МОУ СОШ № 5 – «Школа здоровья и развития» г. Радужный

Первообразная
Интеграл

Автор: Елена Юрьевна Семёнова

Содержание

Понятие первообразной

Функцию F(x) называют первообразной для функции f(x) на интервале (a; b), если на нем производная функции F(x) равна f(x):

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

Операцию, обратную дифференцированию называют интегрированием.

Примеры

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$

   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$

   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$

   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \operatorname{tg} x$

   $F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a; b) функции f(x) называют любую ее первообразную функцию.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Где С – произвольная постоянная (const).

Примеры

$$1.\ \int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2.\ \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4.\ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$$

$$5.\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таблица первообразных

F(x)	f(x)	F(x)	f(x)
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$\mathrm{tg}x+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\frac{1}{x\ln a}$
$-\mathrm{ctg}x+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Три правила нахождения первообразных

1º Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2º Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для kf.

3º Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

Физический смысл первообразной

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

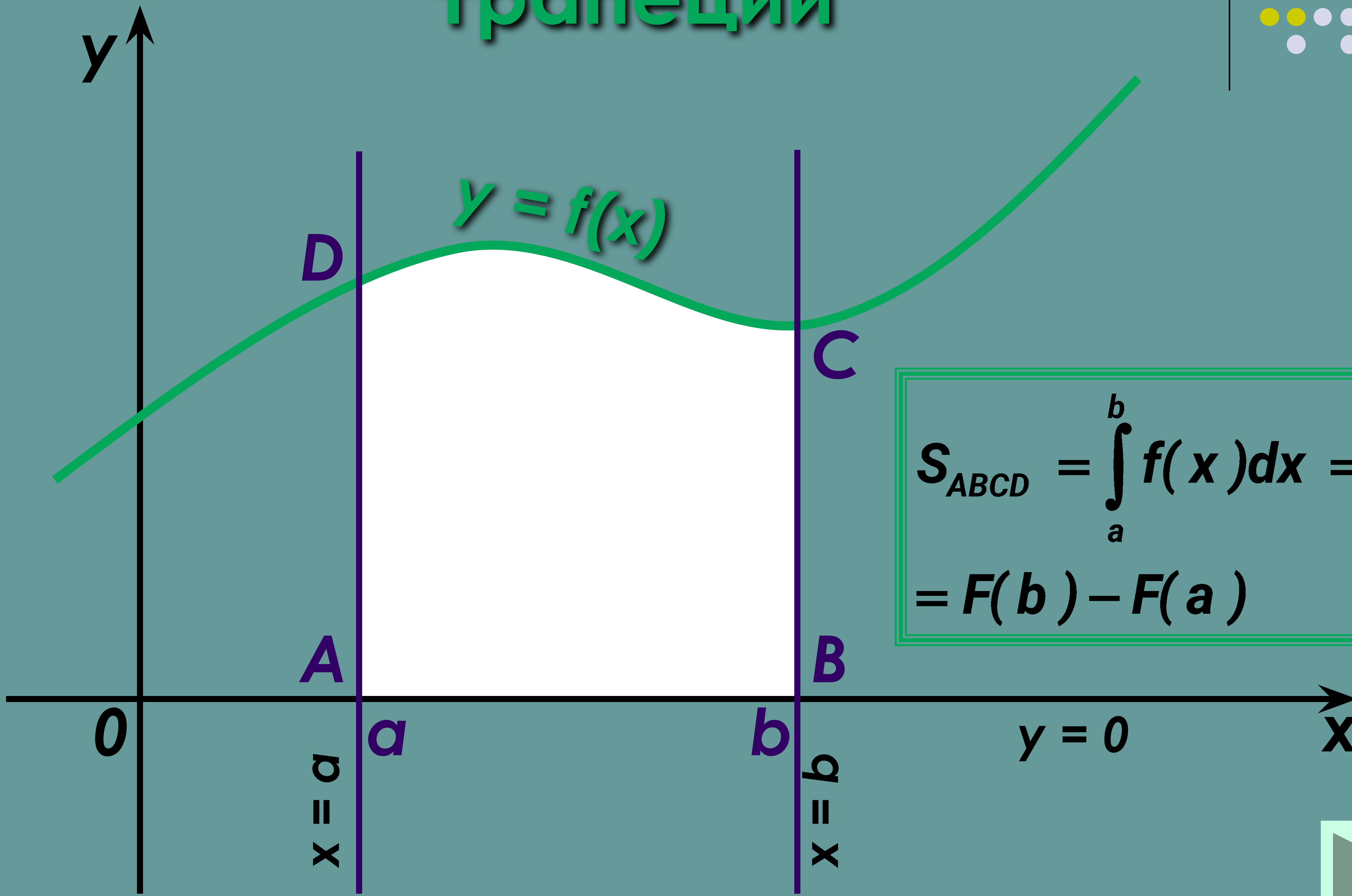
$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6})dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\Bigg|_3^{10} =$$

