# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СПРОСА. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ.

Теория прогнозирования включает:

- анализ объекта прогнозирования
- методы прогнозирования:
  1. математические(формализованные)
     - -симплексные(простые)
     - -статистические
     - -комбинированные
  2. экспертные (интуитивные)
     - -индивидуальные
     - -коллективные
     - -комбинированные
- системы прогнозирования

# Метод экспоненциального сглаживания с одним параметром

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha) y^*_t,$$

Где $y^*_{t+1}$ -прогнозируемое значение в момент времени t+1

$\alpha$ -параметр сглаживания, определяющий значение веса, которое имеет самое последнее наблюдение при вычислении прогноза на один шаг $0 \le \alpha \le 1.$

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-y^*_t)^2}{n-m}},$$

Где n-число учитываемых периодов времени
m-количество параметров показательного сглаживания

# Пример

| 1-й цикл | | | 2-й цикл | | | 3-й цикл | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| день $j$ | спрос, ед. | всего с начала цикла | день $j$ | спрос, ед. | всего с начала цикла | день $j$ | спрос, ед. | всего с начала цикла |
| 1 | 9 | 9 | 11 | 0 | 0 | 21 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 11 | 12 | 6 | 6 | 22 | 5 | 10 |
| 3 | 1 | 12 | 13 | 5 | 11 | 23 | 4 | 14 |
| 4 | 3 | 15 | 14 | 7 | 18 | 24 | 3 | 17 |
| 5 | 7 | 22 | 15 | 10 | 28 | 25 | 4 | 21 |
| 6 | 5 | 27 | 16 | 7 | 35 | 26 | 1 | 22 |
| 7 | 4 | 31 | 17 | 6 | 41 | 27 | 2 | 24 |
| 8 | 8 | 39 | 18 | 9 | 50 | 28 | 8 | 32 |
| 9 | 6 | 45 | 19 | * | 50 | 29 | 3 | 35 |
| 10 | 5 | 50 | 20 | * | 50 | 30 | 4 | 39 |

* Дефицит.

$\alpha = 0{,}4.$

$y^*_1 = 9$ ед.

$$y^*_{1+1} = 0{,}4 \times 9 + (1 - 0{,}4) \times 9 = 9 \text{ ед.}$$

$$y^*_{2+1} = 0{,}4 \times 2 + (1 - 0{,}4) \times 9 = 6{,}2 \text{ ед.}$$

$$y^*_{3+1} = 0{,}4 \times 1 + (1 - 0{,}4) \times 6{,}2 = 4{,}12 \text{ ед.}$$

$$y^*_{4+1} = 0{,}4 \times 3 + (1 - 0{,}4) \times 4{,}12 = 3{,}67 \text{ ед.}$$
$$y^*_{5+1} = 0{,}4 \times 7 + (1 - 0{,}4) \times 3{,}67 = 5{,}00 \text{ ед.}$$

$$s = \sqrt{\frac{(2-9)^2 + (1-6{,}2)^2 + (3-4{,}12)^2 + (7-3{,}67)^2}{5-1}} = 4{,}7 \text{ ед.}$$

Таблица 7.3

**Значение критерия Стьюдента**

| $k$ | $t_{0,1}$ | $t_{0,05}$ | $t_{0,01}$ | $k$ | $t_{0,1}$ | $t_{0,05}$ | $t_{0,01}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2,920 | 4,303 | 9,925 | 19 | 1,729 | 2,093 | 2,861 |
| 3 | 2,353 | 3,182 | 5,841 | 20 | 1,725 | 2,086 | 2,845 |
| 4 | 2,132 | 2,776 | 4,604 | 21 | 1,721 | 2,080 | 2,831 |
| 5 | 2,015 | 2,571 | 4,032 | 22 | 7,717 | 2,074 | 2,819 |
| 6 | 1,953 | 2,447 | 3,707 | 23 | 1,714 | 2,069 | 2,807 |
| 7 | 1,895 | 2,365 | 3,499 | 24 | 1,711 | 2,064 | 2,797 |
| 8 | 1,860 | 2,306 | 3,355 | 25 | 1,708 | 2,060 | 2,787 |
| 9 | 1,833 | 2,262 | 3,250 | 26 | 1,706 | 2,056 | 2,779 |
| 10 | 1,812 | 2,228 | 3,169 | 27 | 1,703 | 2,052 | 2,771 |
| 11 | 1,796 | 2,201 | 3,106 | 28 | 1,701 | 2,048 | 2,763 |
| 12 | 1,782 | 2,179 | 3,055 | 29 | 1,699 | 2,045 | 2,756 |
| 13 | 1,771 | 2,160 | 3,012 | 30 | 1,697 | 2,042 | 2,750 |
| 14 | 1,761 | 2,145 | 2,977 | 40 | 1,684 | 2,021 | 2,704 |
| 15 | 1,753 | 2,131 | 2,947 | 60 | 1,671 | 2,000 | 2,660 |
| 16 | 1,746 | 2,120 | 2,921 | 120 | 1,658 | 1,980 | 2,617 |
| 17 | 1,740 | 2,110 | 2,898 | $\infty$ | 1,645 | 1,960 | 2,576 |
| 18 | 1,734 | 2,101 | 2,878 | – | – | – | – |

