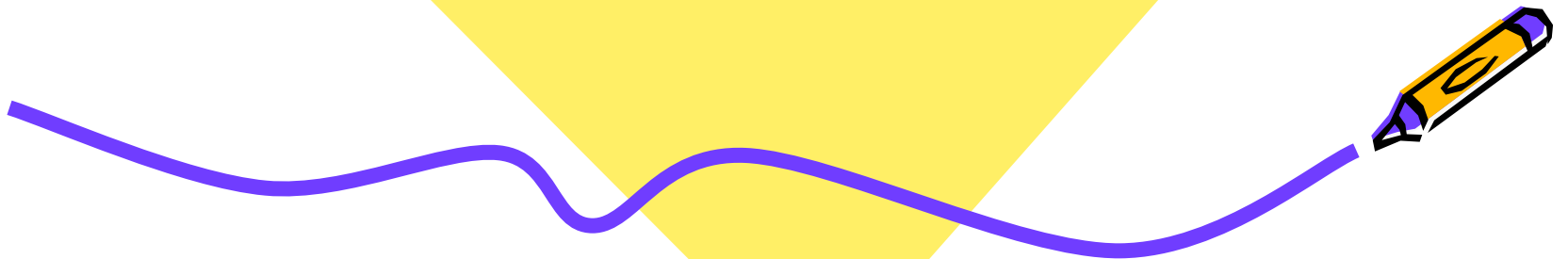




Презентация

Метод множителей Лагранжа





Содержание:

- Построение функции Лагранжа
- Необходимое условие минимума
- Пример
- Необходимые условия
- Нерегулярный и регулярный случаи
- Продолжение
- Завершение просмотра





Построение функции Лагранжа



Метод множителей Лагранжа - это метод решения задач на условный экстремум; метод множителей Лагранжа заключается в сведении этих задач к задачам на безусловный экстремум вспомогательной функции — так называемой функции Лагранжа.

Для задачи об экстремуме функции

$$f_0(x) \rightarrow \min, x \in X$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i g_i(x),$$

$$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m), \mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$$

множители Лагранжа





Необходимое условие минимума



Если x^* -точка локального минимума в поставленной задаче, то существуют множители Лагранжа, $\lambda \in \mathbb{R}^{m+1}, \mu \in \mathbb{R}^k$ не равные одновременно нулю, т.е. $\sum_{i=0}^m \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^k \mu_i^2 \neq 0$, и такие, что выполнены условия:

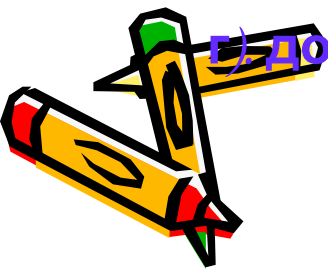
а) Стационарности
 $\frac{\partial L(x^*, \lambda, \mu)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1, \dots, n$
 или

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^k \mu_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1, \dots, n$$

б). Дополняющей нежесткости $\lambda_i f_i(x^*) = 0, \quad i=1, \dots, m$

в). Неотрицательности (согласования знаков) $\lambda_i \geq 0, \quad i=0, 1, \dots, m$

г) допустимости $x^* \in X, \quad m.e. \quad f_i(x^*) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$
 $f_j(x^*) = 0, \quad j=1, \dots, k$





Пример

Решить экстремальную задачу

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \inf$$

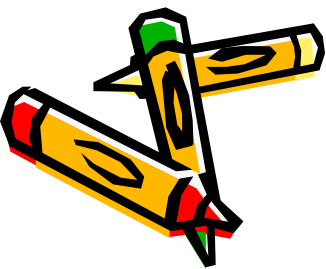
$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$$

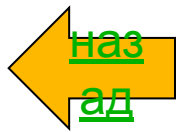
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Решение

Составим функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) + \mu(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$





Необходимые условия



Запишем необходимые условия минимума

а). Стационарности

$$\frac{dL}{dx_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \mu = 0$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + \mu = 0$$

$$\frac{dL}{dx_3} = 2\lambda_0 x_3 + \lambda_1 + \mu = 0$$

б). Дополняющей нежесткости

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0$$

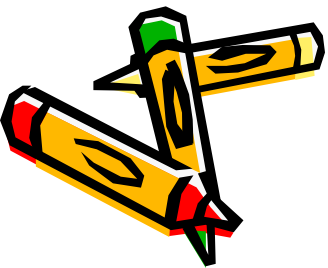
в). Неотрицательности или согласования знаков

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \mu^2 \neq 0$$

г). допустимости

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$





Нерегулярный и регулярный случаи

1. Нерегулярный случай $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ - все множители Лагранжа – нули, что противоречит условию теоремы

2. Регулярный случай $\lambda_0 > 0$

Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

Из условия б) следует, что $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 \neq 0$

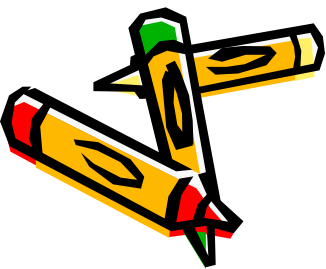
Случай 2а. Пусть $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$ Выразим x_2, x_3

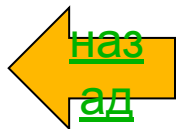
из условия а) через μ : $x_1 = -2\lambda_1 - \mu, x_2 = \lambda_1 - \mu, x_3 = -\lambda_1 - \mu$

Подставим их в уравнения $x_2 + x_3 - 5 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Получим
$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 3\mu = 3, \\ -6\lambda_1 - 2\mu = 5. \end{cases}$$

Отсюда следует $\lambda_1 = -\frac{9}{14} < 0$ что противоречит условию в).





Продолжение



Случай 2б. Пусть $\lambda_1 = 0$

а из уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

критическая точка $\mu_1 = -1$

Из а) следует, что $x_1 = x_2 = x_3 = -\mu_1$

получаем, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

Условие допустимости $2\mu_1 - x_2 + x_3 \leq 5$

выполняется.

Итак для точки $x^* = (1, 1, 1)$ выполнены необходимые условия оптимальности;

Оптимальный выбор множителей Лагранжа равен $\lambda = (\frac{1}{2}, 0, -1)$