$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$

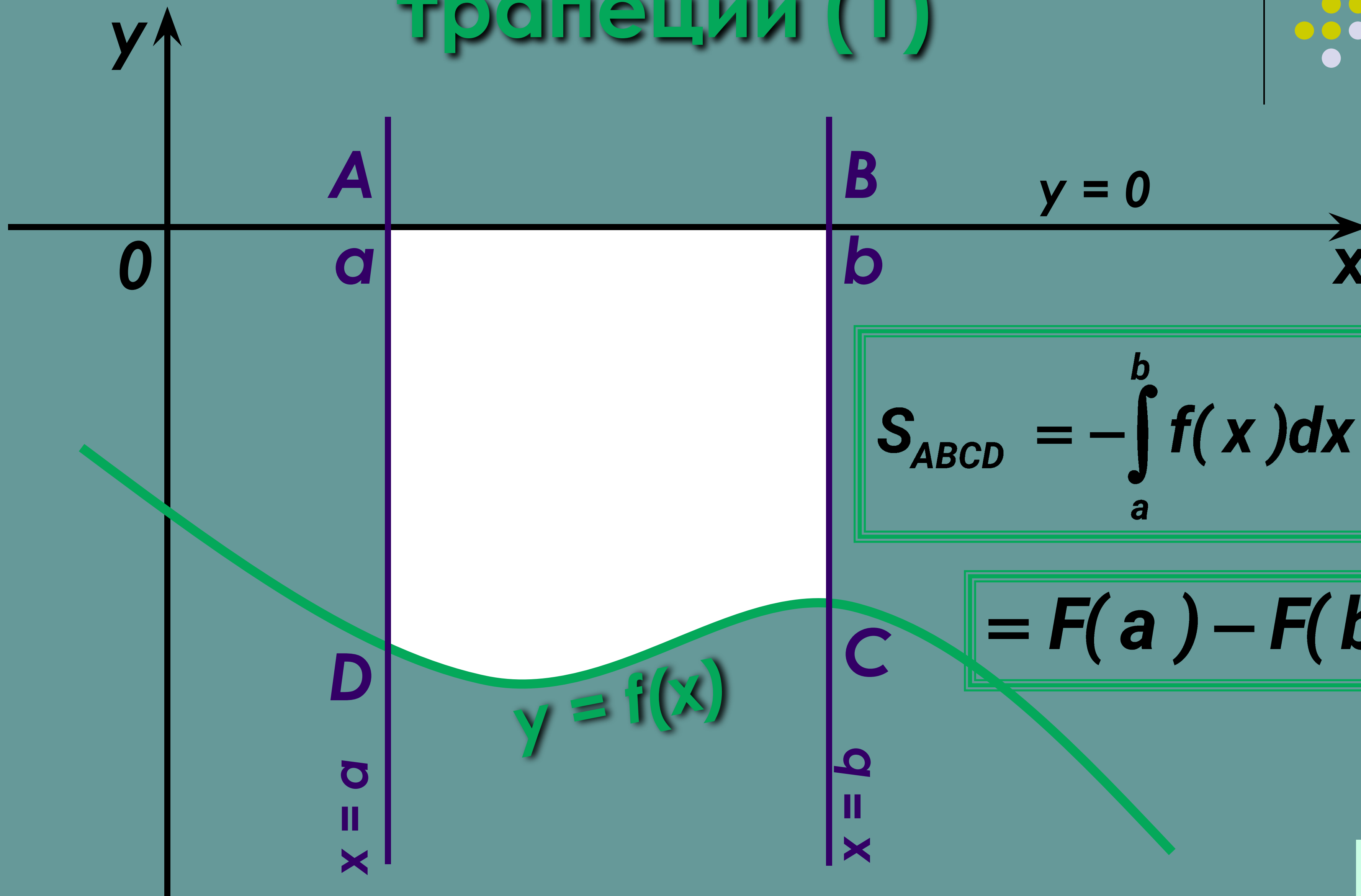
Площадь криволинейной трапеции



$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(b) - F(a)$$

