Лекция 2

Кинетика диффузионно-контролируемых реакций

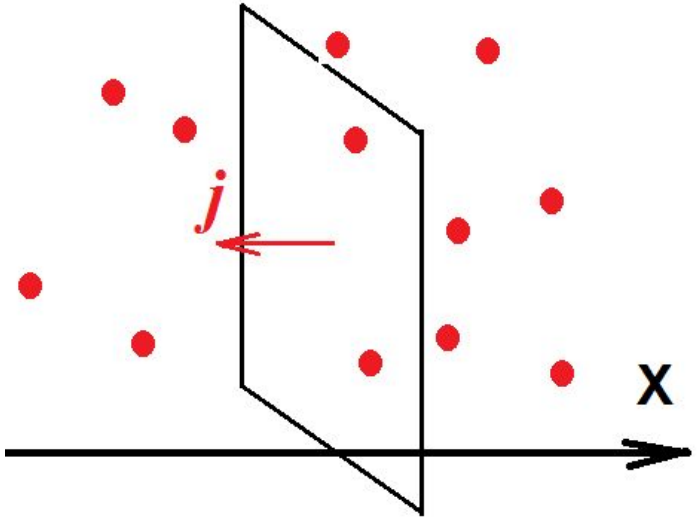
Воробьев А.Х.

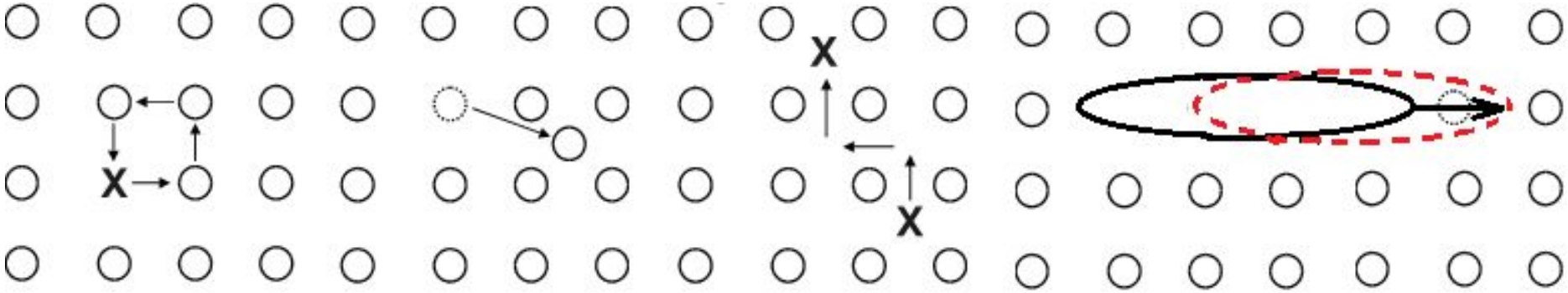
2012

Диффузионное приближение

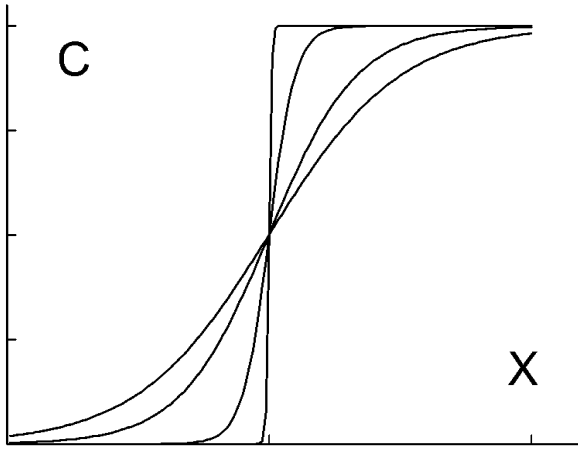
Поток: $$j = \frac{\Delta \mathrm{m}}{S \Delta \mathrm{t}}$$

Уравнение Фика: $$j = -D \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \mathrm{x}}$$



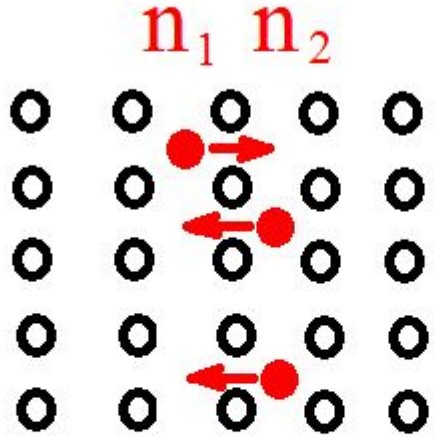


Коэффициент диффузии



$$D = \frac{1}{3}\bar{l}\bar{v} = \frac{1}{3}\frac{\bar{l}^2}{\bar{\tau}} = \frac{1}{3}\bar{v}^2\bar{\tau}$$

$$D = \frac{\nu \boldsymbol{l}^2}{6}$$



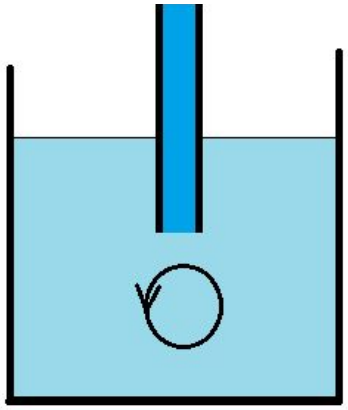
$$j = (n_1 - n_2)\frac{\nu}{6}$$

Формула Стокса-Эйнштейна:

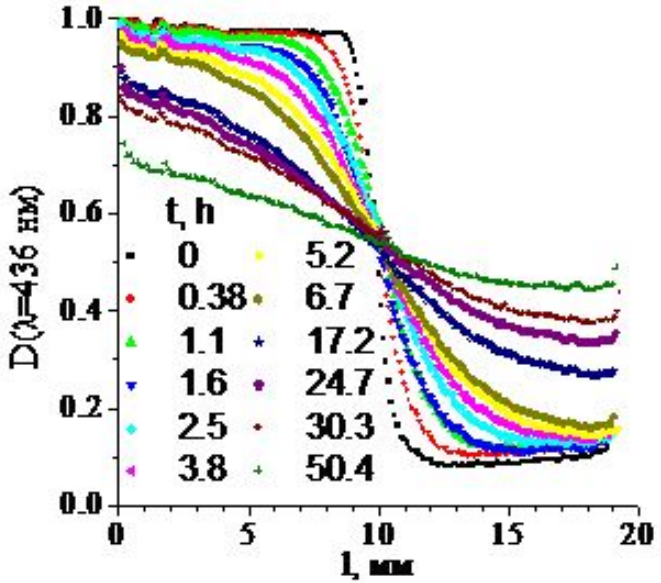
$$D = UkT = \frac{kT}{6\pi\eta R}$$

Методы определения

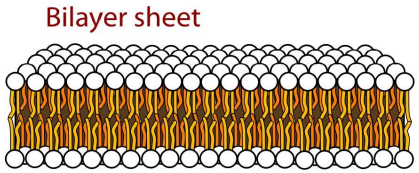
Интегральные:
Истечение из капилляра.
Полярография.

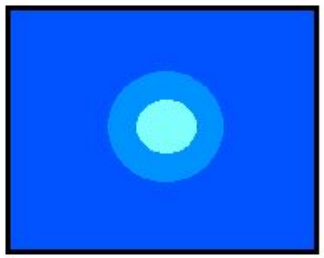


Измерение профиля.
Томография.

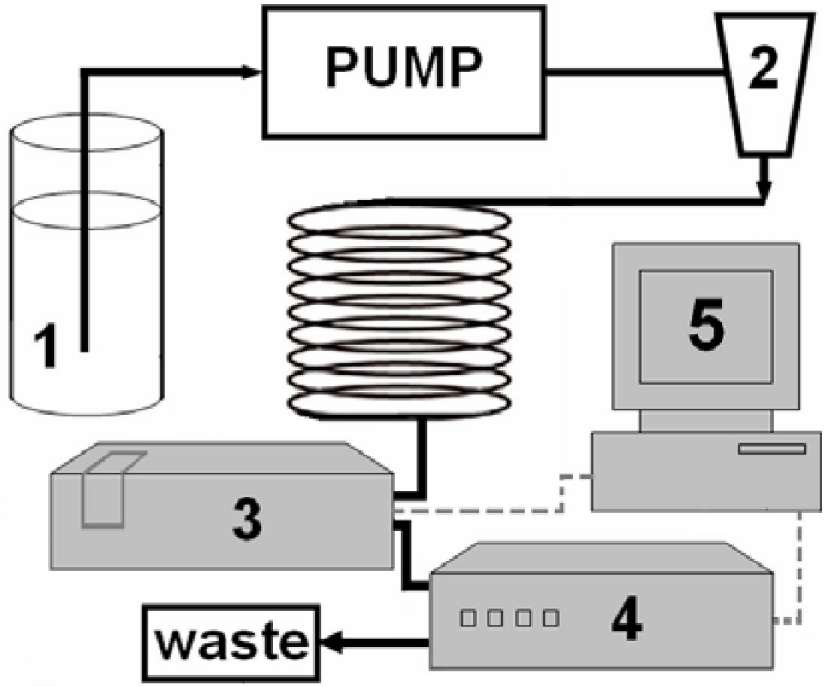


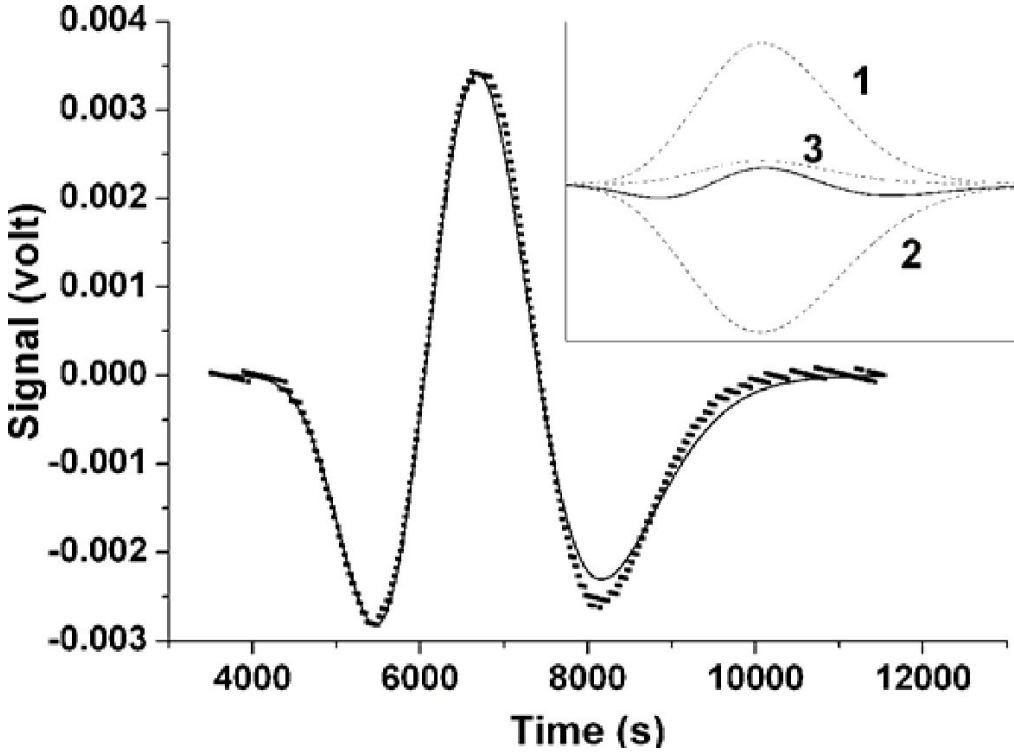
Восстановление флуореесценции
после фотообесцвечивания





