Построение отрезка по формуле

Проект по геометрии

Выполнили: Филимонова Екатерина

Руководитель: Шорина С.П.

Методический паспорт учебного проекта по геометрии.

Тема: Построение отрезка по заданной формуле.

Проблема: построить неизвестный отрезок, т.е. выразить его через известные отрезки и величины, разложить формулу, научиться строить отрезок по найденной формуле.

Актуальность исследований: На первый взгляд может показаться, что данная тема вряд ли имеет практическое применение в повседневной жизни. Однако, довольно сложно представить современный мир без архитектуры и программирования, где эта тема весьма актуальна и широко используется, не напрасно ведь мы изучаем в школе задачи на построение.

Объект исследования: построение на плоскости.

Предмет исследования: построение отрезков, заданных формулами.

Гипотеза: Практически по многим заданным формулам можно построить отрезок.

Цель проекта: Найти рациональные способы построений отрезков, заданных некоторыми степенными формулами и формулами с радикалами.

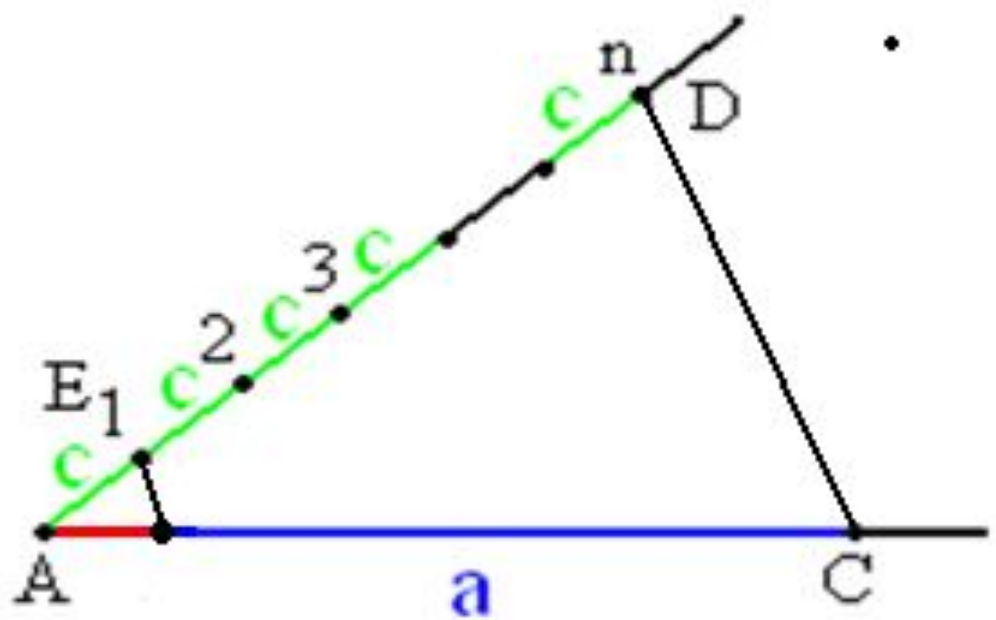
Теория. Общее определение.

Особую часть задач на построение представляют собой задачи на построение по формуле, обычно они имеют следующий вид: исходя из данных отрезков (реже углов) построить отрезок (или угол), определяемый данной формулой. Иногда построение какого-либо объекта сводится к этой же задаче, если по данным в условии элементам удается недостающие элементы построения вычислить и по полученной формуле они строятся линейкой и циркулем.

Для построения отрезков по формуле необходимо владеть элементарными стандартами построения. Их немного:

- 1)**<u>по отрезку a построить отрезок ma, где m-натуральное число.</u>** На прямой циркулем последовательно откладывается m раз отрезок a.

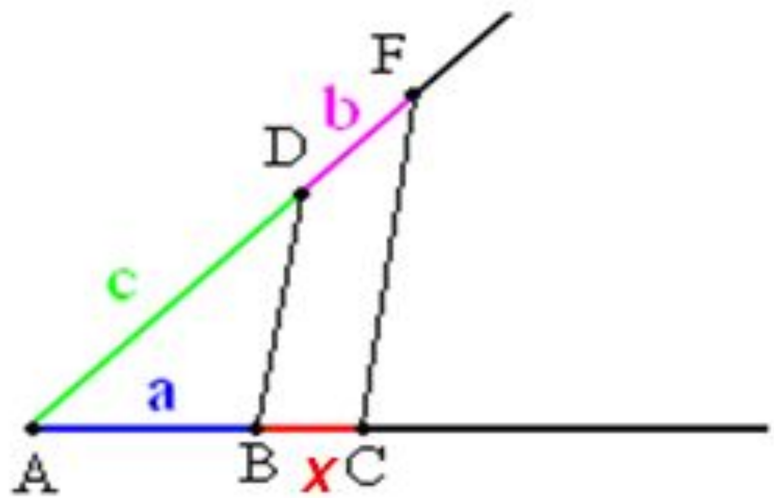
- 2)**<u>по отрезку a построить отрезок a/n , где n –натуральное число.</u>**