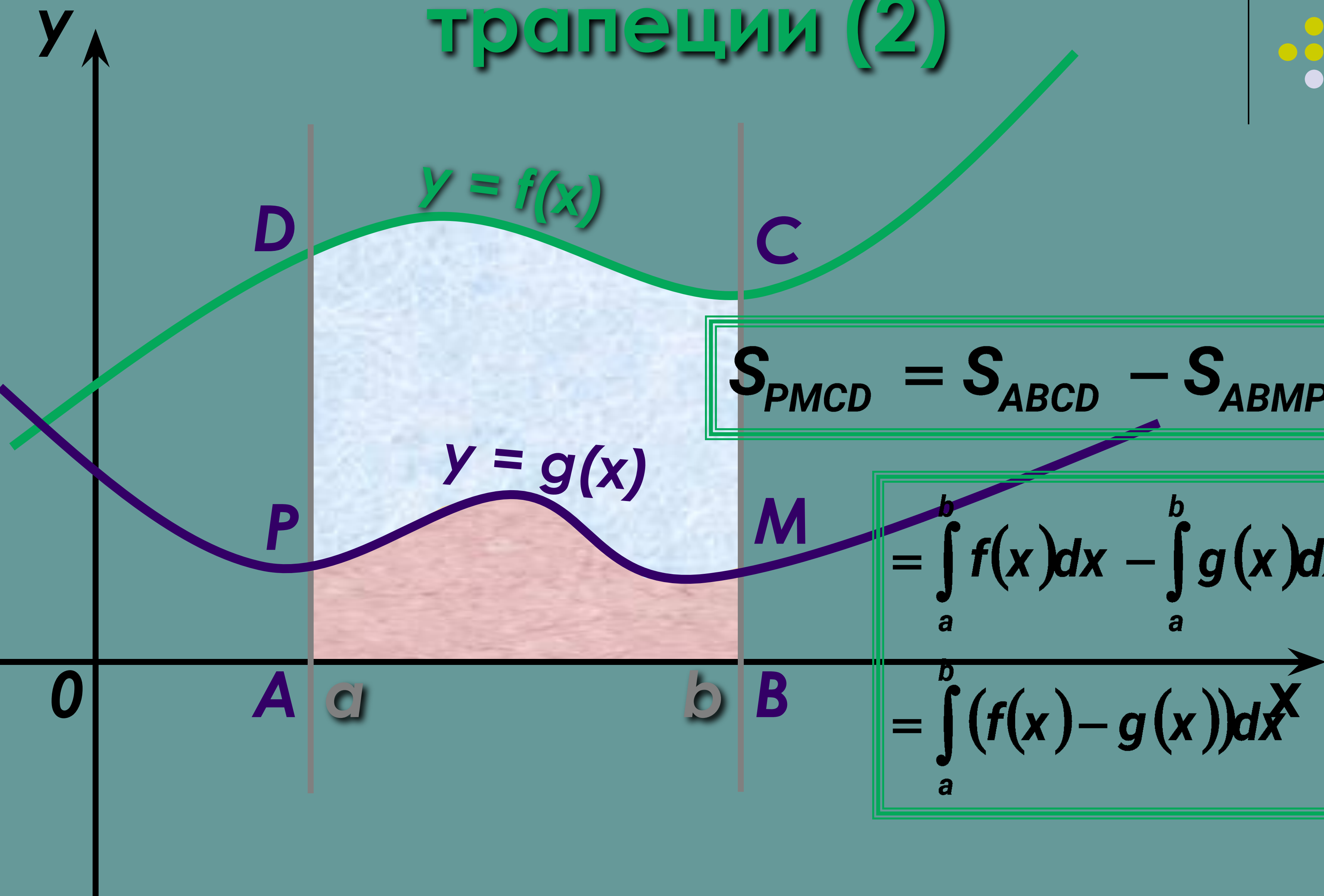
Площадь криволинейной трапеции (1)



$$S_{ABCD} = -\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= F(a) - F(b)$$