Метод Тейлора





Четырехкомпонентная смесь

Кросс-диффузия

$$j_i = -D_{ii}\frac{\partial C_i}{\partial x} + \sum_k D_{ik}\frac{\partial C_k}{\partial x}$$

Три механизма:
- электростатическое взаимодействие;
- исключенный объем;
- комплексообразование.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1.156 & 1.284 \\ 0.131 & 0.751 \end{pmatrix} \times 10^{-5}\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$$

at $c_1 = 2.845$ M, (NaCl)
$c_2 = 0.948$ M ($MgCl_2$)

(distearyldimethylammonium hydroxide) (c_1)–NaCl (c_2)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0.349 & 0.006 \\ -7.2 & 1.5 \end{pmatrix} \quad (c_2 = 5\,mM,\ c_1 = 40\ \mathrm{mM})$$

in units of 10^{-5} cm^2 s^{-1}

Коэффициент диффузии

	t, (°C)	D, $м^2/с$
He, 1 атм	0	$1,62 \cdot 10^{-4}$
N_2, 1 атм	0	$1,7 \cdot 10^{-5}$
н-Гексан	25	$4,21 \cdot 10^{-9}$
C_6H_6	25	$2,15 \cdot 10^{-9}$
C_2H_5OH	25	$1,05 \cdot 10^{-9}$
CCl_4	25	$1,41 \cdot 10^{-9}$
H_2O	25	$2,43 \cdot 10^{-9}$
O_2 в ПЭ	25	$4,6 \cdot 10^{-11}$
C_3H_8 в ПЭ	25	$3,2 \cdot 10^{-12}$

В воде	t, (°C)	D, м2/с
C_2H_5OH	20	1,24·10-9
C_6H_6	20	1,02·10-9
Глицерин	15	0,72·10-9
Глюкоза	11	0,52·10-9
Сахароза	11	0,36·10-9
H+	25	9,31·10-9
K+	25	1,96·10-9
Ag+	25	1,65·10-9
Ca^{2+}	25	7,92·10-10
$[Fe(CN)_6]^{4-}$	25	7,36·10-10

Уравнение диффузии

$$\frac{\partial C(r)}{\partial t} = div[D(r)grad(C(r))] + f(r,t,C)$$

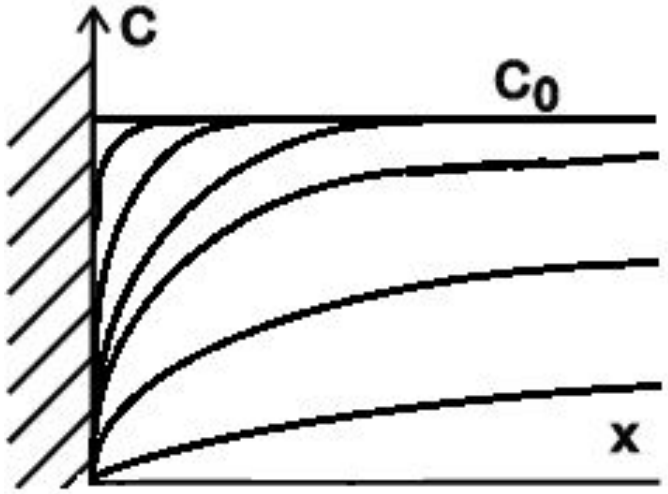
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathrm{D}\Delta\mathrm{C} + f(r,t) = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t)$$

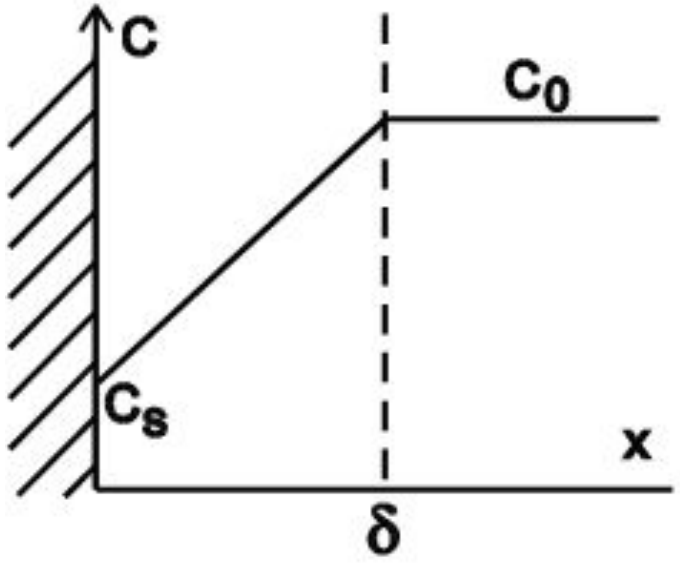
$$r^2\Delta = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + f(x,t,C)$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho}\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2} + q(x,t,T)$$

Стационарная диффузионная задача





$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

Граничные условия:

1) $C(\delta) = C_0$

2) $D\left(\frac{dC}{dx}\right)_{x=0} = k_s C(0)$

Решение:

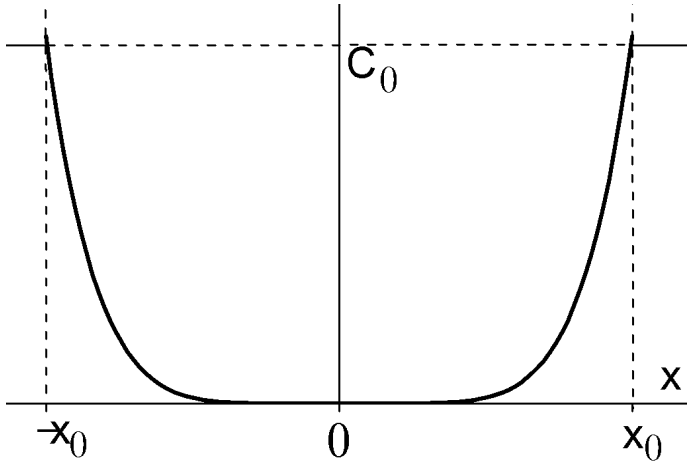
$$C(x) = \frac{C_0}{\frac{D}{k_s \delta} + 1}\left(\frac{D}{k_s \delta} + \frac{x}{\delta}\right)$$

$$C(0) = C_0 / (1 + k_s \delta / D)$$

$$w = k_s / (1 + k_s \delta / D)$$

Нелинейное уравнение

Задача о диффузии реагента



$$nC \rightarrow \text{Prod}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{d^2C}{dx^2} - kC^n$$

$$0 = \mathrm{D}\frac{d^2C}{dx^2} - kC^n$$

$$\mathrm{C}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{C}_0$$

$$\left(\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dx}}\right)_{\mathrm{x}=0} = 0$$

Понижение степени:

$$\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{p}$$

$$D\mathrm{p}\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dC}} - \mathrm{kC}^{\mathrm{n}} = 0$$

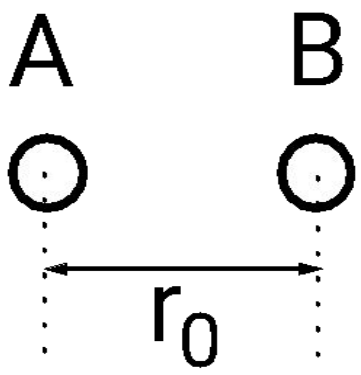
Неполное решение:

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dx}} = \sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{(\mathrm{n}+1)D}}[\mathrm{C}^{\mathrm{n}+1} - \mathrm{C}(0)^{\mathrm{n}+1}]^{1/2}$$

Скорость реакции:

$$\mathrm{w} = \left(\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dx}}\right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0} = \sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{(\mathrm{n}+1)D}}\mathrm{C}_0^{(\mathrm{n}+1)/2}$$

Искусственная стационарность



Задача о клеточном эффекте

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

$$w = rW$$

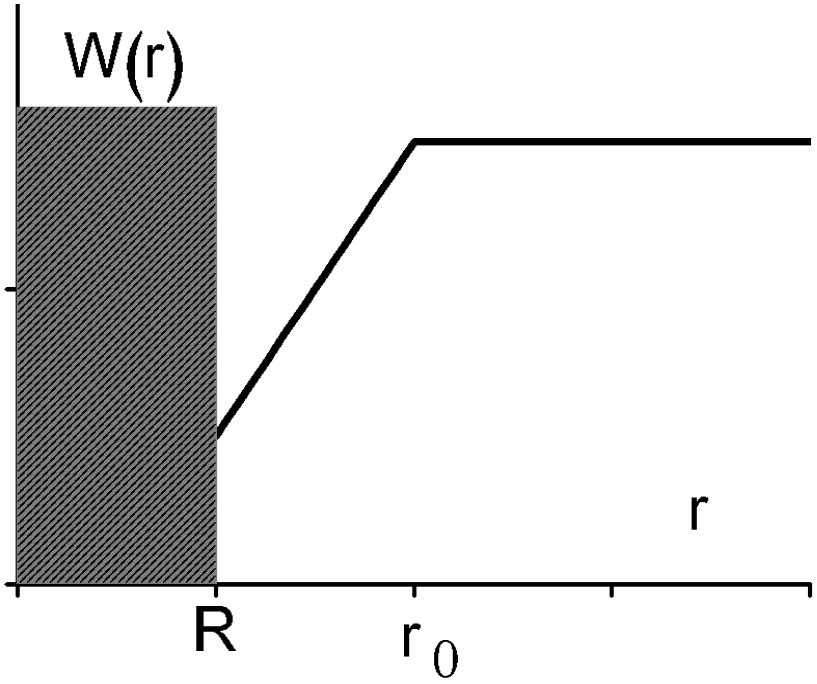
$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0$$

$R = r_A + r_B$

$D = D_A + D_B$.

Ответ:

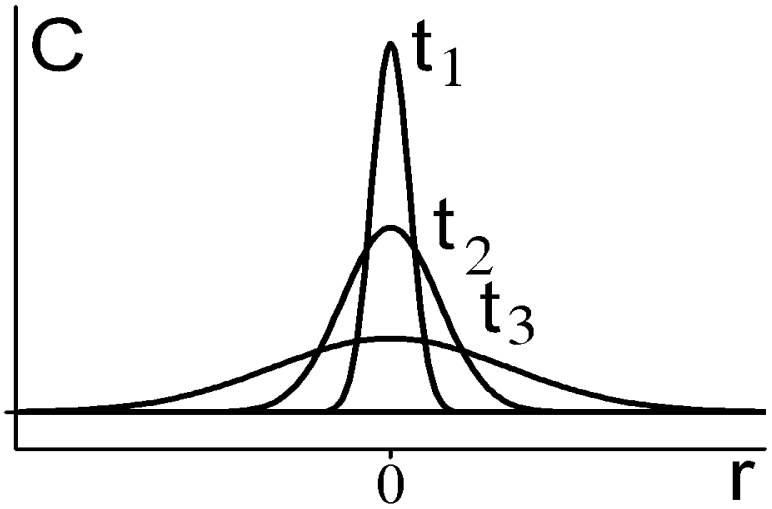
$$P_R = \frac{R}{r_0\left(\frac{D}{k_s R} + 1\right)}$$