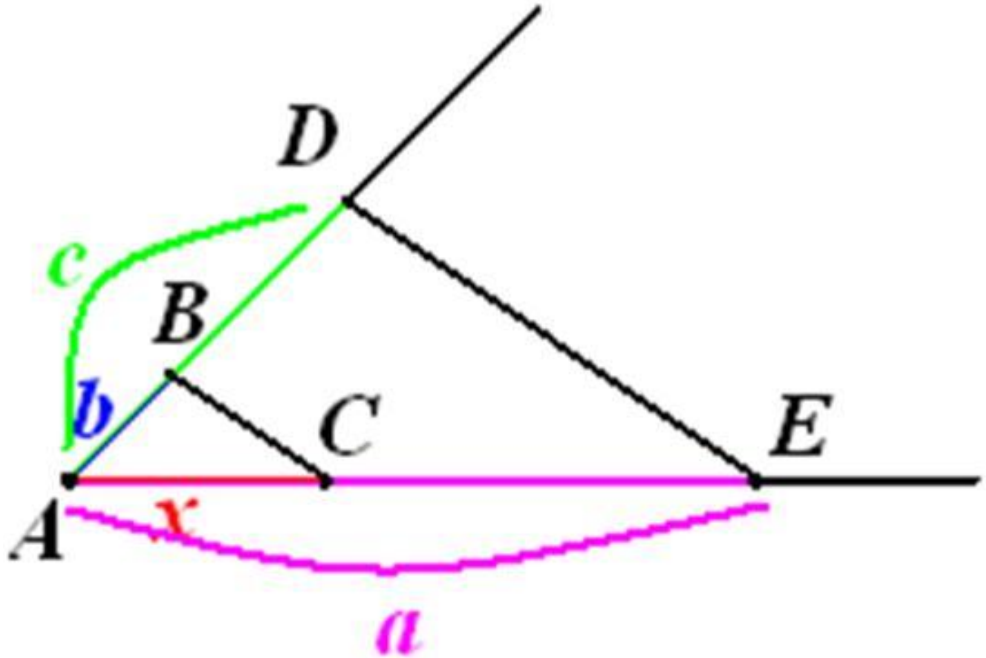
- 3) **по отрезку a построить отрезок ma/n, где m и n – натуральные числа.** Комбинация 1 и 2 построений. Сначала строим отрезок *z*, равный отрезку *am*, а потом отрезок *z/n*, равный отрезку *ma/n*.

4) **по отрезкам *a* и b построить отрезки *a+b* и *a-b* (если *a>b*).** Отложенный на прямой отрезок *a* увеличивается или уменьшается на отрезок *b*.

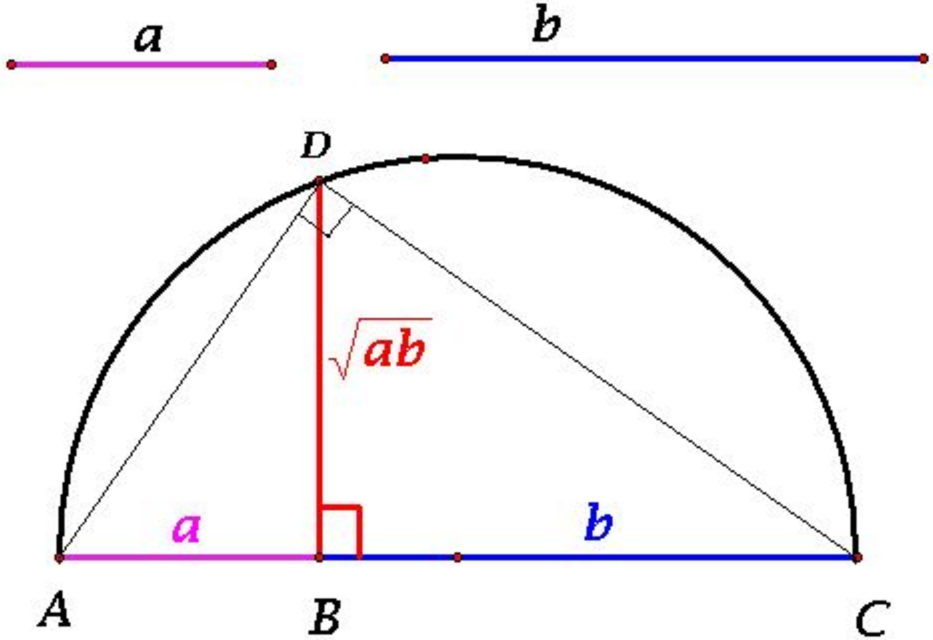
- 5) **по отрезкам a, b и c построить отрезок x=ab/c (построение пропорциональных отрезков с использованием теоремы Фалеса: a/c=x/b)**