Площадь криволинейной трапеции (2)

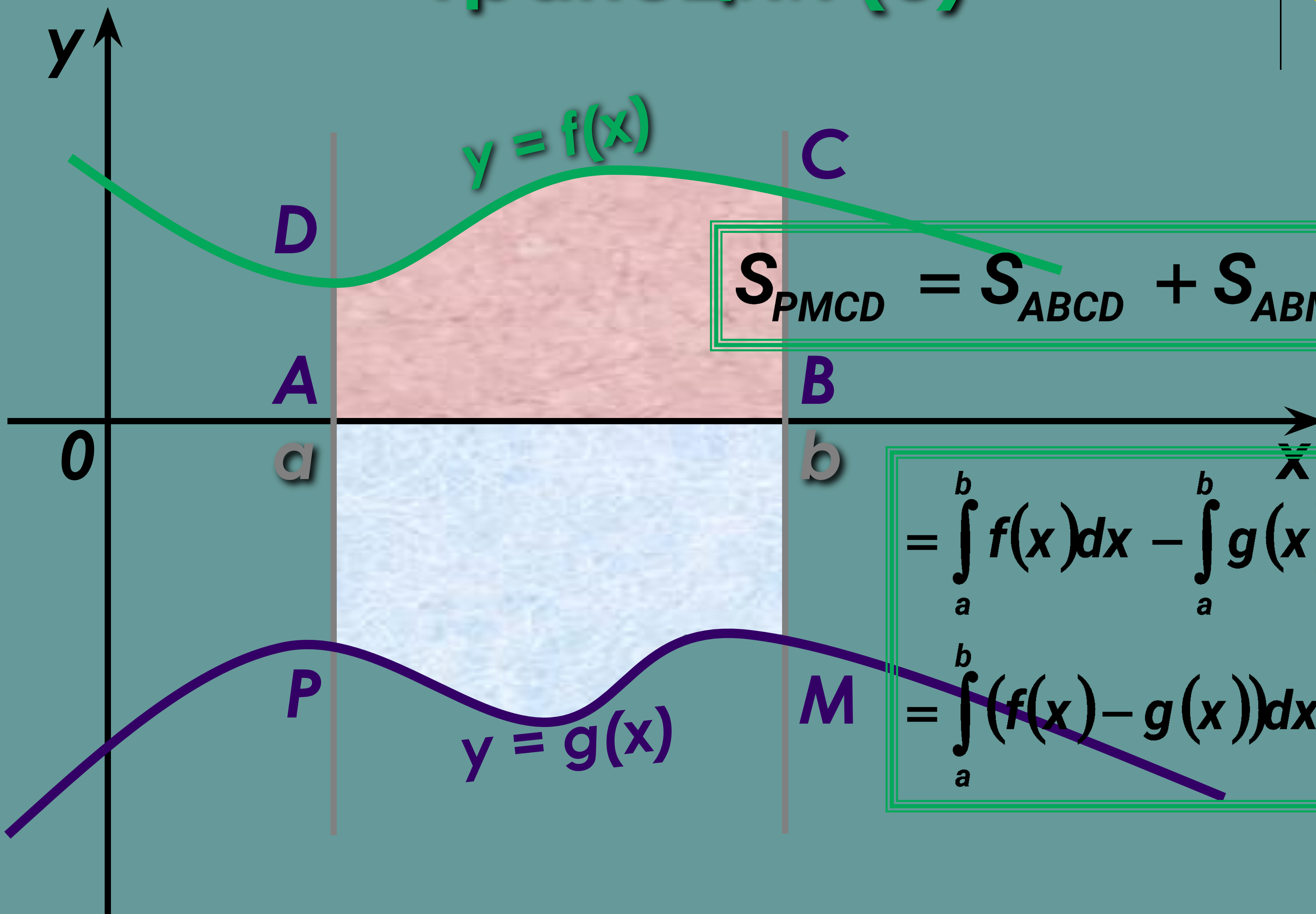


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Площадь криволинейной трапеции (3)