Нестационарная кинетика

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathrm{D}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

$$w = r \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$



$$C = \frac{N}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$$

$$\overline{x} = \sqrt{2\mathrm{D}t}$$

Методы решения

Преобразование Лапласа

F(s) $\doteqdot$ **f(t)**

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

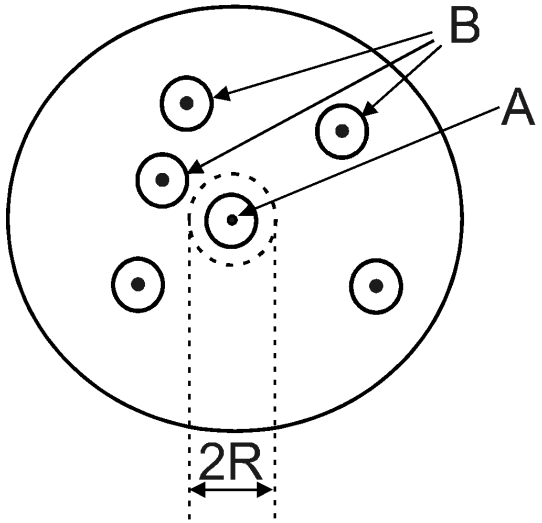
Разделение переменных:

$$C(x,t) = P(x)Q(t)$$

$$\frac{1}{D^2}\frac{1}{Q(t)}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Недостаток: применимы к линейным уравнениям!

Задача Смолуховского



$R = r_A + r_B$

$D = D_A + D_B$.

$w = rW$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

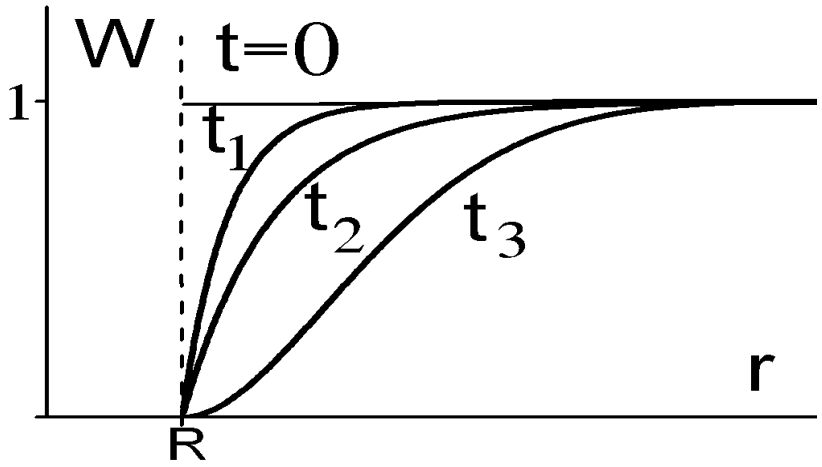
Граничные условия:

1) $W(r,0) = W_0$
2) $W(R,t) = 0$
3) $W(\infty,t) = W_0$

Решение:

$$W(r,t) = W_0\left[1 - \frac{R}{r}\operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]$$

$$w_r = 4\pi R D\left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi D t}}\right)[A][B]$$



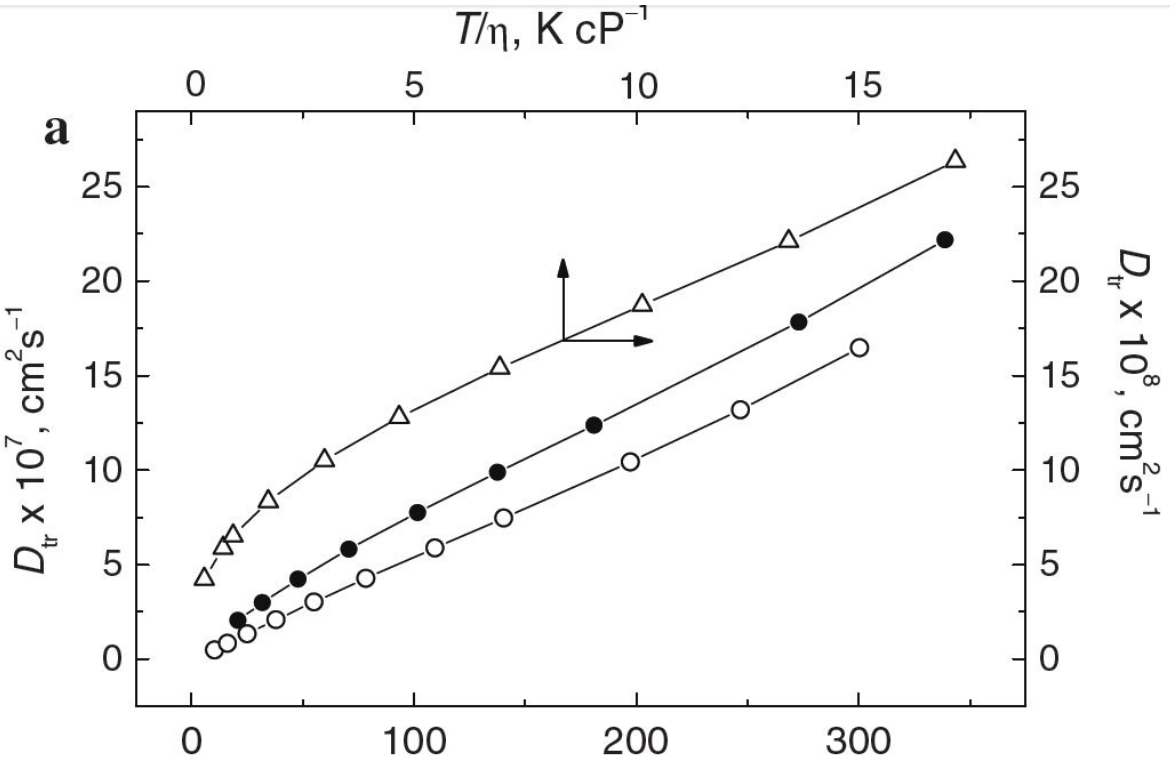
Константа скорости реакции

$$k_r = 4\pi R\mathrm{D}\left(1+\frac{R}{\sqrt{\pi Dt}}\right) \approx 4\pi R\mathrm{D}$$