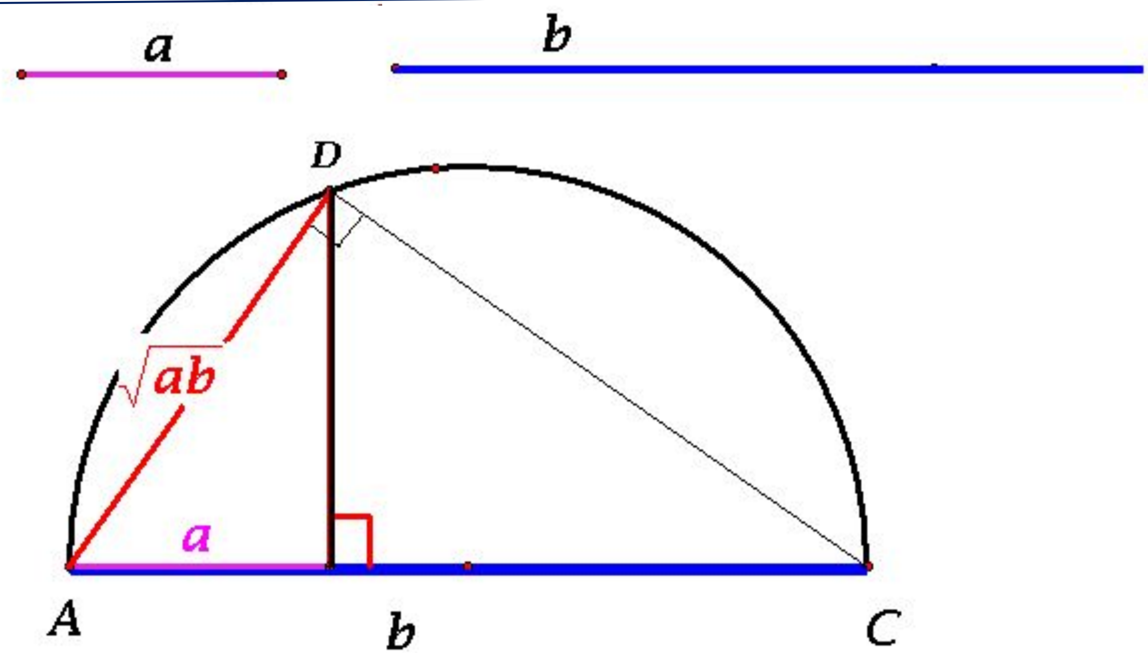


5а). Возможен и <u>другой вариант</u> построения отрезка x=ab/c – при помощи подобия треугольников: x/b=a/c.



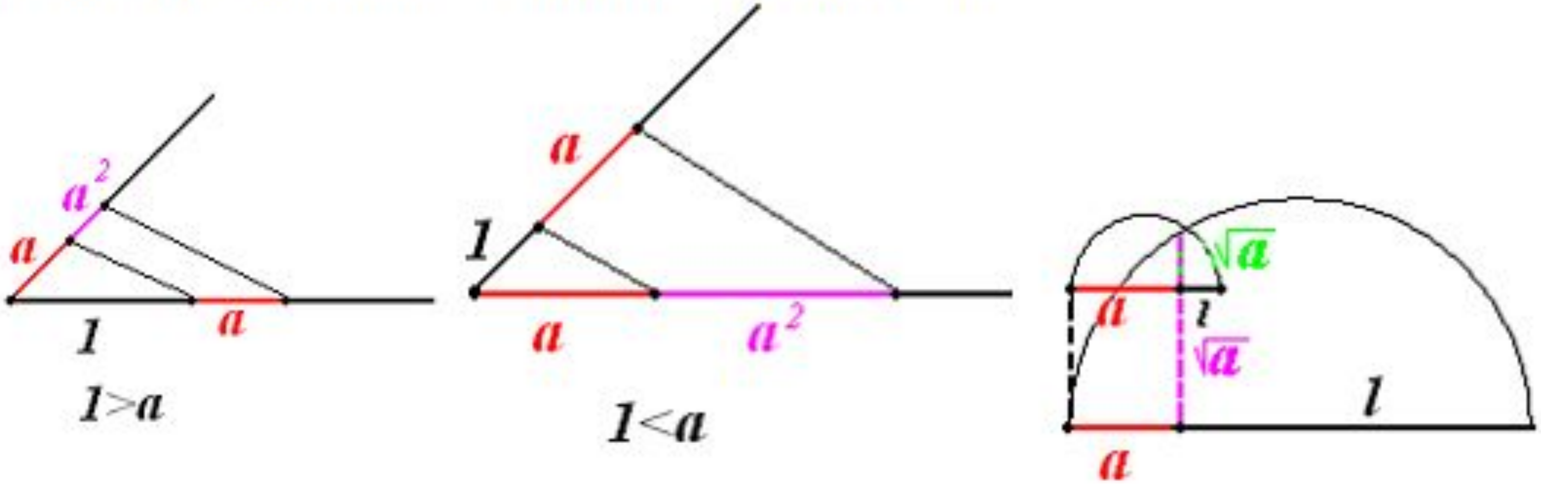
- 6)<u>по отрезкам a и b построить отрезок</u> $x = \sqrt{ab}$
- Существует несколько вариантов такого построения, например:



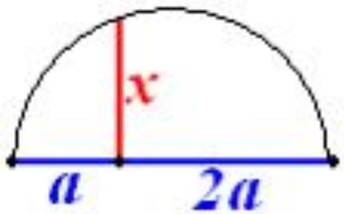


Но не все построения возможны, скажем, нельзя по отрезку a построить $\frac{a}{a}$, a^2 или $\sqrt{a}$, т.к. они не имеют размерности длины (размерность $\frac{a}{a}$ отсутствует, размерности $a^2\left(см^2\right)$ и $\sqrt{a}\ (\sqrt{см})$). Данные построения возможны только при указании отрезка единичной длины l, чтобы сохранить размерность длины (см), тогда $\frac{a}{a}=\frac{a\cdot l}{a}$, $a^2=\frac{a\cdot a}{l}$, $\sqrt{a}=\sqrt{a\cdot l}$ будут иметь размерность. Без указания единичного отрезка ничего нельзя сказать и о величинах $\frac{a}{a}$, a^2 или $\sqrt{a}$.