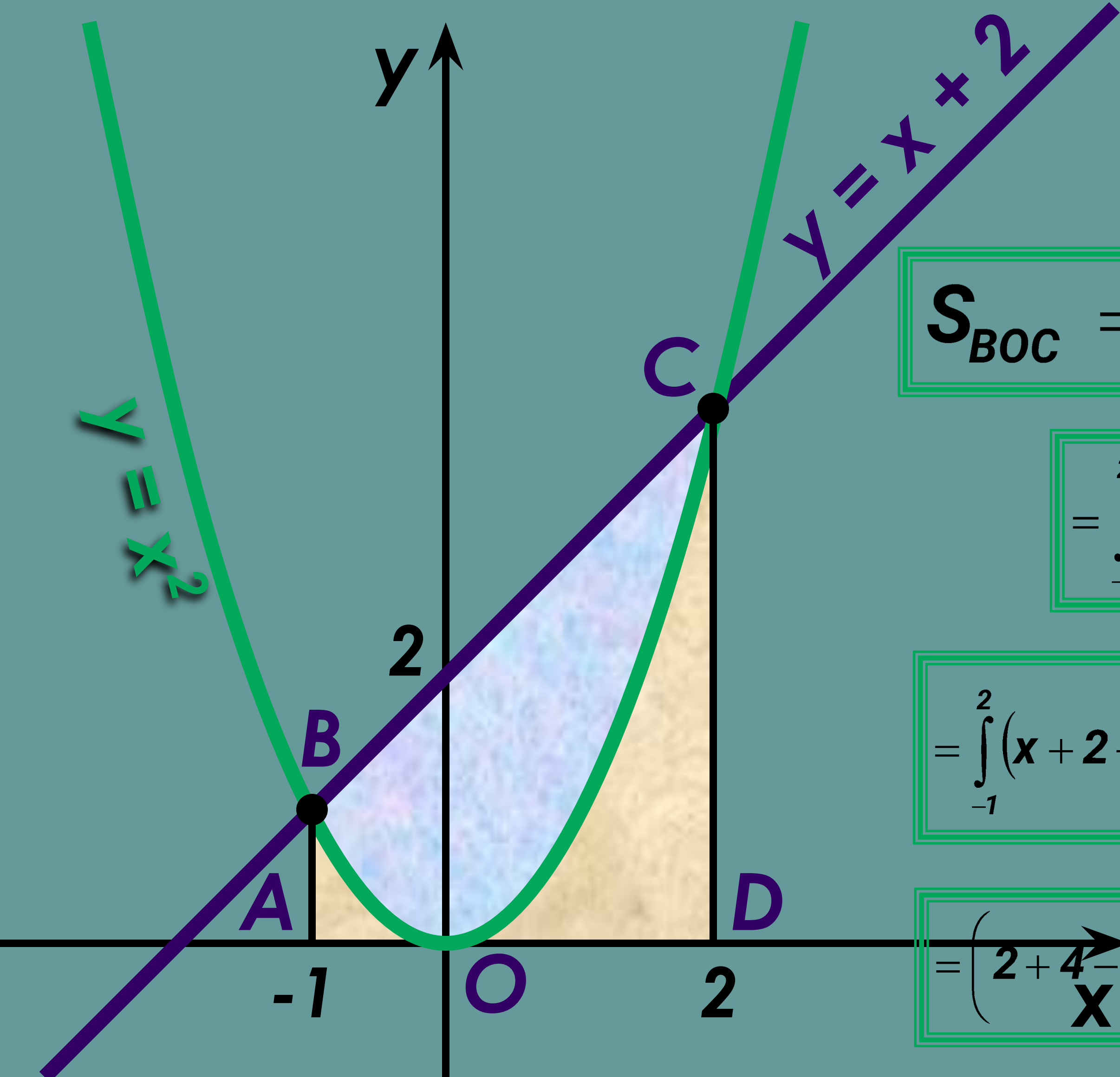


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