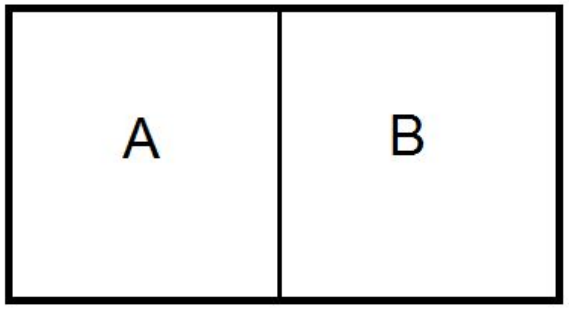
$$\mathrm{D} = \frac{k\mathrm{T}}{6\pi\eta R} \qquad \mathrm{k_r} = \frac{2\mathrm{kT}}{3\eta}$$

Нестационарная часть кинетики

$$t < \frac{R^2}{\pi D}$$

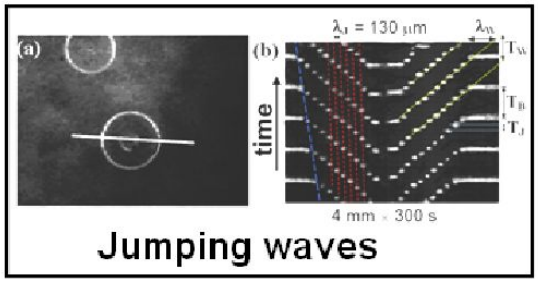


Диффузия-реакция



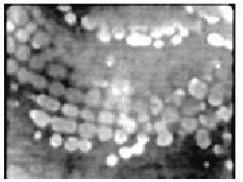
Структуры в реакции Белоусова-Жаботинского

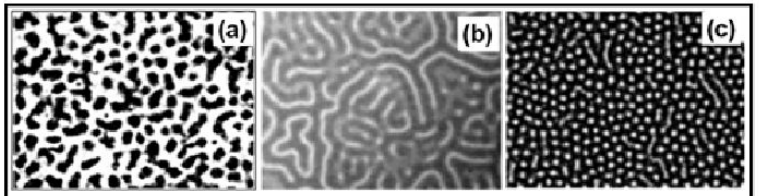
Два коэффициента диффузии, константа скорости реакции



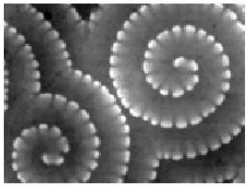
Jumping waves

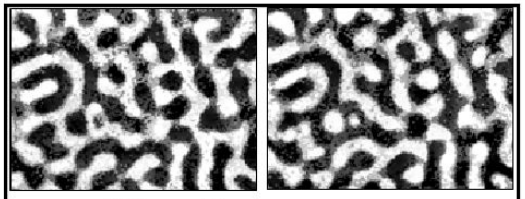
Accelerating Waves


Bubble waves



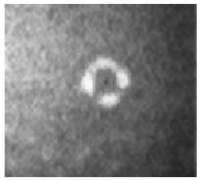
Turing patterns


Segmented Spirals

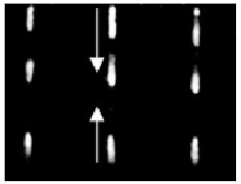

Standing waves

Packet waves

Anti-Spirals


Oscillon

Chemical memory


Localized waves

Spiral & Chaos

Смещение при диффузии

$x \sim \sqrt{Dt}$ Нормальная (Гауссова) диффузия

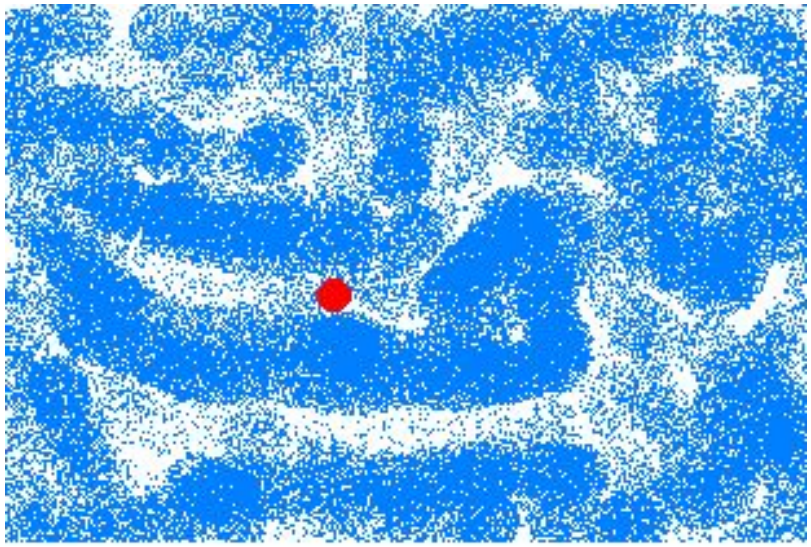
$x \sim t^{\alpha};\ \alpha < \frac{1}{2}$ Аномальная (странная) диффузия
медленная (заторможенная)
subdiffusion