Причем, если единичный отрезок l > а, то
$a^2 < a$ и $\sqrt{a} > a$, а если $l < a$, то $a^2 > a$ и $\sqrt{a} < a$.



А, например, построить отрезок $\sqrt{2}a$ можно, $\sqrt{2}a=\sqrt{2a\cdot a}$.



Отсутствие единичного отрезка часто усложняет построение. Так чтобы по отрезкам a и b построить отрезок $x=\dfrac{a^4}{a^3+b^3}$ без единичного отрезка, приходится преобразовывать последнее выражение, например, к виду $x=\dfrac{a^2}{a+\frac{b^2}{a}\times\frac{b}{a}}=\dfrac{a\times a}{a+\frac{b\times b}{a}\times\frac{b}{a}}$

и последовательно построить отрезки $c=\dfrac{b\times b}{a}$, $d=\dfrac{cb}{a}$, $e=a+d$, $x=\dfrac{a\times a}{e}$.

Иногда найти подходящее преобразование бывает очень сложно, и потому тот же отрезок строят с использованием единичного отрезка.

Задача 1.

Условие: По данным отрезкам a и b построить отрезок, заданный формулой

$$f = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

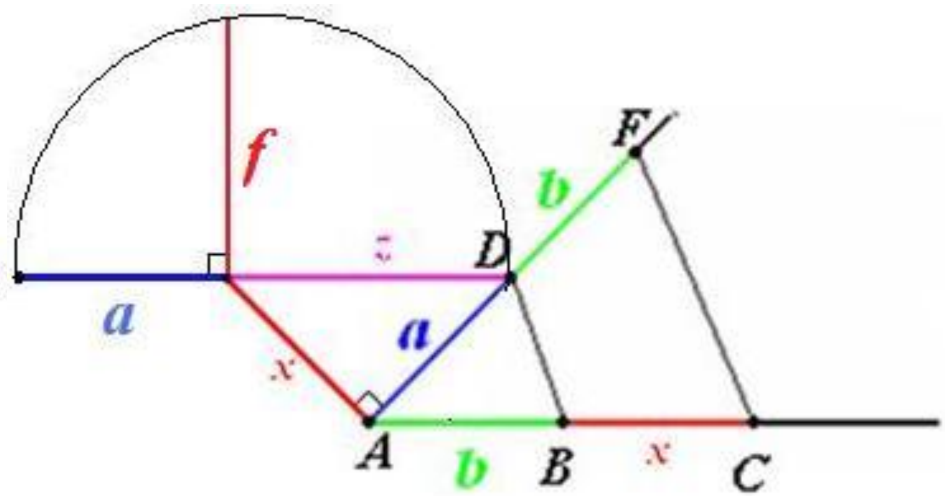
Решение:

Преобразовываем выражение:

$$f = \sqrt[4]{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}$$

Вводим переменную:

$$x = \frac{b^2}{a}; \qquad \frac{b}{a} = \frac{x}{b}$$



Получаем:

$$f = \sqrt[4]{a^2\left(a^2 + x^2\right)}$$

Вводим еще одну переменную:

$$z = \sqrt{a^2 + x^2}$$

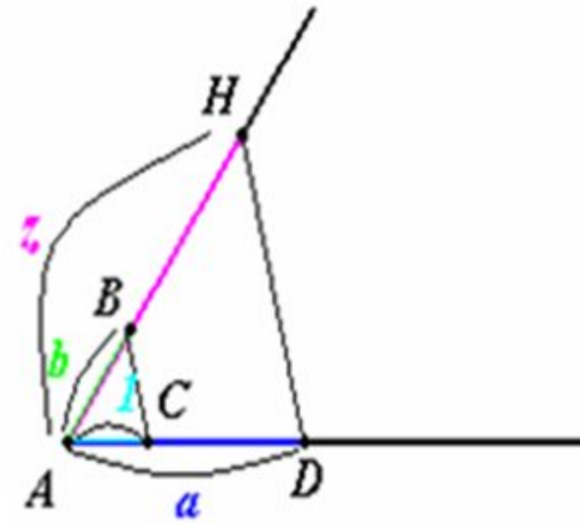
Таким образом получаем:

$$f = \sqrt[4]{a^2 z^2} = \sqrt{az}$$

Данный отрезок мы можем построить без труда.

•

Задача 3.