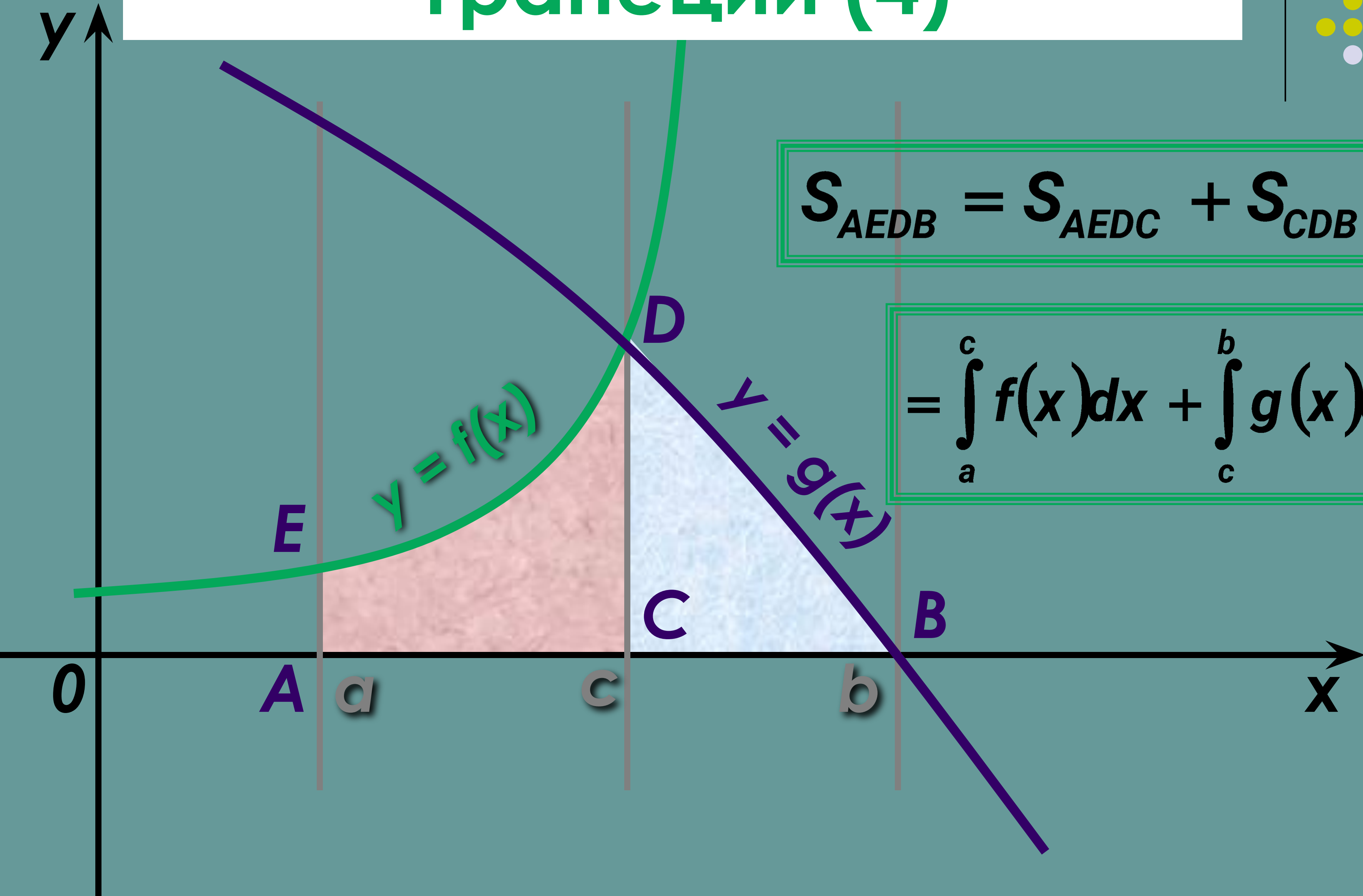
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