$$y_{\text{нижн}} = 5 - 4{,}7 \times 2{,}132 = -5{,}02.$$

$$y_{\text{верх}} = 5 + 4{,}7 \times 2{,}132 = 11{,}83.$$

# Метод скользящего среднего по m узлам

- Формула скользящего среднего по m узлам:

$$y^*_{t+1} = \frac{1}{m}(y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-m+1}).$$

- Недостатки:

1. все значения имеют одинаковый вес
2. не даст точного прогноза если данные монотонно возрастают или убывают
3. большое количество промежуточных вычислений

# Метод взвешенного скользящего среднего

- Данные для расчета среднего берутся с разными весами.
- Например, если m=4, то взвешенное среднее на 13 период:

$$y^*_{13} = \alpha_0 y_{12} + \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{10} + \alpha_3 y_9,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ веса (неотрицательные числа). Их сумма равна 1 и $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$.

# Метод экстраполяции тренда

- закономерность, действующая внутри анализируемого временного ряда, выступающего в качестве базы прогнозирования, сохраняется и на период прогноза.
- Прогнозирование в этом случае можно свести к подбору аналитически выраженных моделей трендов типа $y = f(t)$ по данным предпрогнозного периода и экстраполяции полученных трендов на интервале прогноза

# Аддитивная модель прогноза

$$y_t^* = \bar{y}_t + s_t + v_t + d_t + \varepsilon_t,$$

где $y^*_t$ - прогнозные значения временного ряда,

$\bar{y}_t$ - сезонные колебания или сезонная волна,

$v_t$ - циклические колебания,

$d_t$ - составляющая, позволяющая учесть другие важные для прогноза факторы.

$\varepsilon_t$ - случайная величина отклонения прогноза, обусловленного стохастическим характером социально-экономических процессов

# Мультипликативная модель прогноза

$$y_t^* = \bar{y}_t \times I_s \times I_v \times I_d + \varepsilon_t,$$

где

$I_s$ — коэффициент (индекс), учитывающий сезонные колебания;

$I_v$ — коэффициент (индекс), учитывающий циклические колебания

$I_d$ — коэффициент (индекс), учитывающий другие важные для конкретного прогноза факторы (фаза жизненного цикла, эффект от маркетинговых мероприятий и др.); $\varepsilon_t$ — случайная величина отклонения прогноза.