<u>Условие</u>: По данным отрезкам a, b,
построить отрезок, заданный
формулой $x = \sqrt{ab + bc + cd}$

<u>Решение</u>:

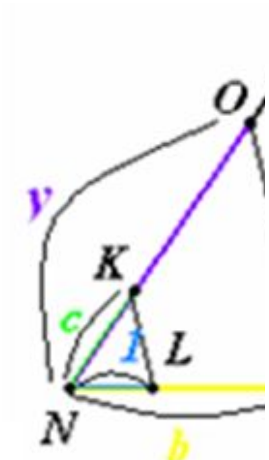
$$x = \sqrt{\left(\frac{ab}{l} + \frac{bc}{l} + \frac{cd}{l}\right) \times l}$$

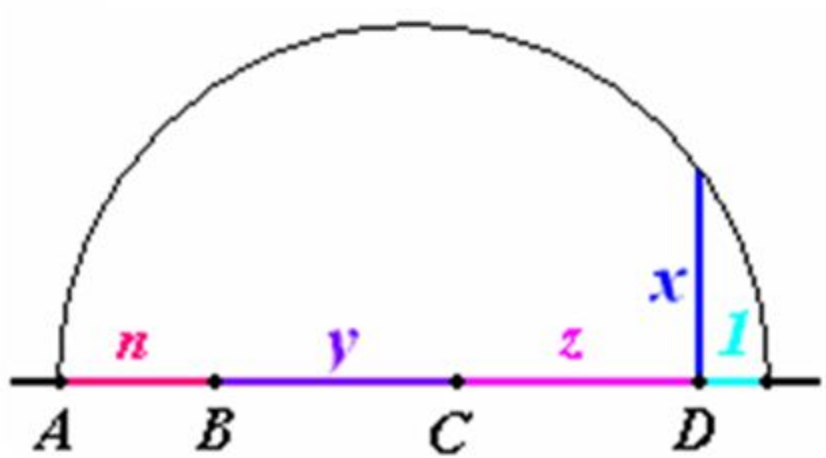
Строим последовательно:

$$\frac{ab}{1} = z(1)$$

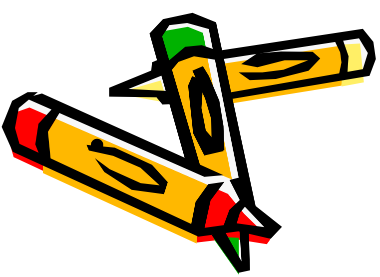
$$\frac{bc}{1} = y(2)$$

$$\frac{cd}{1} = n(3)$$





Получаем:



$$x = \sqrt{(z + y + n)}$$

Данный отрезок мы можем
без труда построить.

Задача 5.

Условие:

По данным отрезкам a и b построить отрезок, заданный формулой $x = \dfrac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9}$

Решение: $x = \dfrac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9} = \dfrac{\dfrac{a^{10}}{l^9} + \dfrac{b^{10}}{l^9}}{\dfrac{a^9}{l^8} + \dfrac{b^9}{l^8}} \times l;\quad \dfrac{a^{10}}{l^9} = a_{10};\quad \dfrac{b^{10}}{l^9} = b_{10};\quad \dfrac{a^9}{l^8} = a_9;\quad \dfrac{b^9}{l^8} = b_9.$

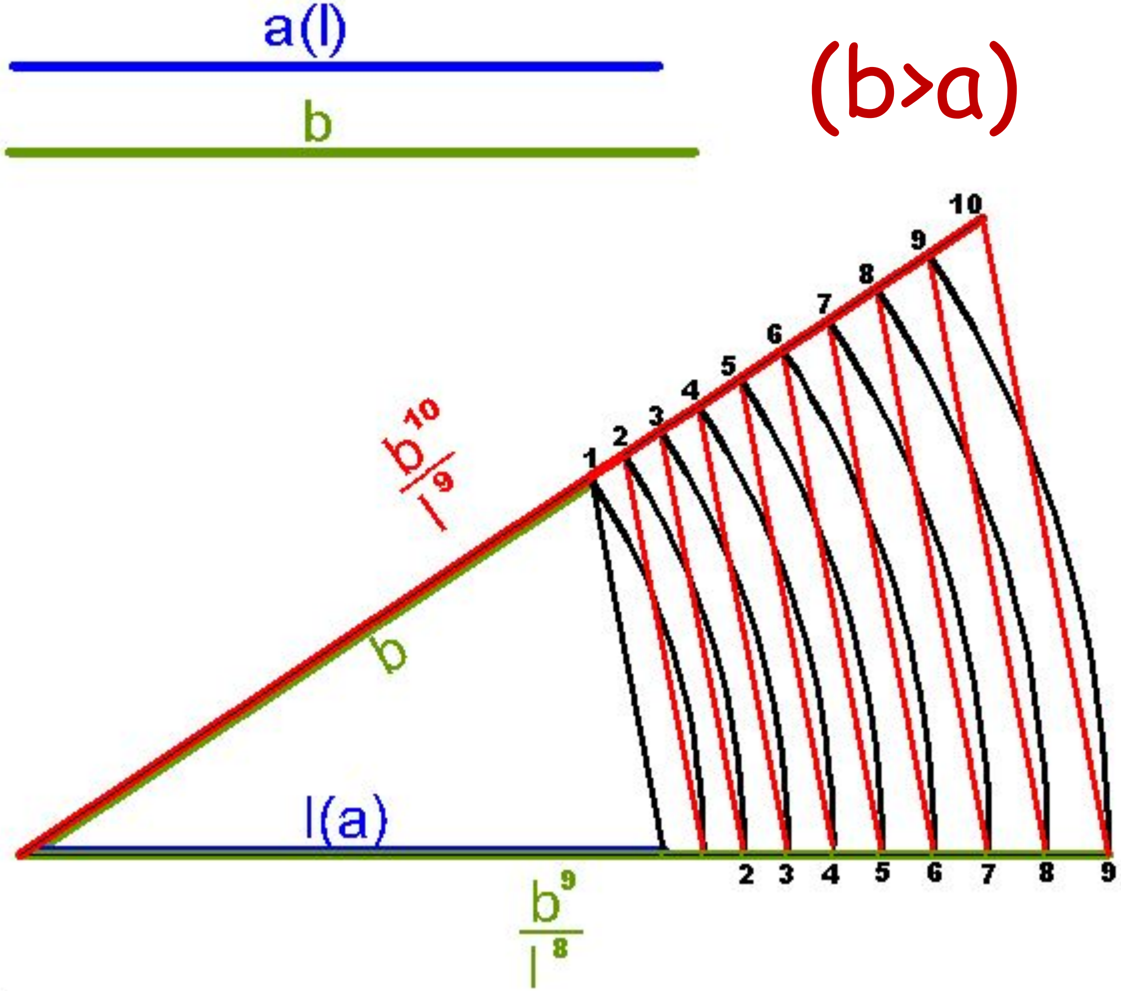
Выбираем длину отрезка ***a*** за длину единичного отрезка. $(l = a)$.