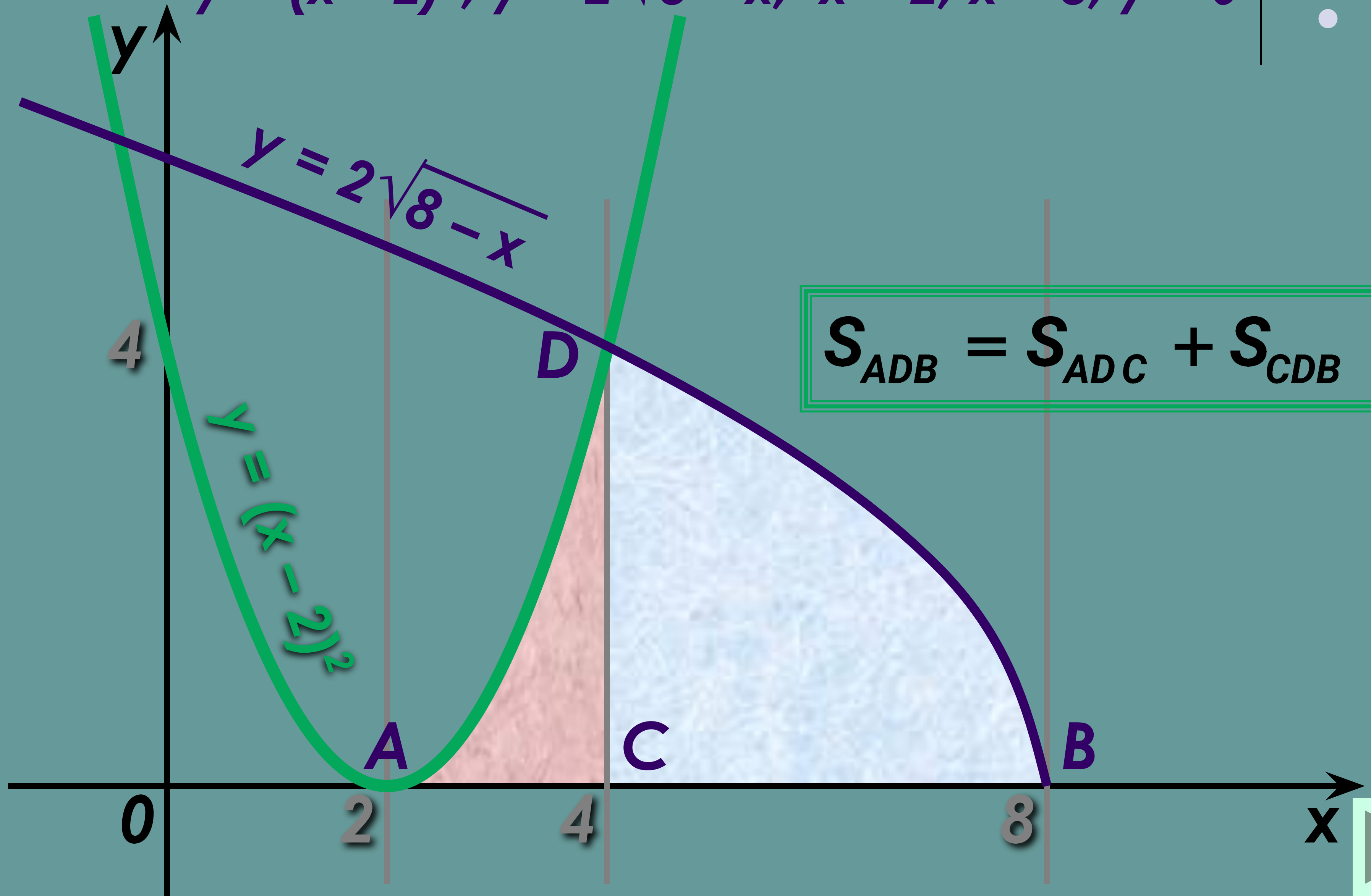
$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

Пример 2: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$= \int_2^4 (x-2)^2\,dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_2^4 - \left.\frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\right|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$