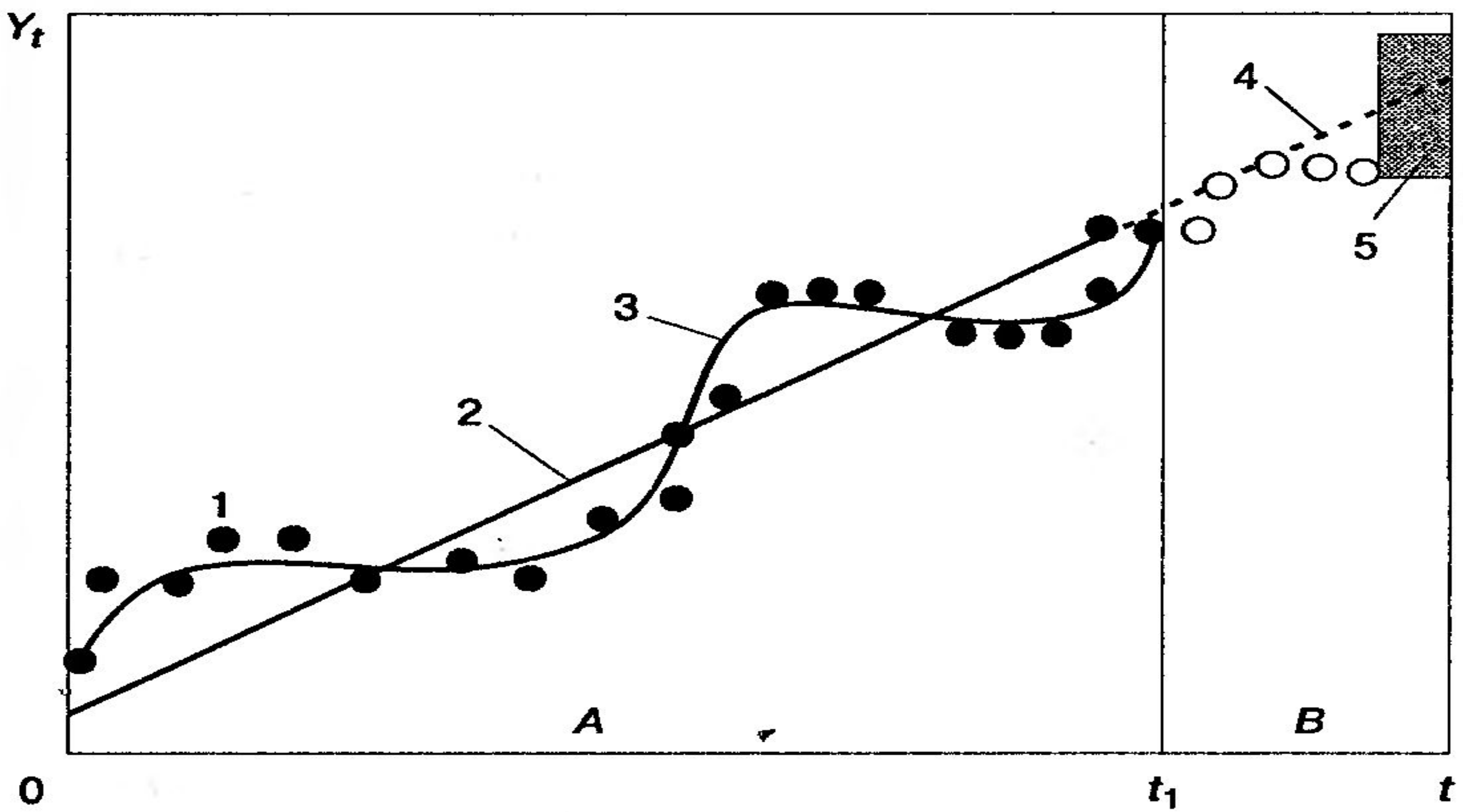


**Рис. 7.2.** Прогнозирование на основе временных рядов

# Процедура прогнозирования

1. Подбор зависимости для описании уравнения тренда. Параметры модели прогнозирования определяются методом наименьших квадратов (МНК).

Если модель тренда линейна $y^*_t = a_0 + a_1 t$, то

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum t_i^2 - \sum t_i \sum y_i t_i}{N \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2};$$

$$a_1 = \frac{N \sum y_i t_i - \sum y_i \sum t_i}{N \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}.$$

2. Продолжение полученного тренда за интервал значений, по которым строилась зависимость, или определение точечного прогноза.

Соотношение длины предпрогнозного периода и периода прогноза должно быть не менее 3:1.

3. Расчет ошибки прогноза.

Погрешность прогноза можно оценить по среднеквадратичному отклонению:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i^* - y_i)^2}{k}},$$

где $y^*_i$ - расчетные, теоретические значения,

$y_i$ - фактические значения,

$k$ - число степеней свободы.

Погрешность прогноза отражается в виде доверительного интервала; точечный прогноз преобразуется в интервальный.

4. Определение интервала прогноза

Доверительный интервал прогноза (при условии небольшого числа наблюдений, нормального распределения прогнозных оценок):

$$\Delta y = \bar{y}_t \pm t_\alpha s_y,$$

где $t_\alpha$ — табличное значение $t$-критерия Стьюдента с $k$ степенями свободы и уровнем значимости $p$.

# Пример

$$y_t = a_0 + a_1 t.$$

$$a_0 = 45{,}2,\ a_1 = -3{,}0$$

$$y_t = 45{,}2 - 3{,}0t.$$

$$s_y = \sqrt{\frac{13}{5-2}} = 2{,}08 \approx 2.$$

На основании полученных зависимостей рассчитываются прогнозные оценки:

- расчет среднего времени расхода

$$\bar{T} = \frac{-a_0}{a_1} = \frac{-45{,}2}{-3{,}0} = 15 \text{ дн.}$$

- расчет страхового запаса:

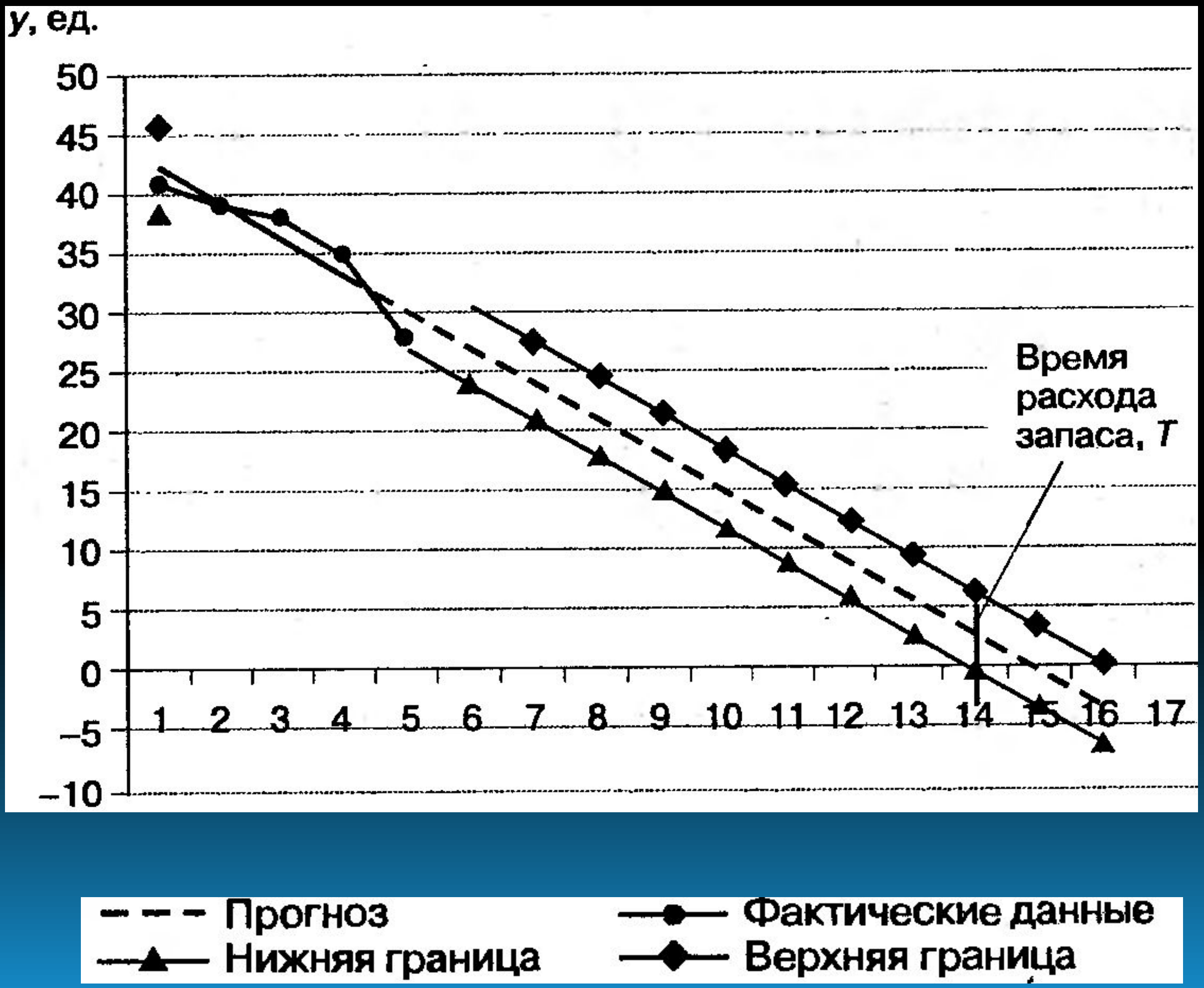
$$y_c = s_y \times t_\beta$$

где $t_\beta$ — параметр нормального закона распределения, соответствующий доверительной вероятности $\beta$.

| $\beta$ | $t_\beta$ | $\beta$ | $t_\beta$ |
|---|---|---|---|
| 0,80 | 1,282 | 0,92 | 1,750 |
| 0,82 | 1,340 | 0,94 | 1,880 |
| 0,84 | 1,404 | 0,95 | 1,960 |
| 0,86 | 1,475 | 0,96 | 2,053 |
| 0,88 | 1,554 | 0,98 | 2,325 |
| 0,90 | 1,643 | 0,99 | 2,576 |
| 0,91 | 1,694 | 0,999 | 3,290 |

$$y_c = 2 \times 1{,}643 = 3{,}29 \text{ ед.}$$

# Прогноз текущего расхода



- Величина страхового запаса:

$$y^*_c = |a_1|t + t_\beta s_y,$$

где t – количество дней задержки поставки заказа

$$y_c = |-3{,}0| \times 1{,}0 + 1{,}643 \times 2 = 6{,}0 \text{ ед.}$$

- Вероятность отсутствия дефицита:

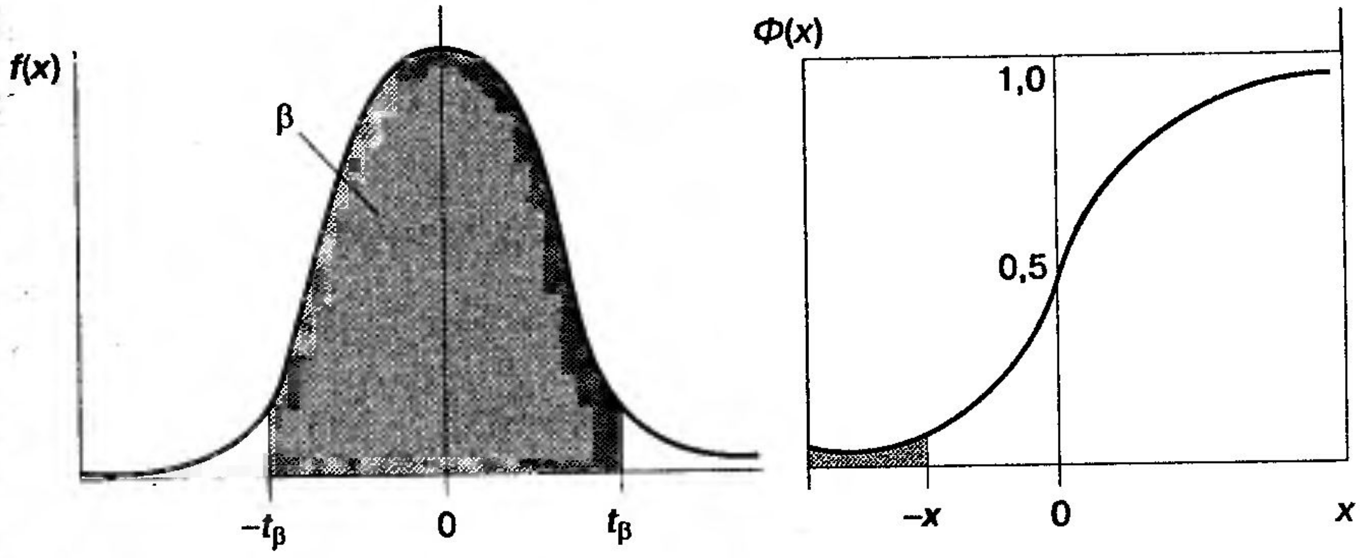
$$P(y) = 1 - F(y) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(y-y_t)^2}{2\sigma^2}} dy,$$

замена $\frac{y - y_t}{\sigma} = x$ ; $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-y_t}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$2\Phi(x) - 1 = \beta.$$

**Значения[1] нормальной функции распределения $\Phi(x)$, вероятности $P(x)$ и параметра $x$**

| $x$ | $\Phi(x)$ | $P(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $P(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,50 | 0,50 | –1,280 | 0,10 | 0,90 |
| –0,125 | 0,45 | 0,55 | –1,405 | 0,08 | 0,92 |
| –0,253 | 0,40 | 0,60 | –1,555 | 0,06 | 0,94 |
| –0,385 | 0,35 | 0,65 | –1,645 | 0,05 | 0,95 |
| –0,525 | 0,30 | 0,70 | –1,75 | 0,04 | 0,96 |
| –0,675 | 0,25 | 0,75 | –2,05 | 0,02 | 0,98 |
| –0,842 | 0,20 | 0,80 | –2,30 | 0,01 | 0,99 |
| –1,037 | 0,15 | 0,85 | –3,10 | 0,001 | 0,999 |




а)

б)

$$y_{t=13} = 45{,}2 - 3{,}0 \times 13 = 6{,}2$$

$$x = \frac{-6{,}2}{2} = -3{,}1.$$

$$P(T = 13) > 0{,}999$$

$$y_{T-14} = 3{,}2;\ x = -1{,}6,$$

$$P_{T-14} \cong 0{,}95.$$

$t = 15$ $P \cong 0{,}5.$

# Экспоненциальное сглаживание с учетом тренда

Метод Хольта или двухпараметрический метод экспоненциального сглаживания.

- сглаживание данных:

$$a_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

- сглаживание тренда:

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$$

- прогноз на период t+k:

$$y^*_{t+k} = a_t + b_t k$$

где $a_t$ - сглаженное значение прогнозируемого показателя для периода t, $b_t$ - оценка прироста тренда,

$\alpha, \beta$ - параметры сглаживания $(0 \le \alpha \le 1; 0 \le \beta \le 1)$ ,

k- количество периодов времени, на которые производится прогноз.