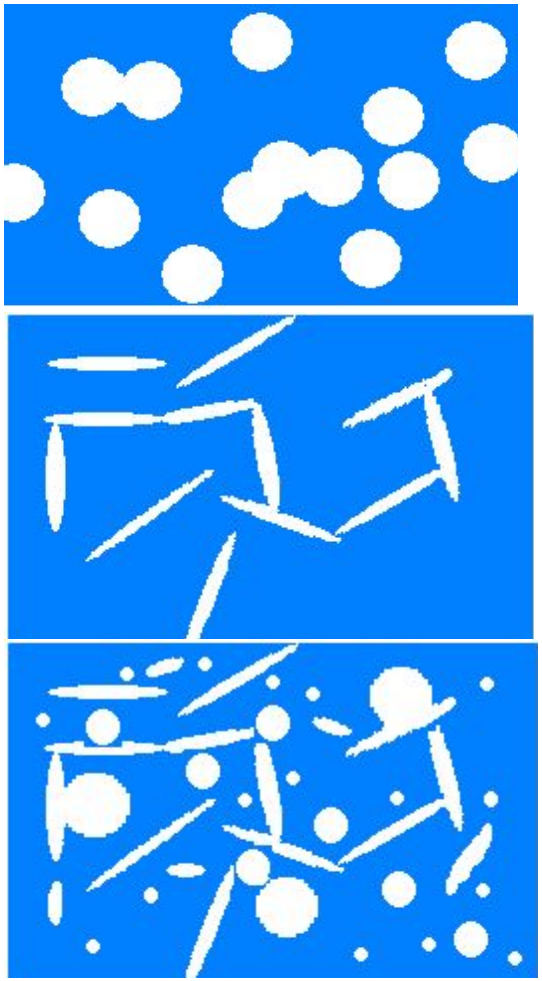
$x \sim t^{\alpha};\ \alpha > \frac{1}{2}$ Аномальная (странная) диффузия
быстрая (ускоренная)
superdiffusion

Полимеры
Пористые материалы
Потоки жидкости
Геологические породы и т.д.

Неоднородность среды

Теория перколяция (протекания)

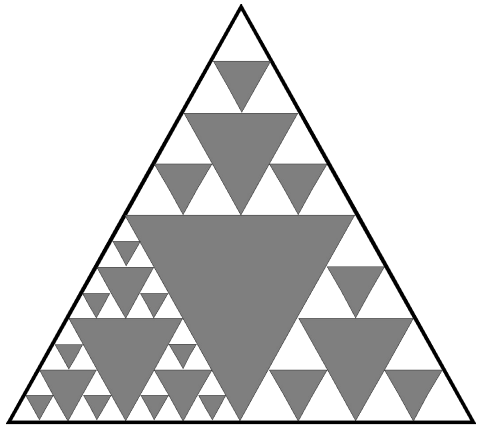




Фрактальная размерность

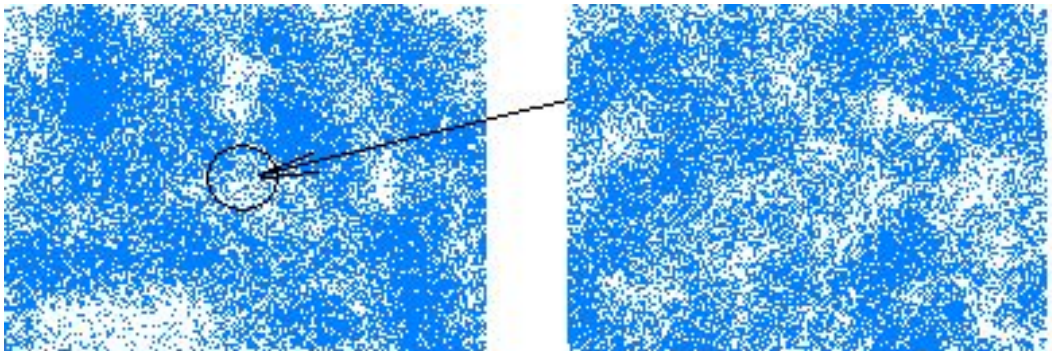
Размерность по Хаусдорфу

$$d = \lim_{\varepsilon \to \infty} \{ \frac{\ln[N(\varepsilon)]}{\ln[1/\varepsilon]} \}$$

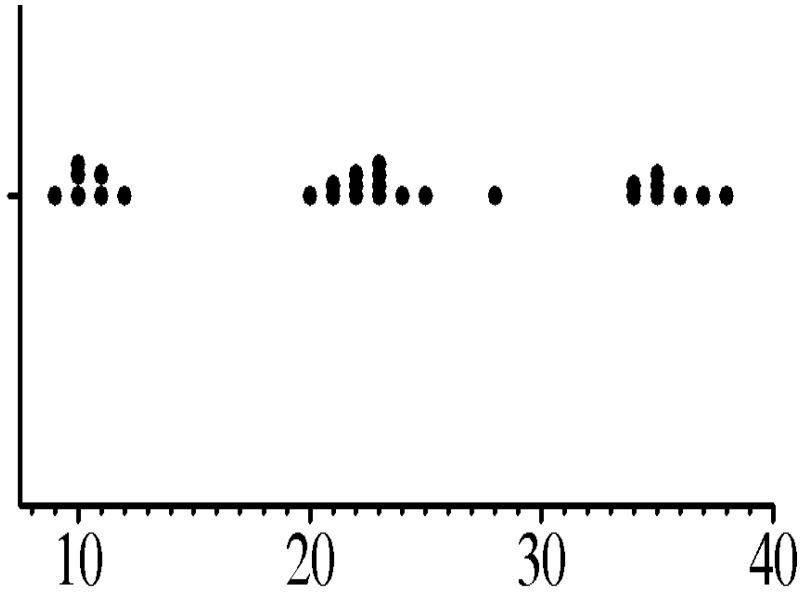


Салфетка Серпиннского

Самоподобие при увеличении разрешения:



Фрактальные блуждания



Диффузионные скачки на различные расстояния. Модель подвижного свободного объема.

$$P\{R > r\} \propto r^{-\alpha}, \; r \to \infty$$

$$P\{\tau > t\} \propto t^{-\beta}, \; r \to \infty$$

T - память среды

Обобщенное уравнение диффузии

$$\frac{\partial^{\beta} p(x,t)}{\partial t^{\beta}} = -D\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} p(x,t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\delta(x)$$

$$0 < \alpha \le 2, \quad 0 < \beta \le 1$$

где производная дробного порядка:

$$\frac{\partial^{\beta} p(x,t)}{\partial t^{\beta}} = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(x,t)d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}$$

