 – число степеней свободы, приходящихся на гармонику ряда Фурье =2,

$\nu_2 = N - 1$ – число степеней свободы всего ряда,

α – уровень значимости.

Выделение значимых гармоник по вкладу доминирующих гармоник в дисперсию

$$\rho_k^2 = \frac{R_k^2}{2S^2} * 100\% = \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{\sum_k^{n-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \alpha_n^2} * 100\%$$

Основными гармониками принято считать те,

у которых $\sum_{k=1}^n \rho_k^2 \geq 80\%$

Модель после выделения гармоник

$$x(t_i) = \bar{x} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \cos(2\pi f_k t_i) + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin(2\pi f_k t_i)$$

где m –

Алгоритм расчета коэффициентов разложения в ряд Фурье

1. Рассчитать оценку математического ожидания \bar{x} ,
дисперсии S^2 , стандартное отклонение S ,
оценку
2. Определить количество наблюдений N ,
стандартное отклонение
которые производилось наблюдения $t_i = i \cdot \Delta$, моменты времени, в
где Δ - интервал
между отдельными наблюдениями.

Алгоритм расчета коэффициентов разложения в ряд Фурье

3 Определить количество гармоник $k = \overline{1, n-1}$,

где
$$n = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{если } N \text{ четное} \\ \frac{N-1}{2}, & \text{если } N \text{ нечетное} \end{cases}$$

4 Для каждой k -

ой гармоники рассчитать:

- частоту f_k и период T_k : $f_k = k/(N\Delta)$, $T_k = 1/f_k$

- коэффициенты при синусе и косинусе (см. оценки коэффициентов по МНК)

$$\alpha_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) \cos(2\pi f_k t_i), \quad \beta_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) \sin(2\pi f_k t_i)$$

Алгоритм расчета коэффициентов разложения в ряд Фурье

5 Вычислить:

- амплитуду и фазу $R_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$, $\varphi_k = \arctg\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)$;
- вклад в дисперсию ряда ρ_k^2 :

$$\rho_k^2 = \frac{R_k^2}{2S^2} * 100\% = \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{\sum_k^{n-1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \alpha_n^2} * 100\%$$

Алгоритм расчета коэффициентов разложения в ряд Фурье

6 Если N – четное, то вычислить коэффициент α_n

$$\alpha_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) (-1)^i$$

При нечетном N $\alpha_n = 0$.

7 Проанализировать полученные результаты.

Литература

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976, 755 с.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1972, вып 2., 287 с
3. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976, 736 с.
4. Дрейпер Н., Симт Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986, 366 с.
5. Чекотовский Э.В. Графический анализ статистических данных в Microsoft Excel 2000, с.
6. <http://education.iit.ru/files/text/econometrics/lect>
Изд-во: Вильямс 2002, 464