# Прогнозирование с учетом сезонной составляющей

1. Определение структуры сезонных изменений и периода колебаний
2. Оценка и исключение тренда
3. Определение сезонной компоненты
4. Прогнозирование на основе данных, из которых исключена сезонная составляющая
5. Вычисление ошибки модели прогноза

# Экспоненциальное сглаживание с тремя параметрами

Предложена Винтерсом в 1960 г.

- Сглаживание исходного ряда:

$$L_t = \alpha \frac{y_t}{s_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

- Сглаживание тренда:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$$

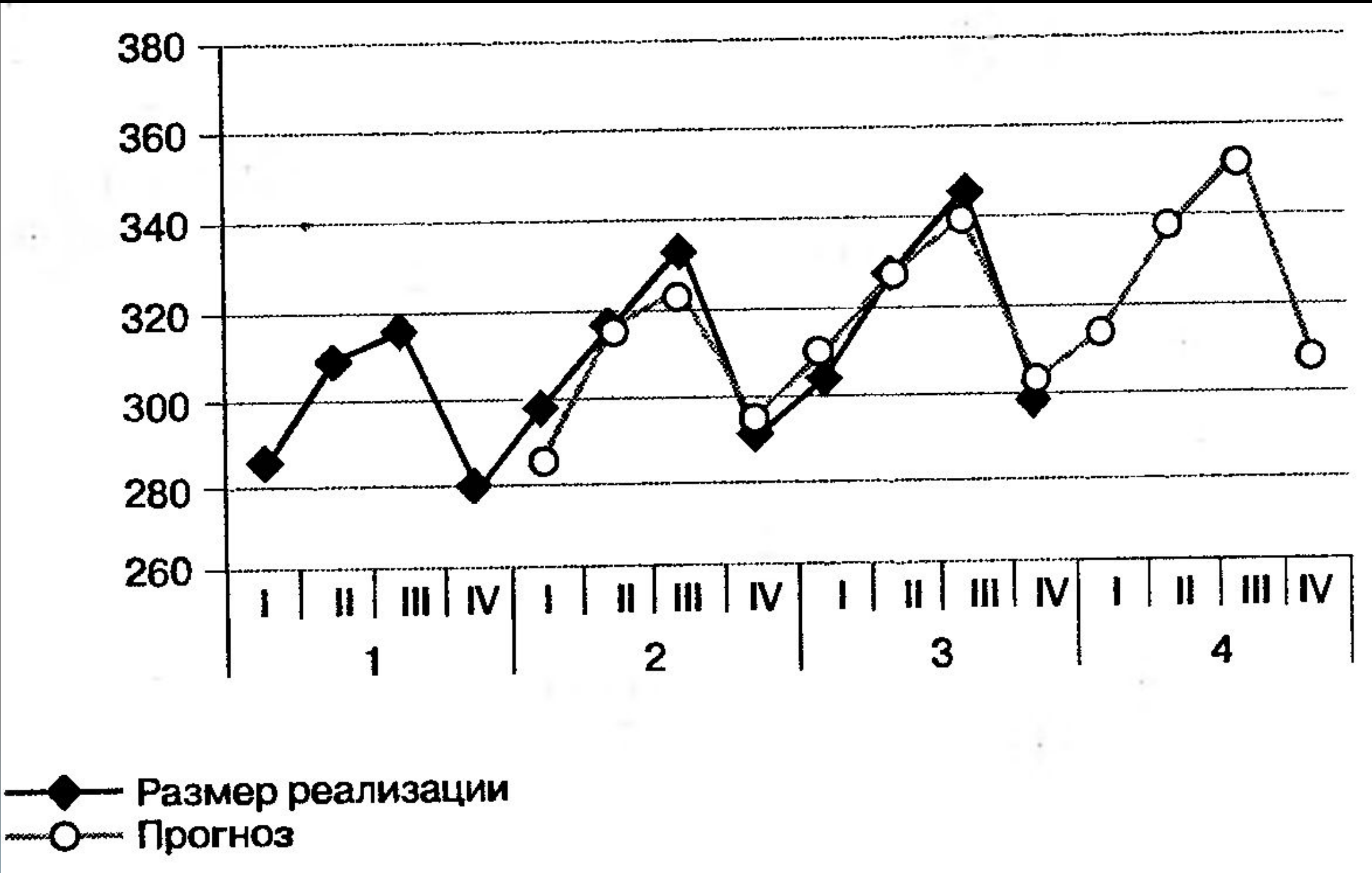
- Оценка сезонности:

$$S_t = \gamma \frac{y_t}{L_t} + (1-\gamma)S_{t-s}$$

- Прогноз на p периодов вперед:

$$y^*_{t+p} = (L_t + pT_t)S_{t-s+p}$$

$$0 \le \alpha \le 1;\ 0 \le \beta \le 1;\ 0 \le \gamma \le 1.$$




Прогноз по методу экспоненциального сглаживания
с тремя параметрами

# Анализ Фурье

$$y_t = a_0 + \sum(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau)$$

где $a_0$, $a_k$, $b_k$ — параметры модели, $k$ — номер гармоники

- Параметры модели определяются по методу наименьших квадратов.
- Для применения этого метода необходимо, чтобы количество точек исходного ряда являлось степенью числа 2.


**Рис. 7.10.** График модели прогнозирования с использованием анализа Фурье

# Экспертные методы прогнозирования

# Формирование группы экспертов

$$N_{\min} = 2{,}5 + \frac{1{,}5}{E}$$

$$N_{\min}(E = 0) \to \infty,\ N_{\min}(E = 1) = 4.$$

$$N_{\max} \leq 3 \times \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{2 \times K_{\max}}$$

- где $K_i$ - компетентность i-го эксперта, рассчитанная на основе анкеты самооценки или другим способом,
- $K_{\max}$ - максимальная возможная компетентность по используемой шкале компетентности экспертов

# Методы выбора экспертов

- самооценка
- оценка группой каждого специалиста
- оценка на основе результатов прошлой деятельности
- определение компетентности кандидатов в эксперты.

# Метод простого ранжирования

- каждый эксперт располагает признаки в порядке предпочтения.

Методика статистической обработки данных:

1.определение для каждого фактора суммы рангов:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im}$$

где $a_{ij}$ — ранг, присвоенный $j$-м экспертом $i$-му фактору; $m$ — число экспертов.

2. определение средней величины суммы рангов:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}{k}$$

где $k$ — число факторов.

3. определение суммы квадратов отклонения:

$$S = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - \bar{a}\right)^2$$

4. определение коэффициента конкордации:

$$W = \frac{12 \times S}{m^2 \times k \times \left(k^2 - 1\right)}$$

$$\chi^2 = \sqrt{S} \qquad \chi^2_{\ m}(n, \alpha) < \chi^2$$

# Метод задания весовых коэффициентов

- состоит в присвоении всем признакам весовых коэффициентов (коэффициентов важности)
- обобщенное мнение экспертов рассчитывается как среднее арифметическое
- Для применения результатов экспертного опроса, выполненного по данному методу, также требуется проверка согласованности мнений экспертов.

# Метод последовательных сравнений

1. Эксперт i упорядочивает все признаки в порядке уменьшения их значимости:

$$X_1 > X_2 > X_3 > \ldots > X_m.$$

2. Эксперт присваивает первому признаку значение, равное 1, а остальным назначает весовые коэффициенты в долях единицы
3. Проводится сравнение первого признака с суммой коэффициентов всех последующих

$$a_{1i} > a_{2i} + a_{3i} + \ldots + a_{mi};$$
$$a_{1i} = a_{2i} + a_{3i} + \ldots + a_{mi};$$
$$a_{1i} < a_{2i} + a_{3i} + \ldots + a_{mi}.$$

4. Эксперт выбирает наиболее приемлемый вариант и проводит в соответствии с ним оценку первого признака.

5. Процедура повторяется с отбраковкой последних признаков по одному до сравнения $X_1$ с признаками $X_2$ и $X_3$.

6. Эксперт переходит к сравнению $X_2$ с последующими признаками.

7. Процедура заканчивается, когда возможности сравнения будут исчерпаны.

# Метод парных сравнений

1. Каждый i-й эксперт проводит попарную оценку приоритетности признаков (X). При этом каждым экспертом заполняется матрица $E_i = (I_{ikj})$ элементы которой в зависимости от выбора эксперта определяются по формуле :

$$I_{ikj} = 1, \text{ если } X_k \geq X_j;$$
$$I_{ikj} = 0, \text{ если } X_k < X_j$$

2. Определяется сумма матриц всех экспертов. Суммирование проводится по элементам матрицы. Элемент суммарной матрицы определяется по следующей формуле:

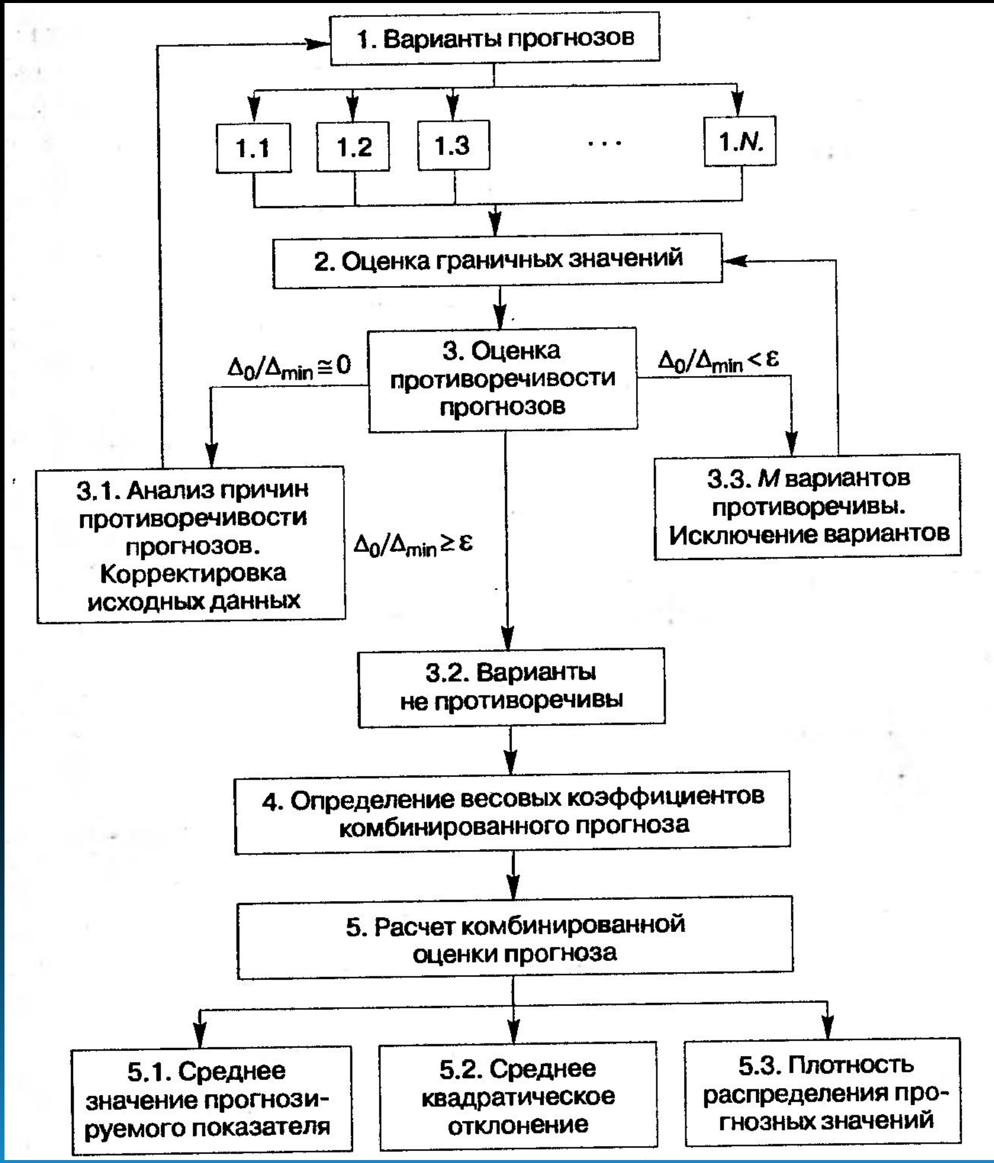
$$z_{kj} = \sum_{i=1}^{m} I_{ikj}$$

3. Определяется результирующая матрица R, каждый элемент которой определяется по формуле :

$$r_{kj} = 1, \text{ если } Z_{kj} \geq n/2;$$
$$r_{kj} = 0, \text{ если } Z_{kj} < n/2.$$

4. Находится сумма баллов, которую набрал каждый признак.

# Комбинированная оценка прогноза



- Весовые коэффициенты рассчитываются по формуле:

$$\mu_i = \left( \sigma_i^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1}$$

- Для двух прогнозов:

$$\mu_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{ и } \mu_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- Среднее значение комбинированного прогноза:

$$\bar{Y}_{комб} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \times Y_i$$

- Дисперсия комбинированного прогноза:

$$\sigma_{комб}^2 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \times \sigma_i^2$$

# Причинно-следственное прогнозирование

- инерционность взаимосвязей - сохранение механизма формирования явления.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$x_1, x_2, ..., x_n.$$

уравнение регрессии, коэффициенты могут быть определены методом наименьших квадратов.

Примеры:

прогнозы объемов продаж в зависимости от торговой площади

в зависимости от затрат на рекламу

Работу выполнила Зиятдинова Аделя 991э