Тогда отрезки $\dfrac{a^{10}}{l^9} = a;\quad \dfrac{a^9}{l^8} = a.$

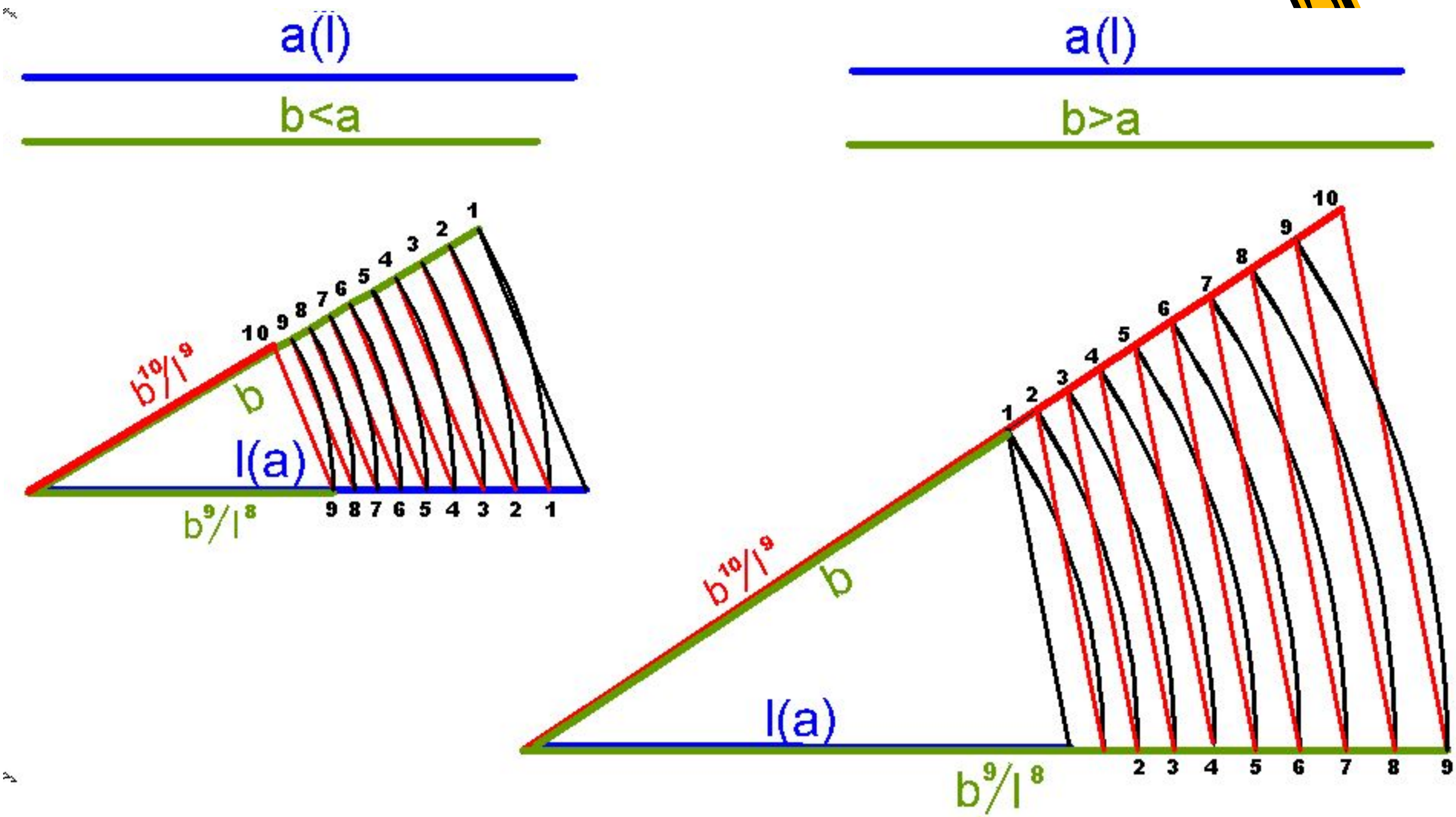
Способ построения отрезка b_{10}

$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l}$$

$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l}$$

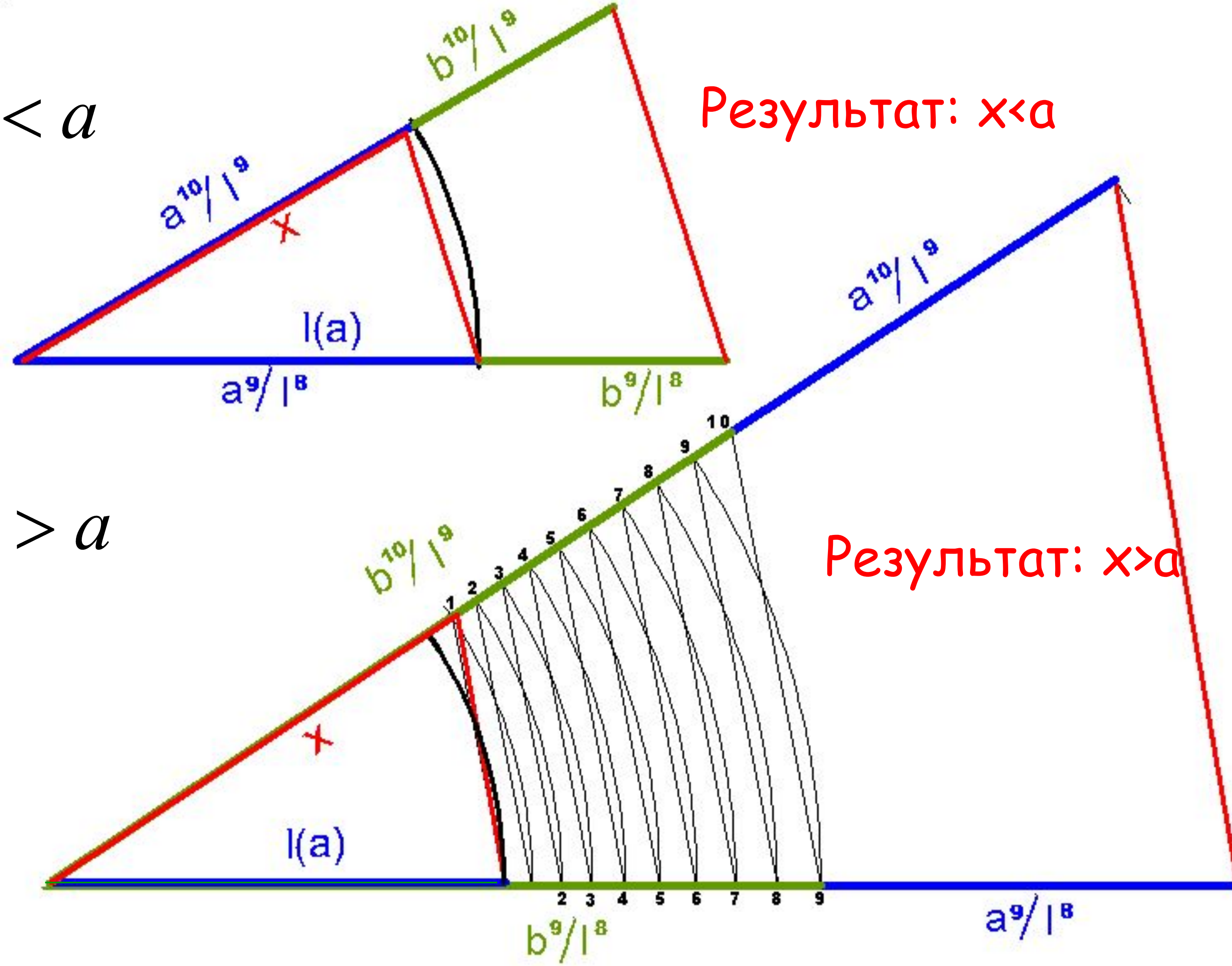


$$b_{10}=\frac{b^{10}}{l^{9}}=\frac{b\times b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{b}{l}$$



$$x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^{9} + b^{9}}$$

$b < a$



Результат: x<a

$b > a$

Результат: x>a

Задача 6.

Условие: По заданным отрезкам a, b, c и d построить отрезок, заданный формулой $x = \sqrt[4]{abcd}$

Решение:

$$x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{ab} * \sqrt[4]{cd} = \sqrt{\sqrt{ab}} * \sqrt{\sqrt{cd}}$$