Диффузия взаимодействующих частиц

$$\frac{\partial C}{\partial t} + div(j) = 0$$

$$j = -\mathrm{D}(gradC + \frac{C}{kT} gradV)$$

$$k = 4\pi \mathrm{DR}_{\mathrm{eff}}$$

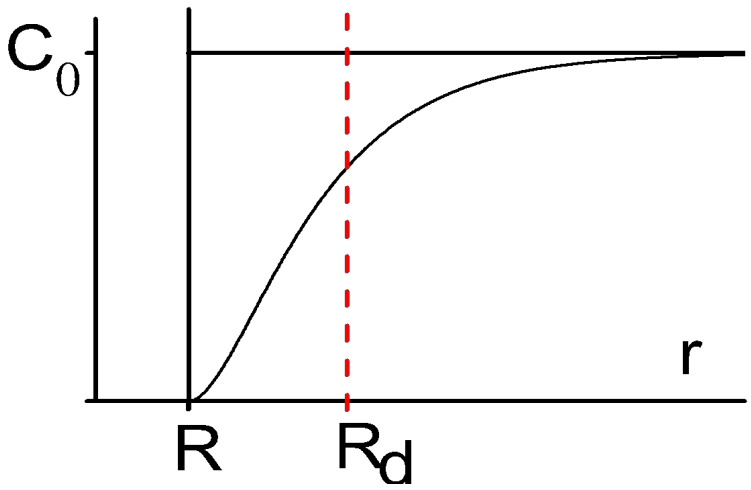
$$\mathrm{R}_{\mathrm{on}} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon \mathrm{kT}}$$

Туннельная реакция

$$P(r) = P_0 \exp(-\alpha r)$$

Диполь-дипольное взаимодействие

$$P(r) = P_0 / r^6$$



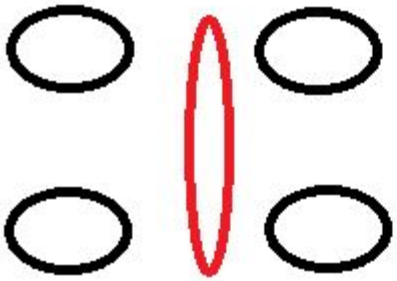
$$x \sim \sqrt{\mathrm{D}t}$$

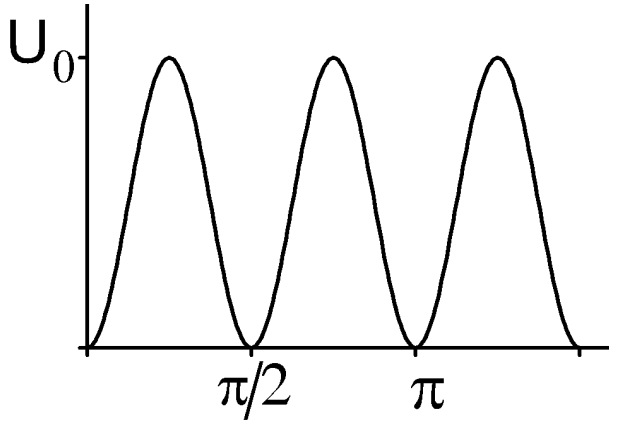
$$\frac{(\mathrm{R}_{eff} - R)^2}{D} = \exp(\alpha \mathrm{R}_{eff})$$

Вращательная подвижность

Газовая фаза (моменты инерции, вращательная энергия).

Твердая фаза (либрации).

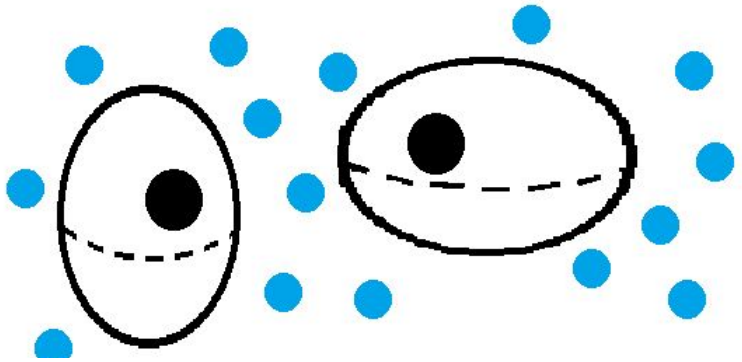




Жидкая фаза

$\tau_r < \tau_t; \quad k_r = 4\pi R D_t$

$\tau_r > \tau_t; \quad k_r = 4\pi R D_t S^2$



Вращательная диффузия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_t \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) + D_r \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l^m(\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} = -l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Методы измерения:

- поляризация флуоресценции;
- ЭПР спектроскопия;
- ЯМР спектроскопия;
- релаксация дихроизма (двулучепреломления)

Коэффициент вращательной диффузии

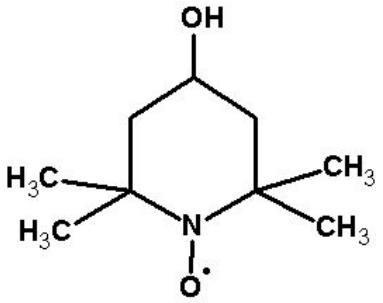
$$D_r = \frac{kT}{6\pi\eta R^3}$$

R_{eff} = 3.8A (пропанол),
2.9A (кумол),
1.8A (omim BF_4)

R_{geom} ~ 5.5 A

TEMPOL in omimBF_4

T (K)	$D^x_{rot} \times 10^{-8}$ (s^{-1})	$D^y_{rot} = D^z_{rot} \times 10^{-8}$ (s^{-1})
280	2.0	0.38
290	3.2	0.58
295	3.9	0.72
300	5.2	0.94
310	9.0	1.57
320	13.3	2.64



Заключение

1. Решаются линейные диффузионные задачи.
2. Осложнения – нелинейность, кросс-диффузия (неидеальность среды)
3. Реальные жидкости, полимеры, адсорбенты.....-

ФРАКТАЛЫ

4. Диффузия – фрактальное движение и/или движение по фракталу
5. Диффузия взаимодействующих частиц – эмпирически
6. Реакция-диффузия – нелинейная задача