МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ (ИФО)
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

ПО УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

НА ТЕМУ:

Колебание нити, подвешенной за один конец

Выполнили студентки ИФО 3-2
Акимова А.А., Аюнц А.В.

Свободные колебания подвешенной нити

- Будем рассматривать **малые колебания** такие, что можно пренебречь квадратом производной по сравнению с единицей. Дифференциальное уравнение малых колебаний подвешенной нити:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Здесь $a=\sqrt{g}$

Краевые условия

- Задача о колебании подвешенной нити сводится к интегрированию уравнения с граничным условием:

$$u|_{x=l} = 0$$

- А также с начальными условиями:

$$u|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x).$$

Задача сводится к решению уравнения:

$$\frac{1}{4\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Решение будем искать в виде:

$$\mathrm{u}=\omega(\xi)T(t)$$

Получаем два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\omega}{d\xi}\right)+\lambda^2\xi\omega=0$$

$$T''(t)+\left(\frac{a}{2}\lambda\right)^2 T(t)=0$$

Решения

- При решении используются функции Бесселя

напомним уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

- Где решением будет функция:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]$$

- Тогда решения требуемых 2-х уравнений будут:

$$\omega_k(x) = J_0(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}$$

$$T_k(t) = A_k\cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k\sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}$$

Получим решение

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}+B_k\sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

Где коэффициенты, найденные с помощью начальных условий, равны соответственно:

$$A_k=\frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)}\int_0^l f(x)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx$$

$$B_k=\frac{2}{a\sqrt{l}}\frac{1}{\mu_k J_1^2(\mu_k)}\int_0^l F(x)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx$$

Практическая задача

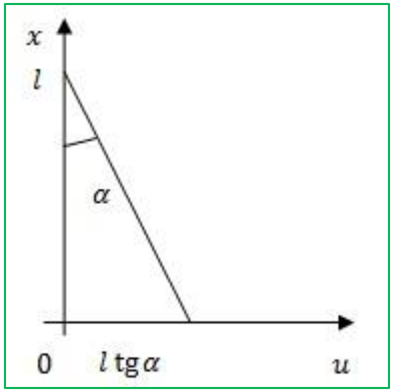
Тяжелая однородная нить длины , закрепленная верхним концом, в начальный момент отклонена от вертикальной оси на угол *a* (рад.). найти отклонение нити в любой момент времени.

Начальные условия:

$$F(x) = 0$$

$$f(x) = -x\,\mathrm{tg}\,\alpha + l\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Рисунок:



Решение

Функция Бесселя 1-го рода будет равна:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Решение этой задачи запишем в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + \mathrm{B}_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right) I_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

Где коэффициенты равны соответственно:

$$\mathrm{A}_k = l\operatorname{tg}\alpha \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k}}{k!\,(k+2)!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k+1}}{k!\,(k+1)!}}$$

$$\mathrm{B}_k = 0$$

Окончательный ответ получим :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} l\,\mathrm{tg}\,\alpha \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k}}{k!\,(k+2)!}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^{2k+1}}{k!\,(k+1)!}} \cos\left(\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\mu_k}{2}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)^{2k}}{k!\,k!}$$

Вывод

- Уравнение колебания нити является волновым уравнение с переменными коэффициентами

В отличие от простейших задач x- переменный коэффициент

- Собственные функции выражаются через функции Бесселя
- Можно сделать вывод, что малые колебания подвешенной нити можно рассматривать как движение, складывающееся из бесчисленного множества гармонических колебаний
- Рассмотрен пример