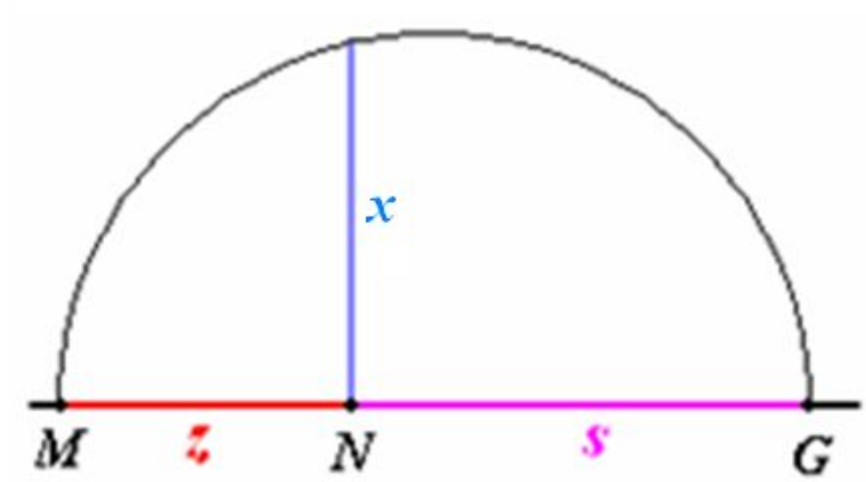
Производим замену переменных:

$$\sqrt{ab} = z (1)$$

$$\sqrt{cd} = s (2)$$

Получаем:

$$x = \sqrt{zs} (3)$$



Задача 8

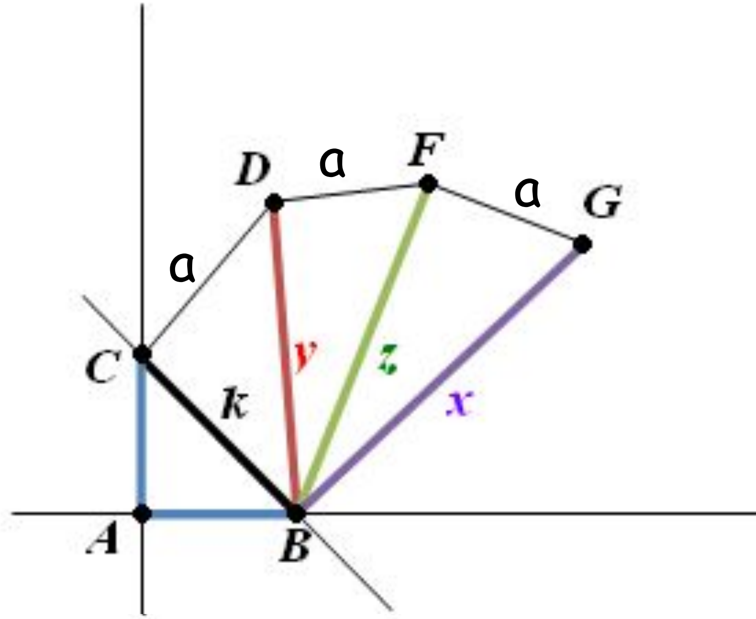
<u>*Условие:*</u> По данному отрезку a построить отрезок, заданный формулой $x = a\sqrt{5}$

<u>*Решение:*</u>

Откладываем на одной стороне прямой отрезок a=AC, проводим перпендикуляр и на нем откладываем отрезок a=AB. Соединяем два конца отрезков и получаем z , равный $a\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора). И так повторить 4 раза.

<u>*Получаем*</u>:

$$x = a\sqrt{5}$$



$$k = a\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$z = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = a\sqrt{4}$$

$$x = \sqrt{(a\sqrt{4})^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

Задача 10.

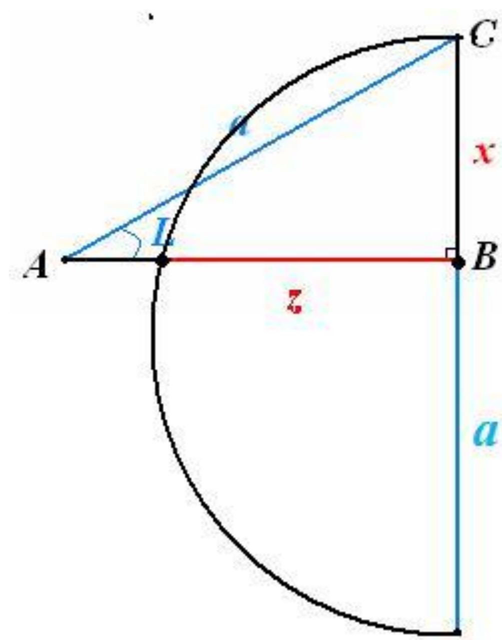
<u>Условие</u>: По данному отрезку а и острому углу L построить отрезок, заданный формулой

$$z = a \times \sqrt{\sin L}$$

<u>Решение</u>:

$$z = a \times \sqrt{\sin L} = \sqrt{a \times a \times \sin L} =$$

$$= \sqrt{a \cdot x}, \text{ где } x = a \times \sin L$$



Строим прямоугольный треугольник ABC с острым углом L и гипотенузой а. Тогда

$$\sin L = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{a}$$

$$x = a \times \sin L = a \times \frac{CB}{a} = CB$$

$$z = \sqrt{a \times x}$$

Заключение

В процессе работы над проектом мы научились разлагать заданные формулы для длины искомого отрезка на элементарные составляющие, по которым легко выполнять построения, используя теорему Фалеса, Пифагора или пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике, освоили приемы построения в процессе решения конкретных задач и подтвердили гипотезу, что можно построить отрезки, заданные многими формулами. Думаем, что этот опыт пригодится нам при поиске решения разных задач, а сам проект можно демонстрировать на уроках геометрии.