

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ (ИФО)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**



**КУРСОВОЙ ПРОЕКТ**

**ПО УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

**НА ТЕМУ:**

**Колебание нити, подвешенной за  
один конец**

**Выполнили студентки ИФО 3-2**

**Акимова А.А., Аюнц А.В.**

# Свободные колебания подвешенной нити

- Будем рассматривать малые колебания такие, что можно пренебречь квадратом производной по сравнению с единицей. Дифференциальное уравнение малых колебаний подвешенной нити:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Здесь  $a = \sqrt{g}$

# Краевые условия

- Задача о колебании подвешенной нити сводится к интегрированию уравнения с граничным условием:

$$u|_{x=l} = 0$$

- А также с начальными условиями:

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x).$$

Задача сводится к решению  
уравнения:

$$\frac{1}{4\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Решение будем искать в виде:

$$u = \omega(\xi)T(t)$$

Получаем два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\omega}{d\xi} \right) + \lambda^2 \xi \omega = 0$$

$$T''(t) + \left( \frac{a}{2} \lambda \right)^2 T(t) = 0$$

# Решения

- При решении используются функции Бесселя  
напомним уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

- Где решением будет функция:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left[ \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right]$$

- Тогда решения требуемых 2-х уравнений  
будут:

$$\omega_k(x) = J_0(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}})$$

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}$$

# Получим решение

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} \right) J_0 \left( \mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right)$$

Где коэффициенты, найденные с помощью начальных условий, равны соответственно:

$$A_k = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0 \left( \mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx$$

$$B_k = \frac{2}{a\sqrt{l} \mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^l F(x) J_0 \left( \mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx$$

# Практическая задача

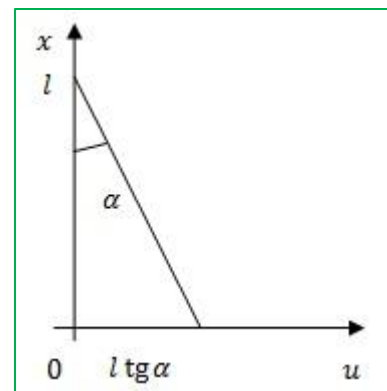
Тяжелая однородная нить длины  $l$ , закрепленная верхним концом, в начальный момент отклонена от вертикальной оси на угол  $\alpha$  (рад.). найти отклонение нити в любой момент времени.

Начальные условия:

$$F(x) = 0$$

$$f(x) = -x \operatorname{tg} \alpha + l \operatorname{tg} \alpha$$

Рисунок:



# Решение

Функция Бесселя I-го рода будет равна:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

Решение этой задачи запишем в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} \right) I_0 \left( \mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right)$$

Где коэффициенты равны соответственно:

$$A_k = \operatorname{tg} \alpha \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k}}{k! (k+2)!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k+1}}{k! (k+1)!}}$$

$$B_k = 0$$



Окончательный ответ получим :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{tg} \alpha \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k}}{k! (k+2)!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k+1}}{k! (k+1)!}} \cos\left(\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2} \sqrt{\frac{x}{l}}\right)^{2k}}{k! k!}$$

# Вывод

- Уравнение колебания нити является волновым уравнение с переменными коэффициентами

В отличие от простейших задач  $x$ - переменный коэффициент

- Собственные функции выражаются через функции Бесселя
- Можно сделать вывод, что малые колебания подвешенной нити можно рассматривать как движение, складывающееся из бесчисленного множества гармонических колебаний
- Рассмотрен пример