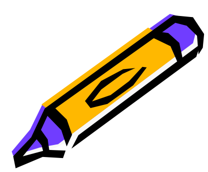
Презентация

Метод множителей Лагранжа



Содержание:

- Завершение просмотра

назад

Построение функции Лагранжа

Метод множителей Лагранжа - это метод решения задач на условный экстремум; метод множителей Лагранжа заключается в сведении этих задач к задачам на безусловный экстремум вспомогательной функции — так называемой функции Лагранжа.

Для задачи об экстремуме функции

$$f_0(x) \to \min, \quad x \in X$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i g_i(x), \qquad \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m), \mu = (\mu_0, \ldots, \mu_k)$$

где

множители Лагранжа

назад

Необходимое условие минимума

Если x^*-точка локального минимума в поставленной задаче, то существуют множители Лагранжа $\lambda \in R^{m+1}, \mu \in R^k$, не равные одновременно нулю, т.е.

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2 \neq 0$$

, и такие, что выполнены условия:

а). Стационарности

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda, \mu)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

или

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

б). Дополняющей нежесткости

$$\lambda_i f_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

в). Неотрицательности (согласования знаков)

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

г). допустимости

$$x^* \in X, \quad т.е. \quad \begin{matrix} f_i(x^*) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ f_j(x^*) = 0, & j = 1, \ldots, k \end{matrix}$$

Пример

Решить экстремальную задачу

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \inf$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Решение

Составим функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) + \lambda_1 \left(2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \right) + \mu \left(x_1 + x_2 + x_3 - 3 \right)$$

назад

Необходимые условия

Запишем необходимые условия минимума

а). Стационарности

$$\frac{dL}{dx_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \mu = 0$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + \mu = 0$$

$$\frac{dL}{dx_3} = 2\lambda_0 x_3 + \lambda_1 + \mu = 0$$

б). Дополняющей нежесткости

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0$$

в). Неотрицательности или согласования знаков

$$\lambda_0 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \mu_1^2 \ne 0$$

г). допустимости

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

наз
ад

Нерегулярный и регулярный случаи

1. **Нерегулярный случай:** $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ **- все множители Лагранжа – нули, что противоречит условию теоремы**

2. **Регулярный случай** $\lambda_0 > 0$

Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

Из условия б) следует, что $\lambda_1 = 0$ **или** $\lambda_1 \neq 0$

Случай 2а. Пусть $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$ **Выразим** x_1, x_2, x_3 **из условия а) через** λ_1, μ: $x_1 = -2\lambda_1 - \mu$, $x_2 = \lambda_1 - \mu$ $x_3 = -\lambda_1 - \mu$

Подставим их в уравнения $2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Получим $\begin{cases} -2\lambda_1 - 3\mu = 3, \\ -6\lambda_1 - 2\mu = 5. \end{cases}$

Отсюда следует $\lambda_1 = -\frac{9}{14} < 0$ **что противоречит условию в).**

наз
ад

Продолжение

Случай 2б. Пусть $\lambda_1 = 0$. Из а) следует, что $x_1 = x_2 = x_3 = -\mu_1$

а из уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ получаем, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ - критическая точка $\mu_1 = -1$.

Условие допустимости $2x_1 - x_2 + x_3 \le 5$ выполняется.

Итак для точки x*=(1,1,1) выполнены необходимые условия оптимальности;

Оптимальный выбор множителей Лагранжа равен $\lambda = (\frac{1}{2}, 0, -1)$